2 次対称行列の Riesz 超関数と そのフーリエ変換公式

青山学院大学大学院　理工学研究科　理工学専攻
西山研究室

35616015　横田　賢哉

目次

1 序

$\mathbb{R}$ 上の Riesz 超関数 $R_s^{\pm}$ $(s \in \mathbb{C})$ は，$\mathrm{Re}\, s > 0$ に対して次の積分で定義される；

$$R_s^{\pm}(\phi) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\mathbb{R}_{\pm}} \phi(x)|x|^{s-1}dx \quad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})).$$

ここで $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上のシュワルツ空間を表し，$R_s^{\pm}$ は緩増加超関数となる．この $R_s^{\pm}$ は整関数として複素数全体に解析接続ができ，$R_0 = \delta_0$ (Dirac のデルタ関数)，$\frac{d}{dx}R_{s+1} = R_s$ といった性質を持つ．

この超関数 $R_s^{\pm}$ は高次元に拡張することができる．例えば $V = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ を典型例とする，一般の対称錐の場合にも Riesz 超関数が定義され，様々な性質が調べられている ([2] 参照)．本論文では，2 次対称行列の空間 $V = \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ 上の Riesz 超関数を考える．$\Omega^{(p,q)}$ を符号数 (p, q) の 2 次対称行列全体とするとき，$\Omega^{(p,q)}$ $(p + q = 2)$ 上の Riesz 超関

数 $R_s^{(p,q)}$ は，$\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ のとき

$$R_s^{(p,q)}(\phi) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)} \int_{\Omega^{(p,q)}} \phi(z) |\det z|^{s-\frac{3}{2}} dz$$
$$\bigl(\phi \in \mathcal{S}(V),\, \Gamma_\Omega(s) = \sqrt{\pi}\, \Gamma(s)\, \Gamma(s-1/2)\bigr)$$

と定義され，s の整関数として $\mathbb{C}$ 全体に解析接続でき，$\mathbb{R}$ の場合と同様の等式を満たす．

私は，Riesz 超関数のフーリエ変換に興味を持った．$\mathbb{R}$ 上の Riesz 超関数のフーリエ変換は，$\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき，極限と積分を用いて，

$$\widehat{R}_s^{\pm} = (-2\pi i)^{-s} \lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)(y \pm it)^{-s} dy \tag{1}$$

のように表示できる (§3.2　補題 15)．式 (1) を用いることで，

$$\widehat{R}_s^{\pm} = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^s} \left(e^{\pm\frac{\pi}{2}is} R_{1-s}^{+} + e^{\mp\frac{\pi}{2}is} R_{1-s}^{-}\right) \tag{2}$$

のように $\widehat{R}_s^{\pm}$ は $R_s^{\pm}$ の一次結合で表されることがわかるが，両辺が s の解析関数であることに注意すると，すべての $s \in \mathbb{C}$ に対して (2) の等式が成り立つことがわかる (§3.2　定理 19)．2 次正定値対称行列の錐 $\Omega^{(2,0)}$や$\Omega^{(0,2)}$ 上の Riesz 超関数のフーリエ変換も同様の手法で計算ができ，すべての $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\widehat{R}_s^{(2,0)} = \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s} \left\{ e^{\pi i s} R^{(2,0)}_{-s+\frac{3}{2}} + R^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}} + e^{-\pi i s} R^{(0,2)}_{-s+\frac{3}{2}} \right\} \tag{3}$$

$$\widehat{R}_s^{(0,2)} = \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s} \left\{ e^{-\pi i s} R^{(2,0)}_{-s+\frac{3}{2}} + R^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}} + e^{\pi i s} R^{(0,2)}_{-s+\frac{3}{2}} \right\} \tag{4}$$

が成り立つ (§4.4　定理 31)．しかし，$R_s^{(1,1)}$ のフーリエ変換の計算には同様の手法を使うことができない．このような困難はあるが，2 次の場合には，式 (3) の両辺を再度フーリエ変換することにより，フーリエ変換公式

$$\widehat{R}_s^{(1,1)} = 2 \sin \pi s \, \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s} \, R^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}}$$

を得ることができた (§4.5　定理 32)．

一般の $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 上の Riesz 超関数のフーリエ変換は室正和 [4]，新谷卓郎 [5] によって佐藤超関数，代数解析学の手法を用いて計算がされている．だが本論文では，複素解析学や Γ 関数の性質など，よく知られた道具のみを用いて Riesz 超関数の性質を明らかにすることができた．証明の手法は新しく，既存のものとは全く異なっている．以下，本論文

の内容を章を追って簡単に紹介する．§2 では，準備としてフーリエ変換・緩増加超関数とその性質について簡単に紹介する．§3 では $\mathbb{R}$ 上の Riesz 超関数の正則性について考察し，フーリエ変換を求める．§4 では $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ 上の Riesz 超関数とその正則性，また特殊値の考察を行い，不定値対称行列の空間における Riesz 超関数のフーリエ変換を求める．

2　超関数とそのフーリエ変換

本章では，以後必要になる用語と概念の導入を行う．超関数とフーリエ変換に関しては，[1] 及び [7] を参考にしてほしい．

2.1　急減少関数のフーリエ変換

定義 1 (急減少関数)**.** $V = \mathbb{R}^n$ を n 次元ベクトル空間とする．V 上の C^∞ 関数 $f(x)$ と $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して，

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x)$$

をその微分とする（α は多重指数）．同様に $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} (x \in V)$ などと書く．

$$\mathcal{S}(V) = \left\{ f(x) \in C^\infty(V) \,\middle|\, \sup_{x \in V} |(1 + |x|^2)^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty \quad ({}^\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}) \right\}$$

を考え，$f(x) \in \mathcal{S}(V)$ を**急減少関数**，$\mathcal{S}(V)$ を**シュワルツ空間**と呼ぶ．

$\mathcal{S}(V)$ には自然な準ノルム

$$P_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in V} |(1 + |x|^2)^\alpha \partial^\beta f(x)|$$

が入る．この準ノルムの族 $\{P_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ による位相を考えると，$\mathcal{S}(V)$ は完備な位相ベクトル空間になる（[7] 参照）．

次に，急減少関数に対してフーリエ変換を定義する．$\mathbb{R}^n$ 上の標準内積を $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$ で決める．

定義 2 (フーリエ変換)**.** $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

と定義して，$\mathcal{F}(f)$ を f の**フーリエ変換**という．

また，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

と定義して，$\mathcal{F}^{-1}(f)$ を f の**逆フーリエ変換**という．

定理 3. f が急減少関数ならば，$\mathcal{F}(f)$ も急減少関数であって，

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x)$$

が成り立つ．

定理 4 (Parseval の等式)**.** $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ならば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = \int_{\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(x)\overline{\mathcal{F}(g)(x)} dx$$

が成り立つ．

Proof. [6, p．226，定理 29.7] の証明参照． □

次に $n \times n$ 対称行列 $V = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 上のフーリエ変換を定義する．

定義 5 ($\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 上のフーリエ変換)**.** $f \in \mathcal{S}(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}))$ に対して，

$$\widehat{f}(\xi) = \int_V f(x) e^{-2\pi i \mathrm{Tr} x \xi} dx \qquad (\xi \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}))$$

と定義して，$\widehat{f}$ を f の**フーリエ変換**という．また，

$$\check{f}(\xi) = \int_V f(x) e^{2\pi i \mathrm{Tr} x \xi} dx \qquad (\xi \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}))$$

を f の**逆フーリエ変換**という．

$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 上のフーリエ変換においても，定理 3 と同様の性質が導かれる．

定理 6. f が急減少関数ならば，$\widehat{f}$ も急減少関数であって，

$$(\widehat{f})^{\vee}(x) = (\check{f})^{\wedge}(x) = 2^{-\frac{n(n+1)}{2}} f(x)$$

が成り立つ．

2.2 超関数

定義 7 (緩増加超関数)**.** $\mathcal{S}(V)$ 上で定義された複素数値線形汎関数 T が連続であるとき，T を V 上の**緩増加超関数**という．

