

Casey の定理と 4 円の配置問題

青山学院大学院 理工学研究科 理工学専攻
西山研究室

35616014 山本 義也

2018 年 3 月 2 日

目次

1	序	3
2	\mathbb{R}^2 上の Euler-Ptolemy の定理、Casey の定理と行列式による定式化	5
2.1	Ptolemy の定理とその行列式表示	5
2.2	EPD 定理の証明 ($\det P$ の因数分解)	6
2.3	Cayley-Menger 行列式	10
2.4	斉次座標と射影変換と Euler-Ptolemy の定理	11
2.5	定理 8 の証明 (射影変換と円円対応)	12
3	4 点の配置問題	16
3.1	Casey の定理とその行列式表示	16
4	双曲面上の Ptolemy の定理, Casey の定理と行列式による定式化	19
4.1	双曲面上の Ptolemy の定理と行列式による定式化	19
4.2	単位円板モデル \mathbb{D} と \mathbb{D} 上の双曲距離	20
4.3	双曲面上の Casey の定理とその行列式表示	24
5	結論と今後の課題	26

1 序

双曲幾何学を勉強している中で、「双曲面上の Casey の定理」にであった ([7]) .

ユークリッド幾何学の定理としての Casey の定理は, 1857 年に John Casey が定式化したもので ([4]), 定理の主張は, Casey の定理は図 1 のように 4 円が一つの円に内接しているとき, 2 円 O_i, O_j における共通外接線の長さを t_{ij} とすると,

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$$

が成り立つというものである. Casey の定理は同じくユークリッド幾何の Ptolemy の定理の一般化であり, 証明は Ptolemy の定理を用いるのが普通である.

Ptolemy の定理は, ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 上の円 O に内接する図 2 のような四角形 $ABCD$ に対して, \overline{AB} を線分 AB の長さとする, $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ が成り立つという定理であるが, Casey の定理において半径を 0 に退化させたものとみなせる.

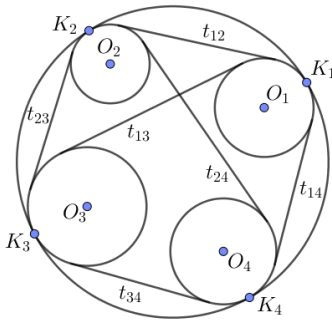


図 1

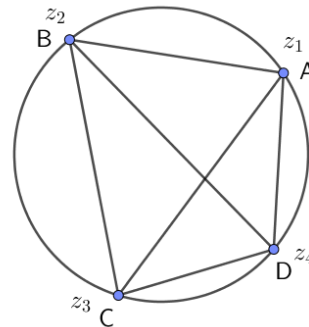


図 2

Ptolemy の定理には逆が成立し, それは Euler-Ptolemy の定理と呼ばれる. これら, ユークリッド幾何の定理双曲幾何に一般化したものが冒頭に触れた双曲版の Casey の定理である (定理 25 参照). Ptolemy の定理や Casey の定理は平面上 (または双曲面上) の点や円の配置問題と捉えることもできるが, この観点から定理を眺めると, 条件を座標の代数方程式で書き表すことが望ましい. 実はこのような方程式は距離の二乗を成分に持つ行列式で書き表されることが知られているが, 本論文ではそのような代数方程式による 4 点や 4 円の配置問題として Ptolemy の定理および Casey の定理を定式化し, その証明を主に二通りの方法で与える.

新しいタイプの行列式（代数方程式）があり，それは本論文で報告する．定理の主張は本文中の定理 2，定理 15 などを参照してもらおうこととして，ここではここでは Ptolemy の定理の行列式を用いた定式化について記す．定理の主張は $\det P$ の因数分解によるものと，射影変換を用いた幾何的な考察によるものがある．

2 \mathbb{R}^2 上の Euler-Ptolemy の定理、Casey の定理と行列式による定式化

この章では、まず Euler-Ptolemy の定理と行列式を用いた定式化について紹介する。定式化は 2 の手法で行い、一つ目としては $\det P$ の因数分解と Euler-Ptolemy の定理を用いる方法である。 $\det P$ の類似の行列式として Cayley-Menger 行列式があるので、それについても紹介する。二つ目としては射影直線 \mathbb{P}^1 上の点 p の斉次座標と射影変換を用いる方法である。それにあたり導入として、射影直線と斉次座標についても述べる。そして Euler-Ptolemy の定理を定式化したのち、Ptolemy の定理の一般化として Casey の定理と行列式を用いた定式化を紹介する。