例 1 (Dirac のデルタ関数 δ_0)**.** $f \in \mathcal{S}(V)$ に対して，

$$\delta_0(f) = f(0) \tag{5}$$

は緩増加超関数である．δ_0 を Dirac **のデルタ関数**という．

定義 8 (超関数の微分)**.** 超関数 T の 導関数 T' を

$$T'(f) = T(-f')$$

によって定義する．

一般に超関数とはコンパクト台の C^∞ 級関数の空間 $\mathcal{D}(V)$ 上の連続線形汎関数を指すが，$\mathcal{D}(V) \subset \mathcal{S}(V)$ なので，緩増加超関数はもちろん超関数であり，上の微分の定義を用いることができる．一般に超関数に対してはそのフーリエ変換をうまく定義できないが，緩増加超関数には，フーリエ変換を考えることができる．Parseval の等式より，このフーリエ変換は通常の関数のフーリエ変換の一般化であることがわかる．

定理 9 (緩増加超関数のフーリエ変換)**.** 任意の緩増加超関数 T に対して，

$$\widehat{T}(f) = T(\check{f})$$

が成り立つ．

3 1 次元 Riesz 超関数

3.1 $\mathbb{R}$ 上の Riesz 超関数の正則性

はじめに，$V = \mathbb{R}$ における Riesz 超関数について考える．

定理 10. $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$ とする．このとき

$$R_s(\phi) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \phi(x)|x|^{s-1}dx \quad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

は緩増加超関数である．

定理 10 を示すために，次の補題を証明する．

補題 11． $s \in \mathbb{C}$，$\mathrm{Re}\, s > 0$，$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ のとき，積分

$$\int_0^\infty \phi(x)|x|^{s-1}dx$$

は収束する．

Proof. 積分

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 \phi(x)x^{s-1}dx + \lim_{b \to \infty} \int_1^b \phi(x)x^{s-1}dx \tag{6}$$

が収束することを示せばよい．はじめに $\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 \phi(x)x^{s-1}dx$ が収束することを示す．$\phi(x)x^{s-1}$ は区間 $(0,1]$ で連続である．また ϕ は急減少関数なので，$|\phi(x)| \le K_1$ となる正の実数 K_1 が存在する．よって

$$\int_a^1 |\phi(x)x^{s-1}|dx \le \int_a^1 K_1 x^{\mathrm{Re}\,(s-1)}dx = \frac{K_1}{\mathrm{Re}\, s}(1 - a^{\mathrm{Re}\, s}) \to \frac{1}{\mathrm{Re}\, s}K_1 \quad (a \downarrow 0)$$

となり，$\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき，$\lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 \phi(x)x^{s-1}dx$ は収束することがわかる．次に $\lim_{b \to \infty} \int_1^b \phi(x)x^{s-1}dx$ について考える．．ϕ が急減少関数であることから

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |(1 + |x|^\alpha)\phi(x)| \le K_2$$

となる正の実数 K_2 が存在する． $\alpha \ge \mathrm{Re}\, s + 1$ とするとき，

$$\begin{aligned}\int_1^b |\phi(x)x^{s-1}|dx &\le \int_1^b \frac{|x|^{\mathrm{Re}\, s - 1}}{1 + |x|^\alpha} K dx \le K_2 \int_1^b \frac{|x|^{\mathrm{Re}\, s - 1}}{|x|^\alpha} dx \\ &\le K_2 \int_1^b |x|^{-2} dx \to K_2 \quad (b \to \infty)\end{aligned}$$

となる．よって積分 (6) は収束する． □

Proof. 定理 10 を証明する．R_s が線形汎関数であることは，積分の線形性よりわかる．R_s が連続であることを示す．$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上で関数列が $\phi_n \to \phi \quad (n \to \infty)$ のように収束しているとき，

$$R_s(\phi_n) \to R_s(\phi) \quad (n \to \infty)$$

が成立することを示せばよい．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} R_s(\phi_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \phi_n(x)|x|^{s-1}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^1 \phi_n(x)|x|^{s-1}dx + \int_1^\infty \phi_n(x)|x|^{s-1}dx \right\} \qquad (7)\end{aligned}$$

$\phi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ より，補題 11 と同様の計算をすることで，

$$M(x) = \begin{cases} K_1 x^{\mathrm{Re}\, s-1} \\ K_2 x^{-2} \end{cases}$$

となり，Lebesgue の収束定理が適用できる．極限と積分の交換を行うと，

$$(7) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)|x|^{s-1}dx + \int_1^\infty \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)|x|^{s-1}dx \right\} \qquad (8)$$

ϕ_n は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上で ϕ に収束することから，

$$|\phi_n(x) - \phi(x)| \le P_{0,0}(\phi_n - \phi) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるので

$$\begin{aligned}(8) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \int_0^1 \phi(x)|x|^{s-1}dx + \int_1^\infty \phi(x)|x|^{s-1}dx \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \phi(x)|x|^{s-1}dx = R_s(\phi)\end{aligned}$$

$\square$

定義 12 (Riesz 超関数)**.** $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき，

$$R_s^{\pm}(\phi) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\mathbb{R}_\pm} \phi(x)|x|^{s-1}dx \quad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})) \qquad (9)$$

を $\mathbb{R}$ 上の Riesz **超関数**という．

ここで R_s^- は変数変換によって

$$\begin{aligned}R_s^-(\phi) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-\infty}^0 \phi(x)|x|^{s-1}dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \phi(-t)|t|^{s-1}dt \quad (\because x = -t) \\ &= R_s^+(\tilde{\phi}) \quad (\tilde{\phi}(x) = \phi(-x))\end{aligned}$$

のように R_s^+ を用いて表されるので，R_s^+ を考えれば十分である．以後 $R_s := R_s^+$ と書くことにする．

R_s は $\mathrm{Re}\, s > 0$ で絶対収束する積分により定義されており，$R_s(\phi)$ は右半平面で解析的であるが，全平面に正則に関数として解析接続することができる (定理 14)．これを示すには次の基本的な性質が必要になる．

定理 13 (R_s の微分)**.** $\mathrm{Re}\, s > 0$ ならば

$$\frac{d^k}{dx^k} R_{s+k} = R_s \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{10}$$

が成立する．

Proof. 超関数の微分の定義 (定義 8) より，

$$R'_{s+1}(\phi) = R_{s+1}(-\phi')$$

である．式 (9) より，

$$\begin{aligned} R'_{s+1}(\phi) = R_{s+1}(-\phi') &= \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty -\phi'(x) x^{(s+1)-1} dx \\ &= -\frac{1}{\Gamma(s+1)} \left\{ [\phi(x) x^s]_0^\infty - \int_0^\infty \phi(x) s x^{s-1} dx \right\} \end{aligned} \tag{11}$$

となる．第 2 の等式では部分積分を用いた．$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ より，$x \to \infty$ のとき $\phi(x) x^s \to 0$ であるから，

$$[\phi(x) x^s]_0^\infty = \lim_{t \to \infty} [\phi(x) x^s]_0^t = \lim_{t \to \infty} \phi(x) x^s = 0$$

となる．よって，

$$(11) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty \phi(x) s x^{s-1} dx = \frac{s}{\Gamma(s+1)} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^\infty \phi(x) x^{s-1} dx = R_s(\phi).$$

よって

$$R'_{s+1}(\phi) = R_s(\phi) \tag{12}$$

が成立する．$k \in \mathbb{N}$ に関する帰納法より，式 (10) が成立する． □

R_s は $\mathrm{Re}\, s > 0$ のときに積分によって定義した．定理 13 を用いると，R_s を s に関する整関数に解析接続することができる．

定理 14. 任意の急減少関数 ϕ に対して，$R_s(\phi)$ は整関数に拡張できる．

Proof. $k \in \mathbb{N}$ とする時，R_s が $\mathrm{Re}\, s > -k$ に解析接続できることを示す．定義より，R_s は $\mathrm{Re}\, s > 0$ で正則，R_{s+k} は $\mathrm{Re}\, s + k > 0$ で正則である．定理 13 より，$\mathrm{Re}\, s > 0$ のとき

$$R_{s+k}\left((-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\phi\right) = R_s(\phi)$$

が成立する．ここで左辺は $\mathrm{Re}\, s > -k$ で定義されており，そこで正則だから $R_s(\phi)$ は $\mathrm{Re}\, s > -k$ まで解析接続できる．k は任意であるから，$R_s(\phi)$ は全平面 $\mathbb{C}$ 上の正則関数として解析接続できることがわかった． □