そこで、Ptolemy の定理を通常の初等幾何の言葉で述べておこう。

2.1 Ptolemy の定理とその行列式表示

定理 1 (Ptolemy の定理). ユークリッド平面 \mathbb{R}^2 上の円 O に内接する図 3 のような四角形 $ABCD$ に対して、

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{DA} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

が成り立つ。ここで \overline{AB} は線分 AB の長さを表す。

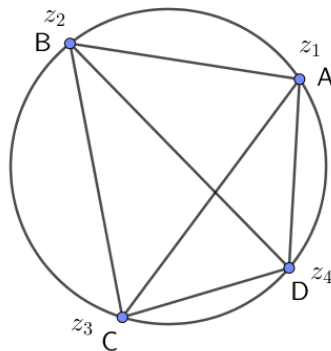


図 3 Ptolemy の定理

この定理は逆も成立し、それは Euler-Ptolemy の定理と呼ばれている。次に Euler-Ptolemy の定理を行列式を用いて述べる (Euler-Ptolemy の定理の行列式版であるが、

長いので以降 EPD 定理と記すこともある)。この行列式表示は T.Kubota([10]), J.E. Valentine([8]) の論文に現れ, 松田能文先生に紹介していただいた長谷川浩司氏の教科書 ([3, p. 198]) にも記載がある。

定理 2 (Euler-Ptolemy の定理の行列式版 : EPD 定理). 平面 \mathbb{R}^2 上の相異なる 4 点を p_1, p_2, p_3, p_4 とし, 2 点間の距離を $D_{ij} = \overline{p_i p_j}$ と書いて, 行列 P を

$$P = (|D_{ij}|^2)_{1 \leq i, j \leq 4} = \begin{pmatrix} 0 & D_{12}^2 & D_{13}^2 & D_{14}^2 \\ D_{12}^2 & 0 & D_{23}^2 & D_{24}^2 \\ D_{13}^2 & D_{23}^2 & 0 & D_{34}^2 \\ D_{14}^2 & D_{24}^2 & D_{34}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義する。このとき 4 点 $p_1 \sim p_4$ が同一円周上または直線上にあることと,

$$\det P = 0$$

が成り立つことは同値である。

今後定理の条件のように「同一円周上または直線上」に点が存在することを「同一円上の点」と表記する。

2.2 EPD 定理の証明 ($\det P$ の因数分解)

定理 3. d_{ij} を不定元とし, $d_{ij} = 0, d_{ij} = d_{ji}$ と規約する。4 正方次行列 P を $P = (d_{ij}^2)_{1 \leq i, j \leq 4}$ と定義し, T_i ($i = 1, 2, 3, 4$) を

$$T_1 = d_{12}d_{34} + d_{13}d_{24} - d_{14}d_{23} \quad (1)$$

$$T_2 = -d_{12}d_{34} + d_{13}d_{24} - d_{14}d_{23} \quad (2)$$

$$T_3 = d_{12}d_{34} + d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23} \quad (3)$$

$$T_4 = -d_{12}d_{34} + d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23} \quad (4)$$

とおくと, $\det P = T_1 T_2 T_3 T_4$ と因数分解できる。

Proof. この定理を示すために用いる補題を述べる。

補題 4. A, B, C, D を n 次正方行列で, A は正則とする。 A の余因子行列を \tilde{A} と書くと,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|^{n-1}} \left| |A| \cdot D - C \tilde{A} B \right|$$

が成り立つ。

Proof. 次のように行列を分解することを考える .

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX \\ C & CX+Y \end{pmatrix}$$

とおくと , $X = A^{-1}B, Y = D - CX = D - CA^{-1}B$ となる . よって

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \\ &= |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = \frac{1}{|A|^{n-1}} \left| |A| \cdot D - C\tilde{A}B \right| \end{aligned}$$

である .