3.2 $\mathbb{R}$ 上 Riesz 超関数のフーリエ変換

補題 15 (R_s のフーリエ変換)**.** $s \in \mathbb{C}$，$\mathrm{Re}\, s > 0$ に対して，R_s のフーリエ変換 $\widehat{R}_s$ は

$$\widehat{R}_s(\phi) = (-2\pi i)^{-s} \lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)(y+it)^{-s} dy$$

と表される．さらに，$\mathrm{Re}\, s \leq 0$ のとき，

$$\widehat{R}_s(\phi) = (-2\pi i)^{-s} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) y^{-s} dy$$

が成り立つ．

Proof. 超関数のフーリエ変換の定義より，

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_s(\phi) = R_s(\overset{\vee}{\phi}) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \overset{\vee}{\phi}(x) x^{s-1} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{2\pi i x y} dy \right\} x^{s-1} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \downarrow 0} \phi(y) e^{-2\pi x (t - iy)} dy \right\} x^{s-1} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left\{ \lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{-2\pi x (t - iy)} dy \right\} x^{s-1} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \lim_{t \downarrow 0} e^{-2\pi x t} \overset{\vee}{\phi}(x) x^{s-1} dx \qquad (13)
\end{aligned}$$

ここで，式 (13) の評価を行う． $t > 0, x > 0$ より，$|e^{-2\pi x t}| < 1$ である．よって，

$$|e^{-2\pi x t} \overset{\vee}{\phi}(x) x^{s-1}| < |\overset{\vee}{\phi}(x) x^{s-1}|$$

である．$\check{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ より，補題 11 から，$|\check{\phi}(x)x^{s-1}| \leq M(x)$ となる関数 $M(x)$ が存在し，積分 $\int_0^\infty M(x)dx$ は収束する．よって Lebesgue の収束定理より，式 (13) の極限と積分の順序を入れ替えることができるので，

$$(13) = \frac{1}{\Gamma(s)} \lim_{t \downarrow 0} \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi x(t-iy)} \phi(y) x^{s-1} dy \right\} dx \tag{14}$$

となる．ここで (14) の積分順序の交換をするために Fubini の定理 ([6, p. 101，定理 15.2]) を用い，t を固定したとき，積分

$$\int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty |e^{-2\pi x(t-iy)} \phi(y) x^{s-1}| dy \right\} dx$$

が収束することを示す．

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty |e^{-2\pi x(t-iy)} \phi(y) x^{s-1}| dy \right\} dx &= \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi xt} |\phi(y)| x^{\mathrm{Re}\, s-1} dy \right\} dx \\
&= \left\{ \int_0^\infty e^{-2\pi xt} x^{\mathrm{Re}\, s-1} dx \right\} \left\{ \int_{-\infty}^\infty |\phi(y)| dy \right\} \\
&= (2\pi t)^{-\mathrm{Re}\, s+2} \Gamma(\mathrm{Re}\, s) \int_{-\infty}^\infty |\phi(y)| dy < \infty. \qquad (15)
\end{aligned}$$

なので，Fubini の定理が適用できて，

$$(15) = \frac{1}{\Gamma(s)} \lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-2\pi x(t-iy)} \phi(y) x^{s-1} dy \right\} dx$$

が成り立つ．次に

$$\int_0^\infty e^{-2\pi xt} x^{s-1} dx \qquad (s > 0,\, t > 0) \tag{16}$$

について考える．式 (16) は式 (14) の $t = 0$ における式であり， 右半平面における正則関数である．$u = 2\pi xt$ と変数変換すると，式 (16) は

$$\int_0^\infty e^{-2\pi xt} x^{s-1} dx = (2\pi t)^{-s+1-1} \int_0^\infty e^{-u} u^{s-1} du = (2\pi t)^{-s} \Gamma(s) \tag{17}$$

と計算できる．

$$(2\pi z)^{-s} \Gamma(s) \qquad (z = t - iy)$$

は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ における正則関数であり， 分枝を $\mathrm{Im}\, z = -y = 0$ において $(2\pi t)^{-s} \Gamma(s)$ と一致するようにとっておく．このようにして式 (17) は解析接続され，

$$\int_0^\infty e^{-2\pi xz} x^{s-1} dx = (2\pi z)^{-s}\Gamma(s) \quad (\operatorname{Re} z > 0) \tag{18}$$

が成立する．ここで $(2\pi(t-iy))^{-s}$ は

$$\begin{aligned}(2\pi(t-iy))^{-s}\Gamma(s) &= (-2\pi i(y+it))^{-s} \\ &= (2\pi)^{-s} e^{\frac{\pi}{4}is}(y+it)^{-s} \quad (0 < \arg(y+it) < \pi)\end{aligned}$$

と計算できることに注意して，(18) を (14) に代入すると，

$$\begin{aligned}R_s(\overset{\vee}{\phi}) &= \lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}} \phi(y)(2\pi(t-iy))^{-s} dy \\ &= (2\pi)^{-s} e^{\frac{\pi}{4}is} \lim_{t\downarrow 0}\int_{-\infty}^\infty \phi(y)(y+it)^{-s} dy \\ &= (-2\pi i)^{-s} \lim_{t\downarrow 0}\int_{-\infty}^\infty \phi(y)(y+it)^{-s} dy\end{aligned}$$

$\operatorname{Re} s \leq 0$ のとき，$\operatorname{Re} s + k > 0$ となるような $k \in \mathbb{N}$ をとってくると，

$$\begin{aligned}\widehat{R}_s(\phi) &= R_{s+k}\left((-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\overset{\vee}{\phi}\right) = R_{s+k}(((-1)^k(2\pi ix)^k\phi)^\vee) \\ &= (-2\pi i)^{-(s+k)} \lim_{t\downarrow 0}\int_{-\infty}^\infty (-2\pi iy)^k \phi(y)(y+it)^{-(s+k)} dy \\ &\overset{(*)}{=} (-2\pi i)^{-s} \int_{-\infty}^\infty \lim_{t\downarrow 0} y^k \phi(y)(y+it)^{-(s+k)} dy \\ &= (-2\pi i)^{-s} \int_{-\infty}^\infty \phi(y) y^{-s} dy\end{aligned}$$

となる．ここで $(*)$ では Lebesgue の収束定理を用いた． □

R_s^- のフーリエ変換も同様に，$\operatorname{Re} s > 0$ のとき極限と積分を用いた式で書ける：

$$\widehat{R_s^-}(\phi) = (-2\pi i)^{-s} \lim_{t\downarrow 0}\int_{-\infty}^\infty \phi(y)(y-it)^{-s} dy$$

系 16. R_s は $s=0$ のとき，デルタ関数に一致する：

$$R_0 = \delta_0.$$

Proof. R_0 のフーリエ変換 $\widehat{R}_0$ を考える．定理 15 より，

$$\widehat{R}_0(\phi) = R_0(\overset{\vee}{\phi}) = \int_{-\infty}^\infty \phi(y) dy = \overset{\vee}{\phi}(0) = \int_{-\infty}^\infty \overset{\vee}{\phi}(x)\delta_0(x) dx = \delta_0(\overset{\vee}{\phi}) = \widehat{\delta}_0(\phi)$$

となり，$\widehat{R}_0 = \widehat{\delta}_0$ を得る．両辺の逆フーリエ変換をとって $R_0 = \delta_0$ がわかる． □

定理 17. 任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\widehat{R}_s^{\pm} = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^s}\left(e^{\pm\frac{\pi}{2}is}R_{1-s}^{+} + e^{\mp\frac{\pi}{2}is}R_{1-s}^{-}\right) \tag{19}$$

が成り立つ．

Proof. $\widehat{R}_s^{+}$ について示す．$\mathrm{Re}\, s \leq 0$ のとき，R_s^{+} のフーリエ変換は

$$R_s^{+}(\phi) = (-2\pi i)^{-s}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{t\downarrow 0}(y+it)^{-s}\phi(y)dy$$

が成り立つ．はじめに，$\lim_{t\downarrow 0}(y+it)^{-s}$ を計算する．$(y+it)^{-s}$ は

$$\begin{aligned}(y+it)^{-s} &= \exp\left(-s(\log|y+it| + i\arg(y+it))\right)\\ &= |y+it|^{-s}\exp\left(-is\arg(y+it)\right)\end{aligned}$$