□

定理 3 の証明に戻る . $d_{ij}^2 = t_{ij}$ とおき $\det P$ を

$$\det P = \begin{vmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & 0 & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{13} & t_{14} & 0 & t_{12} \\ t_{23} & t_{24} & t_{21} & 0 \\ 0 & t_{34} & t_{31} & t_{32} \\ t_{43} & 0 & t_{41} & t_{42} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

と書く . 補題 4 より $\det P$ は

$$\det P = \frac{1}{|A|} \left| |A| \cdot D - C\tilde{A}B \right|$$

と書き直すことができる .

$$|A| \cdot D = |A| \begin{pmatrix} t_{31} & t_{32} \\ t_{41} & t_{42} \end{pmatrix}$$

であり ,

$$\begin{aligned} C\tilde{A}B &= \begin{pmatrix} 0 & t_{34} \\ t_{34} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{24} & -t_{14} \\ -t_{23} & t_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ t_{12} & 0 \end{pmatrix} \\ &= t_{12}t_{34} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{24} & -t_{14} \\ -t_{23} & t_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= t_{12}t_{34} \begin{pmatrix} t_{13} & -t_{23} \\ -t_{14} & t_{24} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので , $|A| \cdot D - C\tilde{A}B$ の部分は

$$\begin{aligned} |A| \cdot D - C\tilde{A}B &= \begin{vmatrix} (|A| - t_{12}t_{34})t_{13} & (|A| + t_{12}t_{34})t_{23} \\ (|A| + t_{12}t_{34})t_{14} & (|A| - t_{12}t_{34})t_{24} \end{vmatrix} \\ &= (|A| - t_{12}t_{34})^2 t_{13}t_{24} - (|A| + t_{12}t_{34})^2 t_{14}t_{23} \end{aligned} \tag{5}$$

$t_{ij} = d_{ij}^2$ だったから d_{ij}^2 を用いて 5 式を,

$$\begin{aligned}
(5) &= (|A| - t_{12}t_{34})^2 d_{13}d_{24} - (|A| + t_{12}t_{34})^2 d_{14}d_{23} \\
&= \left((|A| - t_{12}t_{34})d_{13}d_{24} - (|A| + t_{12}t_{34})d_{14}d_{23} \right) \\
&\quad \times \left((|A| - t_{12}t_{34})d_{13}d_{24} + (|A| + t_{12}t_{34})d_{14}d_{23} \right) \tag{6}
\end{aligned}$$

と表す．因数分解した前半の因数 $\left((|A| - t_{12}t_{34})d_{13}d_{24} - (|A| + t_{12}t_{34})d_{14}d_{23} \right)$ を ① とおくと,

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} &= |A|(d_{13}d_{24} - d_{14}d_{23}) - t_{12}t_{34}(d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23}) \\
&= |A| \begin{vmatrix} d_{13} & d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} - t_{12}t_{34} \begin{vmatrix} d_{13} & -d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} \tag{7}
\end{aligned}$$

となる．ここで $|A|$ は,

$$\begin{aligned}
|A| &= t_{13}t_{24} - t_{23}t_{14} \\
&= (d_{13}d_{24})^2 - (d_{23}d_{14})^2 \\
&= (d_{13}d_{24} + d_{23}d_{14})(d_{13}d_{24} - d_{23}d_{14}) \\
&= \begin{vmatrix} d_{13} & -d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{13} & d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

と書けるので、(7) 式は,

$$\begin{aligned}
(7) \text{ 式} &= \begin{vmatrix} d_{13} & -d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} \left(\begin{vmatrix} d_{13} & d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix}^2 - t_{12}t_{34} \right) \\
&= \begin{vmatrix} d_{13} & -d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} \left(\begin{vmatrix} d_{13} & d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} + d_{12}d_{34} \right) \left(\begin{vmatrix} d_{13} & d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} - d_{12}d_{34} \right) \tag{8}
\end{aligned}$$

となる．同様にして、(6) 式の後半もなおすと,

$$\begin{vmatrix} d_{13} & d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} \left(\begin{vmatrix} d_{13} & -d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} + d_{12}d_{34} \right) \left(\begin{vmatrix} d_{13} & -d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} - d_{12}d_{34} \right) \tag{9}$$

と書ける．(8), (9) 式の括弧の中身をそれぞれ T_i を用いて,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} d_{13} & d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} + d_{12}d_{34} &= T_1, & \begin{vmatrix} d_{13} & d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} - d_{12}d_{34} &= T_2, \\
\begin{vmatrix} d_{13} & -d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} + d_{12}d_{34} &= T_3, & \begin{vmatrix} d_{13} & -d_{23} \\ d_{14} & d_{24} \end{vmatrix} - d_{12}d_{34} &= T_4
\end{aligned}$$

のように表される．よって $\det P$ は

$$\det P = T_1 T_2 T_3 T_4$$

と因数分解できる． □

行列式 $\det P$ の因数分解は参考文献の [11] に記載されている．両辺を展開すると等しいことはすぐにわかるが，因数分解を概念的に理解するために，ここではあえてこのような形で証明した．

定理 2 の証明：定理 3 の d_{ij} を 2 点間の距離 D_{ij} と考えると，定理 3 の (1), (2), (4) 式は Ptolemy の定理の関係式になっていることがわかる．また定理 3 より

$$\det P = 0 \iff T_1 T_2 T_3 T_4 = 0$$

が言える．ここで $p_1 \sim p_4$ は相異なる 4 点としたので $T_3 > 0$ である．(1), (2), (4) 式の関係式が成り立つとき，点の配置を図に表すと以下のようになることがわかる．

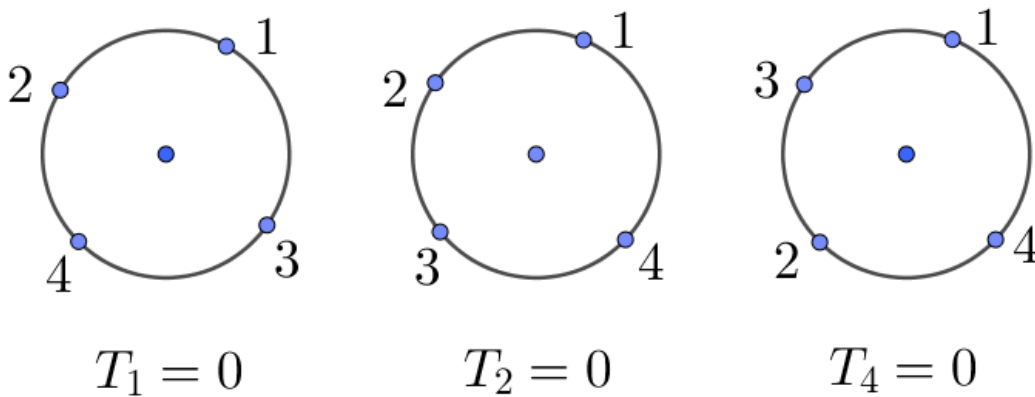


図 4 $T_1 = 0, T_2 = 0, T_4 = 0$ の配置図

よって Euler-Ptolemy の定理を用いると，相異なる 4 点が同一円上にあることと， $\det P = 0$ が成り立つことが同値である．これで定理 2 の証明が終わった．

2.3 Cayley-Menger 行列式

前節の行列式 $\det P$ と類似の行列式があるので,ここで紹介する. $d_{ij} : (0 \leq i < j \leq n)$ を不定元とし, $\frac{n(n+1)}{2}$ 変数からなる以下のような $(n+2)$ 次の正方行列を考える.

$$CM_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \cdots & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \cdots & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \cdots & d_{2n}^2 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_n := \det(CM_n) \in \mathbb{Z} [d_{01}, d_{02}, \dots, d_{(n-1)n}]$$

この Γ_n を Cayley-Menger 行列式と呼ぶ (例えば [11] 参照).

定理 5. n 次元単体の体積と Γ_n には関係式が存在する. \mathbb{R}^n 上の $(n+1)$ 点 p_0, p_1, \dots, p_n をとり, 2点間の距離を δ_{ij} ($0 \leq i < j \leq n$), p_0, p_1, \dots, p_n の凸包である n 次元単体を S とする. このとき

$$(-1)^{n+1} 2^n (n!)^2 \text{Vol}_n(S)^2 = \Gamma_n(\delta_{01}, \delta_{02}, \dots, \delta_{(n-1)n}) \quad (10)$$

が成り立つ.