と表せる．$\arg(y+it)$ は $t\downarrow 0$ のとき，分枝のとり方から

$$\arg(y+it) \to \begin{cases} 0 & (y \in \mathbb{R}_+) \\ \pi & (y \in \mathbb{R}_-) \end{cases}$$

であるから，

$$\lim_{t\downarrow 0}(y+it)^{-s} = \begin{cases} |y|^{-s} & (y \in \mathbb{R}_+) \\ |y|^{-s}e^{-\pi is} & (y \in \mathbb{R}_-) \end{cases}$$

が成り立つ．積分 $(-2\pi i)^{-s}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{t\downarrow 0}(y+it)^{-s}\phi(y)dy$ に代入すると，

$$\begin{aligned}&R_s^{+}(\phi) = (-2\pi i)^{-s}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{t\downarrow 0}(y+it)^{-s}\phi(y)dy\\ &= (2\pi)^{-s}e^{\frac{\pi}{2}is}\left(\int_0^{\infty}|y|^{-s}\phi(y)dy + e^{-\pi is}\int_{-\infty}^{0}|y|^{-s}\phi(y)dy\right)\\ &= \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^s}\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}is}}{\Gamma(1-s)}\int_0^{\infty}|y|^{(1-s)-1}\phi(y)dy + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}is}}{\Gamma(1-s)}\int_{-\infty}^{0}|y|^{(1-s)-1}\phi(y)dy\right)\\ &= (19)\end{aligned}$$

となる． □

4　2 次対称行列 $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ 上の Riesz 超関数

4.1　対称行列空間の座標

$V = \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ とし，$V \supset \Omega^{(p,q)}$ を符号数 (p,q) の 2 次対称行列全体とする：

$$\Omega^{(p,q)} = \{z \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{sgn}(z) = (p,q)\} = \left\{ g \begin{pmatrix} 1_p & \\ & -1_q \end{pmatrix} {}^t g \,\middle|\, g \in GL(2,\mathbb{R}) \right\}$$

V 上の Riesz 超関数を考えるために，$\Omega^{(p,q)}$ $(p+q=2)$ に座標を導入する．本章ではその座標の取り方について紹介する．

定理 18 ($\Omega^{(2,0)}$ の座標)**.**

$$\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R} \ni (u_1, u_2, v) \longmapsto z = \begin{pmatrix} u_1^2 + v^2 & vu_2 \\ vu_2 & u_2^2 \end{pmatrix} \in \Omega^{(2,0)}$$

は微分同相である．

Proof. 一般線形群 $GL(2,\mathbb{R})$ は $\Omega^{(2,0)}$ に $g \cdot z = gz{}^t g$ として推移的に作用する．このとき，単位行列 $I_2 \in \Omega^{(2,0)}$ における $GL(2,\mathbb{R})$ の固定部分群は $O(2)$ となる．$\Omega^{(2,0)}$ と $GL(2,\mathbb{R})/O(2)$ は写像

$$GL(2,\mathbb{R})/O(2) \ni gO(2) \longmapsto z = g{}^t g \in \Omega^{(2,0)}$$

によって全単射であるような対応を持つ．A, N を

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} | u_1, u_2 > 0 \right\},\ N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | v \in \mathbb{R} \right\}$$

とするとき，岩澤分解より $GL(2,\mathbb{R})/O(2)$ と $AN = B_2$ は微分同相であることから，

$$B_2 \ni b \longmapsto b{}^t b = z \in \Omega^{(2,0)}$$

は全単射である．次に，これが微分同相写像であることを示す．上の写像を具体的に書くと

$$z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = b{}^t b = \begin{pmatrix} u_1^2 + v^2 & vu_2 \\ vu_2 & u_2^2 \end{pmatrix} \in \Omega^{(2,0)}$$

である．この写像のヤコビアン $|\mathcal{J}|$ が 0 でないことを示せばよい．

$$|\mathcal{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u_1} & \frac{\partial \beta}{\partial u_2} & \frac{\partial \beta}{\partial v} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial u_2} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u_1 & 0 & 2v \\ 0 & v & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 \end{vmatrix} = -4u_1u_2^2 \tag{20}$$

であり，$u_1, u_2 > 0$ なのでヤコビアン $|\mathcal{J}|$ は 0 でない．よって微分同相であることがわかる． $\square$

$\Omega^{(0,2)}$ は, $\Omega^{(0,2)} = -\Omega^{(2,0)}$ とみなすことで座標系が得られる．また, $\Omega^{(1,1)}$, $\Omega^{(1,0)}$, $\Omega^{(0,1)}$ は次のように座標を取ることができる：

$$\begin{aligned}
\Omega_+^{(1,1)} &= \left\{ \left(\begin{array}{cc} u_1^2 - v^2 & -vu_2 \\ -vu_2 & -u_2^2 \end{array} \right) \middle| u_1, u_2 > 0, v \in \mathbb{R} \right\}, \\
\Omega_-^{(1,1)} &= -\Omega_+^{(1,1)}, \\
\Omega^{(1,0)} &= \Omega_+^{(1,0)} \sqcup \Omega_0^{(1,0)}, \\
&\quad \Omega_+^{(1,0)} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} v^2 & vu_2 \\ vu_2 & u_2^2 \end{array} \right) \middle| u_2 > 0, v \in \mathbb{R} \right\}, \\
&\quad \Omega_0^{(1,0)} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} u_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle| u_1 > 0 \right\}, \\
\Omega^{(0,1)} &= \Omega_-^{(0,1)} \sqcup \Omega_0^{(0,1)} \\
&\quad \Omega_-^{(0,1)} = -\Omega_+^{(1,0)},\ \Omega_0^{(0,1)} = -\Omega_0^{(1,0)}.
\end{aligned}$$

4.2 $\Omega^{(2,0)}$ 上の Riesz 超関数

$V = \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ における Riesz 超関数を整関数として導入するためには Γ 因子によって積分の極を打ち消す必要がある．まずは Γ 因子を導入しよう．

定義 19 (Γ 因子)**.** $\Omega = \Omega^{(2,0)}$ に付随した Γ 関数（Gindikin の Γ 関数 [2, P.123, §7.1]）を次のように定義する．

$$\Gamma_\Omega(s) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(s)\,\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)$$

この Γ 因子を用いて Riesz 超関数を次のように積分で定義する ([2, P.132, §7.2])．

定理 20. $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ のとき，次の積分

$$R_s^{(2,0)}(\phi) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)} \int_{\Omega^{(2,0)}} \phi(z) |\det z|^{s - \frac{3}{2}} dz \quad (\phi \in \mathcal{S}(V)) \tag{21}$$

は絶対収束して，緩増加超関数を与える．ここで dz は V 上の Lebesgue 測度を表す．

Proof. 証明のために，まず式 (21) の変数変換を行う．

補題 21.

$$R_s^{(2,0)}(\phi) = \frac{4}{\Gamma_\Omega(s)} \int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}} \phi(z) u_1^{2s-2} u_2^{2s-1} du_1 du_2 dv \tag{22}$$

Proof. はじめに，定理 18 より，

$$z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^2 + v^2 & vu_2 \\ vu_2 & u_2^2 \end{pmatrix} \in \Omega^{(2,0)}$$

であることから，

$$\alpha = u_1^2 + v^2, \quad \beta = vu_2, \quad \gamma = u_2^2$$

が成り立つ．積分の変数変換を行うために，$\det z$，$\mathrm{Tr}\, z$，dz を u_1, u_2, v で表すと，

$$\det z = u_1^2 u_2^2, \quad \mathrm{Tr}\, z = u_1^2 + u_2^2 + v^2.$$

である．また dz の変数変換は，式 (20) よりヤコビアン $|\mathcal{J}| = -4u_1u_2^2$ であるから，$dz = 4u_1u_2^2\, du_1 du_2 dv$ となり，これらを式 (23) に代入することで命題を得る． □

定理 20 を示す．積分は (22) から，$2\mathrm{Re}\, s - 1 > -1$ かつ $2\mathrm{Re}\, s - 1 > -1$ のときに収束する．よって $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ のときに収束する．シュワルツ空間 $\mathcal{S}(V)$ の位相に関する連続性は，まず $\mathrm{Re}\, s - \frac{3}{2} > 0$ のときに示し，あとは微分公式を用いる．そこで $\mathrm{Re}\, s - \frac{3}{2} < N$ となるような自然数 $N \in \mathbb{N}$ をとると，

$$\left| |\det z|^{s-\frac{3}{2}} \right| = |\det z|^{\mathrm{Re}\, s - \frac{3}{2}} \leq |\det z|^N$$