Proof. p_i ($1 \leq i \leq n+1$) を n 次元の縦ベクトルとし, r_i^2 を p_i の長さの二乗とする. Cayley-Menger 行列式は

$$\Gamma_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1^2 & {}^t p_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n+1}^2 & {}^t p_{n+1} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -2{}^t p_1 & \cdots & -2p_{n+1} \\ 1 & r_2^2 & \cdots & r_{n+1}^2 \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B$$

と書くことができる. V を平行 $2n$ 面体の体積とすると,

$$\det A = |V^n|,$$

$$\det B = (-1)^{n+1} 2^n |V^n|$$

となる. $|V^n| = n! |\text{Vol}_n(S)|$ より,

$$(-1)^{n+1} 2^n (n!)^2 \text{Vol}_n(S)^2 = \Gamma_n(\delta_{01}, \delta_{02}, \dots, \delta_{(n-1)n})$$

が示せた. □

$\Gamma_n = 0$ と $n + 1$ 点が同一超平面上に存在することは同値である． Γ_n は $n = 2$ のとき，

$$-\Gamma_2(a, b, c) = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

と因数分解する．この因数分解はまさに，定理 3 の $d_{1i} = 1$ としたものである．この式は初等幾何でも有名なヘロンの公式になっている．3 辺の長さが a, b, c である三角形 (2 次元単体) の面積を A とすると，

$$16A^2 = -\Gamma_2(a, b, c) = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

となる．

$n \geq 3$ のときは， Γ_n は因数分解することはできず，既約多項式になることが知られている ([11])． $n = 3$ の場合， Γ_3 は 3 次元単体の体積の定数倍になる．例えば一辺の長さが 1 の正四面体を考えると，その体積は $\frac{\sqrt{2}}{12}$ であり，(10) 式より

$$\frac{\Gamma_3(1, 1, 1, 1)}{(-1)^4 2^3 (3!)^2} = \frac{1}{72}$$

となるので，確かに正四面体の体積の 2 乗に一致している．

次節以降では，射影直線 \mathbb{P}^1 上の点 p の斉次座標を導入し，EPD 定理 (2) を証明する．ここでは射影変換を用い，射影直線 \mathbb{P}^1 上の 4 点を特別な場合に帰着することが重要である．定式化にあたり射影直線とリーマン球面について紹介し，斉次座標について述べたい．

2.4 斉次座標と射影変換と Euler-Ptolemy の定理

定義 6 (射影直線)．複素射影空間 $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は $(n + 1)$ 個の複素数 $(z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) \neq 0$ の連比の空間である．連比を $[z_0 : z_1 : \dots : z_n]$ と書き，

$$[z_0 : z_1 : \dots : z_n] = [\alpha z_0 : \alpha z_1 : \dots : \alpha z_n] \quad (\alpha \in \mathbb{C}^\times)$$

と同一視する．連比の全体 \mathbb{P}^n を n 次元 (複素) 射影空間といい，特に \mathbb{P}^1 のときこれを射影直線と呼ぶ．

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z_0 : z_1] \mid (z_0, z_1) \neq 0\}$$

ちなみに射影直線のことをリーマン球面ともいい， $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ のように無限遠点 $\infty = [1 : 0]$ を \mathbb{C} に追加して表す．このとき $z \in \mathbb{C}$ は $[z : 1]$ と同一視されている．

定義 7 (斉次座標). \mathbb{P}^1 の点 $p = [z_0 : z_1]$ は連比によって決まっている. このとき z_0, z_1 を p の斉次座標と呼ぶ.

ここから射影直線上の点 p の斉次座標と射影変換を用いて, Euler-Ptolemy の定理を行列表を用いて定式化する

2×4 行列の全体を $M_{2,4}^\circ$ と書いて, $M_{2,4}^\circ = \{(v_1, \dots, v_4) \in M_{2,4} \mid \det(v_i, v_j) \neq 0\}$ とおく. また, v_i, v_j に対して $D_{ij} = \det(v_i, v_j)$ と書く. これを用いて $P = (|D_{ij}|^2)_{1 \leq i, j \leq 4}$ と定義する. なお, $\{\det(v_i, v_j) \neq 0\}$ は射影直線上の点 $[v_i]$ と $[v_j]$ が相異なることを意味する.

定理 8. 射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の相異なる 4 点 $([v_1], \dots, [v_4])$ が同一円上にあることと,

$$\det P = 0$$

が成り立つことは同値である.

2.5 定理 8 の証明 (射影変換と円円対応)

証明では円円対応を用いるため, 先に準備をする. $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ への写像として一次分数変換があるが, 円円対応とは, 一次分数変換によって \mathbb{C} 上の円は, 写った先も円であるという定理である (参考文献 [1], [5] より).

定義 9 (一次分数変換). 写像 $\Phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ が一次分数変換であるとは, $ad - bc \neq 0$ であるような複素数 a, b, c, d が存在し, Φ が以下のような一次式の商で表されることを示す.

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & z \neq \infty, cz + d \neq 0 \\ \infty & \begin{cases} z \neq \infty, cz + d = 0 \\ z = \infty, a \neq 0, c = 0 \end{cases} \\ \frac{a}{c} & z = \infty, a \neq 0, c \neq 0 \end{cases}$$

定理 10 (円円対応). 複素平面上の円または直線は, 一次分数変換 $\Phi(z)$ によって再び円または直線に写る

この円円対応と射影変換を用いて定理 8 を証明しよう.

Proof. [定理 8 の証明] $(v_1, v_2, v_3, v_4) = V$ に対し, $P = P(V)$ と書く. この行列に左か

ら GL_2 の元 g , 右から $(GL_1)^4$ の元 t を作用させたものを考える .

$$gVt = (gv_1, gv_2, gv_3, gv_4) \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & t_3 & \\ & & & t_4 \end{pmatrix} = (gv_1t_1, gv_2t_2, gv_3t_3, gv_4t_4)$$

ここで $\widetilde{D}_{ij} = \det(gv_it_i, gv_jt_j)$ とおくと ,

$$\widetilde{D}_{ij} = \det g \cdot \det(v_i, v_j) \cdot t_i \cdot t_j$$

となり ,

$$\begin{aligned} \det(|\widetilde{D}_{ij}|^2) &= |\det g|^8 \begin{vmatrix} 0 & |t_1t_2|^2|D_{12}|^2 & |t_1t_3|^2|D_{13}|^2 & |t_1t_4|^2|D_{14}|^2 \\ |t_2t_1|^2|D_{21}|^2 & 0 & |t_2t_3|^2|D_{23}|^2 & |t_2t_4|^2|D_{24}|^2 \\ |t_3t_1|^2|D_{31}|^2 & |t_3t_2|^2|D_{32}|^2 & 0 & |t_3t_4|^2|D_{34}|^2 \\ |t_4t_1|^2|D_{41}|^2 & |t_4t_2|^2|D_{42}|^2 & |t_4t_3|^2|D_{43}|^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= |\det g|^8 (|t_1|^2|t_2|^2|t_3|^2|t_4|^2)^2 \det(|D_{ij}|^2) \end{aligned}$$

ここで $\det g \neq 0$, $t_i \neq 0$ ($1 \leq i \leq 4$) だから , $\det P(V) = 0 \iff \det P(gVt) = 0$ ができる . ここから射影変換により特別な点配置に帰着する . $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ として , $v_i = (\alpha_i, \beta_i)$ ($1 \leq i \leq 4$) とおく . よって V は

$$V = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \right)$$

と書きなおせる . $h = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \in GL_2$ とおき , V に h を左から作用させると ,

$$h \cdot V = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha'_3 \\ \beta'_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha'_4 \\ \beta'_4 \end{pmatrix} \right)$$

である . ここで $\alpha'_3, \beta'_3 \neq 0$ に注意する . 例えば $\begin{pmatrix} 1 & \alpha'_3 \\ 0 & \beta'_3 \end{pmatrix}$ を考えると ,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha'_3 \\ 0 & \beta'_3 \end{pmatrix} = (hv_1, hv_3) = h(v_1, v_3)$$

である . よって行列式をとると

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha'_3 \\ 0 & \beta'_3 \end{vmatrix} = \beta'_3 = \det h \cdot \det(v_1, v_3)$$

となる．ここで $h \in GL_2$ より $\det h \neq 0$, $\det(v_1, v_3) \neq 0$ なので , $\beta'_3 \neq 0$ がわかる (α'_3 も同様) . よって $h' = \begin{pmatrix} \alpha'_3 & 0 \\ 0 & \beta'_3 \end{pmatrix}^{-1}$ とおき , $h \cdot V$ に左から作用させると ,

$$h' \cdot h \cdot V = \left(\begin{pmatrix} 1/\alpha'_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\beta'_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha''_4 \\ \beta''_4 \end{pmatrix} \right)$$