が成り立つ．$\phi \in \mathcal{S}(V)$ であることより，準ノルム P をうまくとると，

$$(1 + \mathrm{Tr}\, {}^t zz)^2 \left| \phi(z) |\det z|^N \right| \leq P(\phi)$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(2,0)}} \left| \phi(z) |\det z|^{s-\frac{3}{2}} \right| dz &\leq \int_{\Omega^{(2,0)}} \left| \phi(z) |\det z|^N \right| dz \\ &\leq P(\phi) \int_{\Omega^{(2,0)}} \frac{dz}{1 + \mathrm{Tr}\, {}^t zz} \end{aligned}$$

最後の積分値を K とすると，$\int_{\Omega^{(2,0)}} \left| \phi(z) |\det z|^{s-\frac{3}{2}} \right| dz \leq KP(\phi)$ のように準ノルムの定数倍で抑えられるので，連続性がわかる． □

定義 22 (Riesz 超関数)**.** $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ のとき，

$$R_s^{(p,q)}(\phi) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)} \int_{\Omega^{(p,q)}} \phi(z) |\det z|^{s-\frac{3}{2}} dz \qquad (\phi \in \mathcal{S}(V)) \tag{23}$$

を $\Omega^{(p,q)}$ $(p + q = 2)$ 上の Riesz 超関数$R_s^{(p,q)}$ という．

$R_s^{(p,q)}$ はやはり解析接続されて，全平面上の整関数になるが，その証明の鍵になる補題を準備する．

補題 23. $z = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in V$，$D = \partial_a \partial_d - \left(\frac{1}{2}\partial_d\right)^2$ とおく．このとき

$$D(\det z)^s = s\left(s+\frac{1}{2}\right)(\det z)^{s-1}$$

が成り立つ．

Proof. $(\det z)^s = (ad-b^2)^s$ に微分作用素 D を作用させると，

$$\begin{aligned}
D(\det z)^s &= (\partial_a\partial_d - \left(\frac{1}{2}\partial_d\right)^2)(ad-b^2)^s \\
&= \partial_a(s(ad-b^2)^{s-1}\cdot a) - \frac{1}{2}\partial_b(s(ad-b^2)^{s-1}\cdot(-b)) \\
&= s(s-1)(ad-b^2)^{s-2}\cdot ad + s(ad-b^2)^{s-1} \\
&\qquad - s(s-1)(ad-b^2)^{s-2}\cdot b^2 + \frac{1}{2}s(ad-b^2)^{s-1} \\
&= s(ad-b^2)^{s-2}\left(\frac{3}{2}(ad-b^2) + (s-1)(ad-b^2)\right) \\
&= s(\det z)^{s-1}\left(\frac{3}{2}+s-1\right) = s\left(s+\frac{1}{2}\right)(\det z)^{s-1}
\end{aligned}$$

□

定理 24 ($R_s^{(2,0)}$ の微分)**.** $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$，$D$ を補題 23 の微分作用素とする．このとき，$k \in \mathbb{N}$ に対して

$$DR_{s+k}^{(2,0)} = R_s^{(2,0)}$$

が成り立つ．

Proof. 超関数の微分の定義より，$\phi \in \mathcal{S}(V)$ とする．$D = \partial_a\partial_d - \left(\frac{1}{2}\partial_d\right)^2$ は 2 階の導関数の微分作用素であるため，

$$DR_{s+1}^{(2,0)}(\phi) = R_{s+1}^{(2,0)}(D\phi)$$

が成り立つ．よって，

$$DR_{s+1}^{(2,0)}(\phi) = R_{s+1}^{(2,0)}(D\phi) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(s+1)}\int_{\Omega^{(2,0)}} D\phi(z)|\det z|^{s-\frac{1}{2}}dz.$$

部分積分を行うと，命題 23 より，

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^{(2,0)}} D\phi(z)(\det z)^{s-\frac{1}{2}}dz &= \int_{\Omega^{(2,0)}} \phi(z)D(\det z)^{s-\frac{1}{2}}dz \\ &= \int_{\Omega^{(2,0)}} \phi(z)s\left(s-\frac{1}{2}\right)(\det z)^{s-\frac{3}{2}}dz\end{aligned}$$

となるので，式をまとめると，

$$DR_{s+1}^{(2,0)}(\phi) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(s+1)}\int_{\Omega^{(2,0)}} \phi(z)s\left(s-\frac{1}{2}\right)(\det z)^{s-\frac{3}{2}}dz. \tag{24}$$

ここで，Γ 関数の性質 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ より，

$$\begin{aligned}\Gamma_\Omega(s+1) &= \sqrt{\pi}\Gamma(s+1)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{\pi}s\Gamma(s)\left(s-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) \\ &= s\left(s-\frac{1}{2}\right)\Gamma_\Omega(s).\end{aligned}$$

ゆえに式 (24) は

$$DR_{s+1}^{(2,0)}(\phi) = \frac{1}{s\left(s-\frac{1}{2}\right)\Gamma_\Omega(s)}\int_{\Omega^{(2,0)}} \phi(z)s\left(s-\frac{1}{2}\right)(\det z)^{s-\frac{3}{2}}dz = R_s^{(2,0)}(\phi)$$

となる． □

微分公式から，$\mathbb{R}$ 上の Riesz 超関数の場合と同様にして，$R_s^{(2,0)}$ も整関数へと拡張することができることがわかる．

定理 25. 任意の急減少関数 ϕ に対して，$R_s^{(2,0)}(\phi)$ は整関数に拡張できる．

Proof. 証明は $\mathbb{R}$ 上の Riesz 超関数の場合と同様なので省略する． □

4.3 Riesz 超関数の退化

$R_s^{(2,0)}$, $R_s^{(1,1)}$, $R_s^{(0,2)}$ は $s \in \mathbb{C}$ に関する整関数に拡張されることがわかった．ここで $R_s^{(2,0)}$ について，s を $\frac{1}{2}$ に近づけると，$\Omega_+^{(1,0)}$ 上の積分となることを示そう．つまり $R_s^{(2,0)}$ の台は $s=\frac{1}{2}$ のとき階数が 1 の錐 $\Omega^{(1,0)}$ に退化する．

定理 26 ($R^{(2,0)}_{\frac{1}{2}}$ の台)**.** $s=\frac{1}{2}$ において Riesz 超関数は

$$R^{(2,0)}_{\frac{1}{2}}(\phi)=\frac{2}{\pi}\int_{\Omega^{(1,0)}_+}\phi(z)\,d\sigma(z)(\phi\in\mathcal{S}(V))$$

のように階数 1 の錐上の積分に退化する．ただし，$d\sigma(z)$ は式 (25) で与えられる $\Omega^{(1,0)}_+$ 上の測度である．

Proof. $R^{(2,0)}_s$ の補題 22 による表示を考える．$p=u_1^2$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned}
&R^{(2,0)}_s(\phi)\\
&=\frac{4}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}u_2^{2s-1}\left\{\int_0^{\infty}\frac{1}{2}\phi(p,u_2,v)p^{\left(s-\frac{1}{2}\right)-1}dp\right\}du_2\right\}dv\\
&=\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}u_2^{2s-1}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\phi(p,u_2,v)p^{\left(s-\frac{1}{2}\right)-1}dp\right\}du_2\right\}dv
\end{aligned}$$

1 次元 Riesz 超関数に対して $R_0=\delta_0$ であることを用いると，

$$\frac{1}{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}\phi(p,u_2,v)p^{\left(s-\frac{1}{2}\right)-1}dp\to\phi(0,u_2,v)\qquad\left(s\to\frac{1}{2}\right)$$

であることがわかるので，

$$R^{(2,0)}_{\frac{1}{2}}(\phi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\phi(0,u_2,v)du_2\right\}dv$$

となる．ここで，座標は

$$z=\begin{pmatrix}u_1^2+v^2 & vu_2\\ vu_2 & u_2^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}v^2 & vu_2\\ vu_2 & u_2^2\end{pmatrix}\in\Omega^{(1,0)}_+$$