となる . ここで右から $t \in (GL_1)^4$ を作用させると

$$h' \cdot h \cdot V \cdot t = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

と表せる . よって , $GL_2 \times (GL_1)^4$ の作用により $h' \cdot h = g$ とおくことで , V を gVt に置き換えて考えると ,

$$gVt = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

と取ることができる . ここで複素射影変換によって斉次座標を特別な場合に帰着することができた . $\det P(V) = 0 \iff \det P(gVt) = 0$ より

$$\det(|D_{ij}|^2) = 0 \iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & |b|^2 \\ 1 & 0 & 1 & |a|^2 \\ 1 & 1 & 0 & |b-a|^2 \\ |b|^2 & |a|^2 & |b-a|^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

ここで補題 4 より ,

$$\left| \begin{array}{c|c} Z & A \\ \hline {}^tA & 0 \end{array} \right| = -|Z| \det({}^tAZ^{-1}A) \text{ であるから , } Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} , A = \begin{pmatrix} |b|^2 \\ |a|^2 \\ |b-a|^2 \end{pmatrix} , {}^tA = (|b|^2, |a|^2, |b-a|^2) \text{ とおくと ,}$$

$$|Z| = 2,$$

(11) 式の右辺の行列式で ,

$$Z^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である．これより

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{c|c} Z & A \\ \hline {}^tA & 0 \end{array} \right| &= -{}^tA \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} A = (|b|^2, |a|^2, |b-a|^2) \begin{pmatrix} -|b|^2 + |a|^2 + |b-a|^2 \\ |b|^2 - |a|^2 + |b-a|^2 \\ |b|^2 + |a|^2 - |b-a|^2 \end{pmatrix} \\
 &= |a|^4 + |b|^4 - 2|a|^2|b|^2 - 2|b|^2|b-a|^2 - 2|a|^2|b-a|^2 + |b-a|^4 \\
 &= (|a|^2 - |b|^2)^2 - |b-a|^2\{2|b|^2 + 2|a|^2 - |b-a|^2\} \\
 &= (|a|^2 - |b|^2)^2 - |b-a|^2|b+a|^2 \\
 &= \left\{ (|a|^2 - |b|^2) + |b-a||b+a| \right\} \left\{ (|a|^2 - |b|^2) - |b-a||b+a| \right\}
 \end{aligned} \tag{12}$$

よって $\det P = 0 \iff |b+a||b-a| = |a|^2 - |b|^2$ または $|b+a||b-a| = |b|^2 - |a|^2$ である．ここで $b = 0$ とすると gVt の元 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と一致してしまうので、条件 $\det(v_i, v_j) \neq 0$ より不敵．よって $b \neq 0$ である． $w = a/b$ とおくと、 $|b+a||b-a| = |a|^2 - |b|^2$ の場合

$$|1 - w^2| = |w|^2 - 1 \tag{13}$$

である． $|b+a||b-a| = |b|^2 - |a|^2$ の場合は同様にして、

$$|1 - w^2| = 1 - |w|^2 \tag{14}$$

となる．よってこの2式 (13), (14) から w の条件を導く． $w^2 = z$ とおくと (13) 式は、

$$\begin{aligned}
 |1 - z| &= |z| - 1 \\
 |z - 1| + 1 &= |z|
 \end{aligned}$$

となる．三角不等式より $|z| = |(z-1) + 1| \leq |z-1| + 1$ だが、等号成立条件は $0, 1, z$ がこの順で実軸上にあるときである．従って $w^2 = z \in \mathbb{R}$ より、 w は $w \in \mathbb{R}$ または、純虚数であるが $w^2 = z \geq 0$ より $w \in \mathbb{R}$ とわかる．よって

$$gVt = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

の射影直線上の4点をリーマン球面上の点と考えることで、4点は $(\infty, 0, 1, a/b)$ とみなせる． $a/b \in \mathbb{R}$ だから4点は全て実軸上にある．定理 10 より実軸は一次分数変換によって円または直線に写り、4点は一次分数変換によって同一円上に写ると言える．よって4点が同一円上にあることと、 $\det P = 0$ が成り立つことは同値である． \square