であるので，

$$du_2dv=d\sigma(z)\tag{25}$$

と書くことで定理 26 を得る． □

系 27. 自然数 $k\in\mathbb{N}$ に対して $R^{(2,0)}_{\frac{1}{2}-k}$ は $\Omega^{(1,0)}_+$ 上に台を持つ．

Proof. 一般に，超関数の台は微分することによって増えないが，

$$R^{(2,0)}_{\frac{1}{2}-k}=D^kR^{(2,0)}_{\frac{1}{2}}$$

なので台は $\overline{\Omega^{(1,0)}_+}$ に含まれる． □

すでに $\mathbb{R}$ 上の Riesz 超関数に対しては $s=0$ で $R_0=\delta_0$，つまり R_s の台が原点 $\{0\}$ に退化することを見た．定理 26 はその一般化であるが，以下系 29 で，やはり $R_s^{(2,0)}$ の台が $s=0$ のとき原点 $\{0\}$ に退化することを示す．

4.4 $R_s^{(2,0)}$ のフーリエ変換

定理 28 ($R_s^{(2,0)}$ のフーリエ変換)**.** $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ に対して，$R_s^{(2,0)}$ のフーリエ変換 $\widehat{R}_s^{(2,0)}$ は

$$\widehat{R}_s^{(2,0)}(\phi) = \lim_{t\downarrow 0}\int_V \phi(w)(\det 2\pi(t-iw))^{-s}dw \tag{26}$$

で与えられる．また，$\operatorname{Re} s \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$\widehat{R}_s^{(2,0)}(\phi) = \int_V \lim_{t\downarrow 0}\phi(w)(\det 2\pi(t-iw))^{-s}dw \tag{27}$$

が成り立つ．

Proof. 超関数のフーリエ変換より，

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_s^{(2,0)}(\phi) = R_s^{(2,0)}(\overset{\vee}{\phi}) &= \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)}\int_{\Omega^{(2,0)}}\left\{\int_V \phi(w)e^{2\pi i \mathrm{Tr} zw}dw\right\}(\det z)^{s-\frac{3}{2}}dz \\
&= \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)}\int_{\Omega^{(2,0)}}\left\{\int_V \lim_{t\downarrow 0} e^{-2\pi t \mathrm{Tr} z}\phi(w)e^{2\pi i \mathrm{Tr} zw}dw\right\}(\det z)^{s-\frac{3}{2}}dz
\end{aligned} \tag{28}$$

ここで，Lebesgue の収束定理より，極限と積分の順序交換を行うと，

$$(28) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)}\int_{\Omega^{(2,0)}}\lim_{t\downarrow 0}\left\{\int_V e^{-2\pi t \mathrm{Tr} z}\phi(w)e^{2\pi i \mathrm{Tr} zw}dw\right\}(\det z)^{s-\frac{3}{2}}dz \tag{29}$$

積分 (29) の積分順序の交換を正当化するために，$t>0$ を固定したとき

$$\int_{\Omega^{(2,0)}}\left\{\int_V |e^{-2\pi t \mathrm{Tr} z}\phi(w)e^{2\pi i \mathrm{Tr} zw}(\det z)^{s-\frac{3}{2}}|dw\right\}dz \tag{30}$$

が有限であることを示す．式 (30) は $2\pi t z = \tilde{z}$ と変数変換することにより，

$$\begin{aligned}
(30) &= \left\{\int_{\Omega^{(2,0)}} e^{-2\pi t \mathrm{Tr} z}(\det z)^{s-\frac{3}{2}}dz\right\}\left\{\int_V |\phi(w)|dw\right\} \\
&= (2\pi t)^{-2s+4}\Gamma_\Omega(s)\int_V |\phi(w)|dw
\end{aligned}$$

と計算できる．$\phi \in \mathcal{S}(V)$ より $\int_V |\phi(w)|dw$ が収束することから，積分 (30) は収束する．よって Fubini の定理より，積分順序の交換が可能になるので，

$$\frac{1}{\Gamma_{\Omega^{(2,0)}}(s)}\lim_{t\downarrow 0}\int_V \left\{\int_{\Omega^{(2,0)}} e^{-2\pi\mathrm{Tr}(t-iw)z}(\det z)^{s-\frac{3}{2}}dz\right\}\phi(w)dw \tag{31}$$

となる．ここで積分

$$\int_{\Omega^{(2,0)}} e^{-2\pi\mathrm{Tr}(t-iw)z}(\det z)^{s-\frac{3}{2}}dz \tag{32}$$

を計算しよう．$2\pi(t-iw)=y$ とおき，まず $y\in\Omega^{(2,0)}$ として計算した後に解析接続する．$y={}^tgg\quad(g\in GL(2,\mathbb{R}))$ と表しておくと，

$$\mathrm{Tr}\,yz=\mathrm{Tr}{}^tggz=\mathrm{Tr}gz{}^tg$$

であるが，$gz{}^tg=\zeta$ と変数変換すると，$\zeta\in\Omega^{(2,0)}$ であり，$z=g^{-1}\zeta{}^tg^{-1}$ と表せる．このとき，$(\det z)^s$ を ζ によって書き直すと，

$$(\det z)^s=(\det g^{-1}\zeta{}^tg^{-1})^s=((\det g)^{-2}\det\zeta)^s=(\det y)^{-s}(\det\zeta)^s$$

となる．また $d\mu(z)=(\det z)^{-\frac{3}{2}}dz$ は G-不変測度なので，$d\mu(\zeta)=d\mu(gz{}^tg)=d\mu(z)$ である．よって積分 (32) は

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^{(2,0)}} e^{-\mathrm{Tr}yz}(\det z)^{s-\frac{3}{2}}dz &= \int_{\Omega^{(2,0)}} e^{-\mathrm{Tr}gz{}^tg}(\det z)^s d\mu(z)\\
&= \int_{\Omega^{(2,0)}} e^{-\mathrm{Tr}\zeta}(\det y)^{-s}(\det\zeta)^s d\mu(\zeta)\\
&= (\det y)^{-s}\int_{\Omega^{(2,0)}} e^{-\mathrm{Tr}\zeta}(\det\zeta)^s d\mu(\zeta)\\
&= (\det y)^{-s}\Gamma_\Omega(s)
\end{aligned}$$

となる．式 (31) に $y=2\pi(t-iw)$ として代入すると，

$$\begin{aligned}
(31) &= \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)}\lim_{t\downarrow 0}\int_V (\det y)^{-s}\Gamma_\Omega(s)\phi(w)dw\\
&= \lim_{t\downarrow 0}\int_V (\det(2\pi(t-iw)))^{-s}\phi(w)dw
\end{aligned}$$

となる．$y=2\pi(t-iw)$ としてよいことは定理 15 の証明と同様に解析接続を用いて正当化できる．

$\mathrm{Re}\, s \leq \frac{1}{2}$ のとき，$\mathrm{Re}\, s + k > \frac{1}{2}$ となるような $k \in \mathbb{N}$ をとってくると，

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_s^{(2,0)}(\phi) &= R_{s+k}^{(2,0)}(D^k \overset{\vee}{\phi}) = R_{s+k}^{(2,0)}(((-4\pi^2 \det z)^k \phi(z))^\vee) \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \int_V (\det(2\pi(t - iw)))^{-(s+k)} (-4\pi^2 \det w)^k \phi(w) dw \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \int_V (\det(2\pi(t - iw)))^{-s} \phi(w) dw \\
&\overset{(*)}{=} \int_V \lim_{t \downarrow 0} (\det(2\pi(t - iw)))^{-s} \phi(w) dw
\end{aligned}$$

となる．ここで，$(*)$ では Lebesgue の収束定理を用いた． □

1 次元 Riesz 超関数の場合と同じように，フーリエ変換 $\widehat{R}_s^{(2,0)}$ の積分表示を用いて $s = 0$ の場合に $R_0^{(2,0)}$ を求められる．

系 29. $s = 0$ のとき，Riesz 超関数は δ_0 関数に一致する．つまり

$$R_0^{(2,0)} = \delta_0$$

が成り立つ．

系 27 と同様に考えると，$R_{-k}^{(2,0)} = D^k R_0^{(2,0)}$ の台はやはり原点 $\{0\}$ のみにあり，δ_0 やその微分を用いて表すことができることがわかる．

$z \longmapsto -z$ という変数変換を考えることにより，$\Omega^{(0,2)}$ 上の Riesz 超関数 $R_s^{(0,2)}$ のフーリエ変換 $\widehat{R}_s^{(0,2)}$ の積分表示を得ることができる．

定理 30 ($R_s^{(0,2)}$ **のフーリエ変換**)**.** $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ に対して，$R_s^{(0,2)}$ のフーリエ変換 $\widehat{R}_s^{(0,2)}$ は

$$\widehat{R}_s^{(0,2)}(\phi) = \lim_{t \downarrow 0} \int_V (\det 2\pi(t + iw))^{-s} \phi(w) dw \tag{33}$$

任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して，次の等式が成り立つ．

定理 31 ($R_s^{(2,0)}$, $R_s^{(0,2)}$ **のフーリエ変換公式**)**.**

$$\widehat{R}_s^{(2,0)} = \frac{\Gamma_\Omega(-s + \frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s} \left\{ e^{\pi i s} R_{-s+\frac{3}{2}}^{(2,0)} + R_{-s+\frac{3}{2}}^{(1,1)} + e^{-\pi i s} R_{-s+\frac{3}{2}}^{(0,2)} \right\} \tag{34}$$

$$\widehat{R}_s^{(0,2)} = \frac{\Gamma_\Omega(-s + \frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s} \left\{ e^{-\pi i s} R_{-s+\frac{3}{2}}^{(2,0)} + R_{-s+\frac{3}{2}}^{(1,1)} + e^{\pi i s} R_{-s+\frac{3}{2}}^{(0,2)} \right\} \tag{35}$$

Proof. $\mathrm{Re}\, s < 0$ のとき，定理 28 の式 (27) が成立する．(27) の積分領域 V を $\Omega^{(2,0)}, \Omega^{(1,1)}, \Omega^{(0,2)}$ へと分解すると，$\widehat{R}_s^{(2,0)}$ は

$$\begin{aligned}\widehat{R}_s^{(2,0)} &= \int_V \lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s}\phi(w)dw \\ &= \int_{\Omega^{(2,0)}} \lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s}\phi(w)dw \\ &+ \int_{\Omega^{(1,1)}} \lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s}\phi(w)dw \\ &+ \int_{\Omega^{(0,2)}} \lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s}\phi(w)dw)\end{aligned} \tag{36}$$

と書ける．ここで，それぞれ $\Omega^{(2,0)}, \Omega^{(1,1)}, \Omega^{(0,2)}$ における $\lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s}$ の値を求める．はじめに，$\Omega^{(2,0)}$ における $\lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s}$ の値を求める．$w \in \Omega^{(2,0)}$ であるので，w には正の固有値 λ_1, λ_2 が存在する．対称行列は適当な直交行列 Q によって対角化することができるので，

$$Q^{-1}wQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

が成立する．このことを用いると，

$$(\det(2\pi(t-iw)))^{-s} = (2\pi)^2 \det\begin{pmatrix} t-i\lambda_1 & 0 \\ 0 & t-i\lambda_2 \end{pmatrix} = ((2\pi)^2(t-i\lambda_1)(t-i\lambda_2))^{-s}$$

となる．ここで，$\theta(t) = \arg(t-i\lambda_1)(t-\lambda_2)$ とおくと，$t \downarrow 0$ のとき，$\theta(t) \to -\pi$ となることから，

$$\begin{aligned}((2\pi)^2(t-i\lambda_1)(t-i\lambda_2))^{-s} &= \exp\Big(-s\big(\log\{(2\pi)^2\sqrt{(t-i\lambda_1)(t-i\lambda_2)}\} + i\theta(t)\big)\Big) \\ &= (2\pi)^{-2s}(t^2+\lambda_1)^{-\frac{s}{2}}(t^2+\lambda_2)^{-\frac{s}{2}}\exp(-is\theta(t)) \\ &\longrightarrow (2\pi)^{-2s}(\lambda_1\lambda_2)^{-\frac{s}{2}}\exp(-is(-\pi)) \quad (t\downarrow 0) \\ &= (4\pi^2)^{-s}|\det w|^{-s}\exp(is\pi)\end{aligned}$$

となり，

$$\lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s} = (4\pi^2)^{-2s}|\det w|^{-s}\exp(is\pi) \tag{37}$$

が成立する．同様にして $\Omega^{(0,2)}, \Omega^{(1,1)}$ における $\lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s}$ の値を計算すると，

$$\lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s} = \begin{cases}(4\pi^2)^{-s}|\det w|^{-s}\exp(is\pi) & (w\in\Omega^{(2,0)}) \\ (4\pi^2)^{-s}|\det w|^{-s}\exp(-is\pi) & (w\in\Omega^{(0,2)}) \\ (4\pi^2)^{-s}|\det w|^{-s} & (w\in\Omega^{(1,1)})\end{cases} \tag{38}$$

となる．ここで，積分 $\int_{\Omega^{(2,0)}} \lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s}\phi(w)dw$ に (37) を代入すると，

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^{(2,0)}} \lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s}\phi(w)dw &= \int_{\Omega^{(2,0)}} (4\pi^2)^{-2s}|\det w|^{-s}\exp(is\pi)\phi(w)dw \\
&= (4\pi^2)^{-2s}\exp(is\pi)\Gamma_\Omega\left(-s+\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}\int_{\Omega^{(2,0)}}|\det w|^{(-s+\frac{3}{2})-\frac{3}{2}}\phi(w)dw \\
&= \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s}e^{\pi is}R^{(2,0)}_{-s+\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

を得る．同様にして

$$\int_{\Omega^{(0,2)}} \lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s}\phi(w)dw = \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s}e^{-\pi is}R^{(0,2)}_{-s+\frac{3}{2}}$$

$$\int_{\Omega^{(1,1)}} \lim_{t\downarrow 0}(\det(2\pi(t-iw)))^{-s}\phi(w)dw = \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s}R^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}}$$

と計算でき，(36) に代入することで (34) を得る．(35) も同様にして証明できる． □

4.5 $R_s^{(1,1)}$ のフーリエ変換公式

定理 28 および定理 30 から，$R_s^{(2,0)}, R_s^{(0,2)}$ のフーリエ変換を極限と積分を用いて表せることがわかり，さらに $\widehat{R}_s^{(2,0)}, \widehat{R}_s^{(0,2)}$ は，$R_s^{(p,q)}$ たちの一次結合で表すこともできる．この事実とフーリエ逆変換公式を用いれば $R_s^{(1,1)}$ のフーリエ変換を求めることができる．

定理 32 ($R_s^{(1,1)}$ のフーリエ変換)**.** $R_s^{(1,1)}$ のフーリエ変換 $\widehat{R}_s^{(1,1)}$ は

$$\widehat{R}_s^{(1,1)} = 2\sin\pi s\,\frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s}\,R^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}} \tag{39}$$

と表せる．

Proof. はじめに，$R_s^{(2,0)}$ のフーリエ変換を 2 度行ったものを求める．

補題 33.

$$\widehat{\widehat{R}}_s^{(2,0)} = \frac{1}{2}R_s^{(0,2)}$$

Proof. 超関数のフーリエ変換の定義より，

$$\widehat{\widehat{R}}_s^{(2,0)}(\phi) = \widehat{R}_s^{(2,0)}(\check{\phi}) = R_s^{(2,0)}((\check{\phi})^\vee)$$

となる．$(\overset{\vee}{\phi})^{\vee}$ は，

$$\begin{aligned}
(\overset{\vee}{\phi})^{\vee}(z) &= \int_V e^{2\pi i \mathrm{Tr} z w_1} \left\{ \int_V e^{2\pi i \mathrm{Tr} w_1 w_2} \phi(w_2) dw_2 \right\} dw_1 \\
&= \int_V e^{-2\pi i \mathrm{Tr}(-z) w_1} \left\{ \int_V e^{2\pi i \mathrm{Tr} w_1 w_2} \phi(w_2) dw_2 \right\} dw_1 \\
&= (\overset{\vee}{\phi})^{\wedge}(-z) = \frac{1}{2}\phi(-z).
\end{aligned}$$

$-z = w$ とおくと，$w \in \Omega^{(0,2)}$ であるので，

$$\begin{aligned}
R_s^{(2,0)}((\overset{\vee}{\phi})^{\vee}) &= \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)} \int_{\Omega^{(2,0)}} (\overset{\vee}{\phi})^{\vee}(z)(\det z)^{s-\frac{3}{2}} dz \\
&= \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)} \int_{\Omega^{(2,0)}} \frac{1}{2}\phi(-z)(\det z)^{s-\frac{3}{2}} dz \\
&= \frac{1}{2\Gamma_\Omega(s)} \int_{\Omega^{(0,2)}} \phi(w)(\det(-w))^{s-\frac{3}{2}} dw \\
&= \frac{1}{2\Gamma_\Omega(s)} \int_{\Omega^{(0,2)}} \phi(w)(\det w)^{s-\frac{3}{2}} dw = \frac{1}{2} R_s^{(0,2)}(\phi)
\end{aligned}$$

と計算できる． □

定理 31 の式 (34) の両辺をもう一度フーリエ変換する．補題 33 より，

$$\frac{1}{2} R_s^{(0,2)} = \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s} \left\{ e^{\pi i s} \widehat{R}^{(2,0)}_{-s+\frac{3}{2}} + \widehat{R}^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}} + e^{-\pi i s} \widehat{R}^{(0,2)}_{-s+\frac{3}{2}}. \right\}. \tag{40}$$

最初の項 $e^{\pi i s}\widehat{R}^{(2,0)}_{-s+\frac{3}{2}}$ は式 (34) より

$$\begin{aligned}
e^{\pi i s} \widehat{R}_{-s+\frac{3}{2}} &= e^{\pi i s} \frac{\Gamma_\Omega(s)}{(4\pi^2)^{-s+\frac{3}{2}}} \left\{ e^{\pi i(-s+\frac{3}{2})} R_s^{(2,0)} + R_s^{(1,1)} + e^{-\pi i(-s+\frac{3}{2})} R_s^{(0,2)} \right\} \\
&= \frac{\Gamma_\Omega(s)}{(4\pi^2)^{-s+\frac{3}{2}}} \left\{ e^{\frac{3}{2}\pi i} R_s^{(2,0)} + e^{\pi i s} R_s^{(1,1)} + e^{\pi i(2s-\frac{3}{2})} R_s^{(0,2)} \right\} \\
&= \frac{\Gamma_\Omega(s)}{(4\pi^2)^{-s+\frac{3}{2}}} \left\{ -i R_s^{(2,0)} + e^{\pi i s} R_s^{(1,1)} + i e^{2\pi i s} R_s^{(0,2)} \right\}
\end{aligned}$$

と計算できる．$e^{-\pi i s}\widehat{R}^{(0,2)}_{-s+\frac{3}{2}}$ も式 (35) を用いて同様に計算すると

$$e^{-\pi i s} \widehat{R}^{(2,0)}_{-s+\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma_\Omega(s)}{(4\pi^2)^{-s+\frac{3}{2}}} \left\{ +i R_s^{(2,0)} + e^{-\pi i s} R_s^{(1,1)} - i e^{-2\pi i s} R_s^{(0,2)} \right\}$$

である．これを式 (40) に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}R_s^{(0,2)} &= \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s}\widehat{R}^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}} \\ &\quad + \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})\Gamma_\Omega(s)}{(4\pi^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{2\cos\pi s\, R_s^{(1,1)} - 2\sin 2\pi s\, R_s^{(0,2)}\right\}. \end{aligned} \tag{41}$$

そこで $\Gamma_\Omega\left(-s+\frac{3}{2}\right)\Gamma_\Omega(s)$ を計算する．Γ 関数の公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{42}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}\Gamma_\Omega\left(-s+\frac{3}{2}\right)\Gamma_\Omega(s) &= \pi\Gamma\left(-s+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-s+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma(s)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) \\ &= \pi\Gamma(s)\Gamma(1-s)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-(s-\frac{1}{2})\right) \\ &= \pi\left(\frac{\pi}{\sin\pi s}\right)\left(\frac{\pi}{\sin\pi(s-\frac{1}{2})}\right) \\ &= -\frac{\pi^3}{\sin\pi s\cos\pi s} = -\frac{2\pi^3}{\sin 2\pi s}.\end{aligned}$$

これを (41) に代入すると，

$$\frac{1}{2}R_s^{(0,2)} = \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s}\widehat{R}^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sin\pi s}R_s^{(1,1)} + \frac{1}{2}R_s^{(0,2)} \tag{43}$$

よって (43) の式を整理すると，

$$\widehat{R}^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}} = \frac{(4\pi)^s}{2\sin\pi s\,\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}\,R_s^{(1,1)} \tag{44}$$

となる． これを $\widehat{R}_s^{(1,1)}$ について解くと，(39) を得る． □

5 まとめ

主結果を以下にまとめる．

主結果 1. $\mathbb{R}$ 上の Riesz 超関数のフーリエ変換は任意の $s\in\mathbb{C}$ に対して

$$\widehat{R}_s^+ = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^s}\left(e^{\frac{\pi}{2}is}R_{1-s}^+ + e^{-\frac{\pi}{2}is}R_{1-s}^-\right)$$

と Riesz 超関数の一次結合で表される．

主結果 2. $\Omega_{(p,q)}$ 上の Riesz 超関数 $R_s^{(p,q)}$ のフーリエ変換は任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_s^{(2,0)} &= \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s}\left\{e^{\pi is}R^{(2,0)}_{-s+\frac{3}{2}} + R^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}} + e^{-\pi is}R^{(0,2)}_{-s+\frac{3}{2}}\right\} \\
\widehat{R}_s^{(0,2)} &= \frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s}\left\{e^{-\pi is}R^{(2,0)}_{-s+\frac{3}{2}} + R^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}} + e^{\pi is}R^{(0,2)}_{-s+\frac{3}{2}}\right\} \\
\widehat{R}_s^{(1,1)} &= 2\sin\pi s\frac{\Gamma_\Omega(-s+\frac{3}{2})}{(4\pi^2)^s}R^{(1,1)}_{-s+\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

のようにやはり Riesz 超関数の一次結合に表される．

主結果 3. Riesz 超関数は $s = \frac{1}{2}$ において，

$$R^{(2,0)}_{\frac{1}{2}}(\phi) = \frac{2}{\pi}\int_{\Omega_+^{(1,0)}} \phi(z)\, d\sigma(z)$$

のように退化し，$R^{(2,0)}_{\frac{1}{2}-k} \quad (k \in \mathbb{N})$ の台は $\overline{\Omega_+^{(1,0)}}$ に含まれる．また，$R_0 = \delta_0$ であり，$R^{(2,0)}_{-k}$ の台は原点 $\{0\}$ 上にある．

参考文献

[1] D.C.Champeney, “A Handbook of Fourier Theorems”, Cambridge University Press, 1987.

[2] Jacques Faraut and Adam Koranyi, “Analysis on Symmetric Cones”, Clarendon Press, 1994.

[3] Roger Howe and Eng Chye Tan, ”Non-Abelian Harmonic Analysis applications of $SL(2,\mathbb{R})$”, Springer-Verlag, 1992.

[4] Masakazu Muro, Microlocal Analysis and Calculations on Some Relatively Invariant Hyperfunctions Related to Zeta Functions Associated with the Vector Spaces of Quadratic Forms, Publ.RIMS,Kyoto Univ. 22, 395–463, 1986.

[5] Sato, M. and Shintani, T., On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math., 100 (1974), 13–170.

[6] 伊藤清三，「Lebesgue 積分入門」，裳華房，1963.

[7] 吉田耕作・河田敬義・岩村聯，「位相解析の基礎」，岩波書店，1960.

謝辞

　本論文を作成するにあたり，指導教官の西山享教授から，どんなときにも丁寧かつ熱心にご指導を賜りました．ここに深謝の意を表します．
谷口健二教授，松本裕行教授には副査としてご助言を戴きましたので，感謝の意を表します．
研究室の同期である萩原君，山本君，他研究室の院生の同期である石井君，鈴木君，山下君のおかげで，とても楽しい学校生活を送ることができました．
最後に，あらゆる面で支えてくれた家族に感謝の意を表して，謝辞と代えさせて頂きます．