3 4点の配置問題

一般に \mathbb{P}^1 上の4点がどのような位置関係にあるのかを方程式や楕円関数，三角関数などを用いて研究する問題を点の配置問題という．この観点から EPD 定理 (2) について考えてみる．4点の座標を (x_i, y_i) ($1 \leq i \leq 4$) とおくと

$$|D_{ij}|^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

のような多項式で書ける．従って，EPD 定理の行列式の数式

$$\det P = \det(|D_{ij}|^2) = \det((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) = 0$$

は座標の多項式による方程式を表している．従って4点が円上にあるための必要十分条件が一つの代数方程式で表せることになり，EPD 定理は4点の配置問題の一種とみなせることがわかる．このような見方から Casey の定理を眺めてみることにする．

3.1 Casey の定理とその行列式表示

定理 11 (Casey 1857). \mathbb{E}^2 上の円 O に内接する4円 O_1, O_2, O_3, O_4 を図5のようにとる．このとき O_i, O_j の共通外接線の長さを t_{ij} とすると，

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$$

が成り立つ．

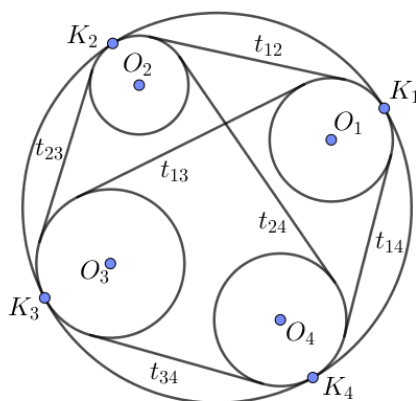


図5 Casey の定理

Casey の定理については 4 円の配置問題の観点から考えたい．つまり Casey の定理を中心の座標や円の半径などを用いて代数方程式の形に表すことを考える．

定理 12 (Casey の定理の行列式表示). \mathbb{E}^2 上の円 O に内接する 4 円 O_1, O_2, O_3, O_4 を図 5 のようにとる． $i \neq j$ のとき O_i, O_j の共通外接線の長さを t_{ij} , $t_{ii} = 0$ とし 4 次正方行列 P を $P = (t_{ij}^2)_{1 \leq i, j \leq 4}$ で定義すると, それには行列式による定式化が定まり,

$$\det P = 0$$

が成り立つ．

Proof. 4 円のうち中心と半径がそれぞれ C_i, C_j, r_i, r_j である 2 円 O_i, O_j を図のようにとる．中心間の距離 $C_i C_j$ を改めて d_{ij} とおく． K_i, K_j は O_i, O_j と外接円との接点である．また外接円 O の中心 C 半径を R , 2 点 K_i, K_j の距離を D_{ij} とす．ここで $R \neq 0, r_i \neq R, r_j \neq R$ に注意する．

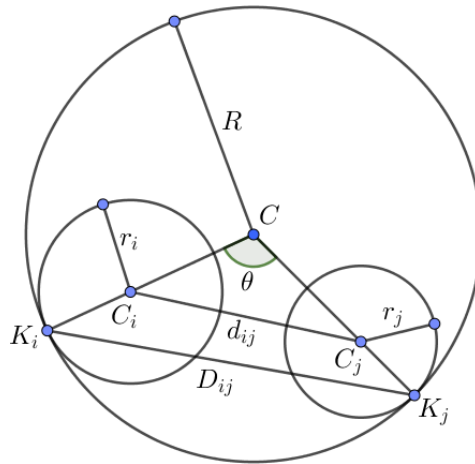


図 6 円 O_i, O_j, O の配置

ここで $\theta = \angle C_i C C_j$ と書くと, 余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{R^2 + R^2 - D_{ij}^2}{2R^2} = \frac{(R - r_i)^2 + (R - r_j)^2 - d_{ij}^2}{2(R - r_i)(R - r_j)}$$

となる．後半の 2 式を変形すると

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2R^2}D_{ij}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{R-r_i}{R-r_j} + \frac{R-r_j}{R-r_i} \right) - \frac{d_{ij}^2}{2(R-r_i)(R-r_j)} \\
\frac{1}{2R^2}D_{ij}^2 &= \left(1 - \frac{R-r_i}{R-r_j} \right) + \left(1 - \frac{R-r_j}{R-r_i} \right) + \frac{d_{ij}^2}{2(R-r_i)(R-r_j)} \\
&= \frac{r_i-r_j}{R-r_j} + \frac{r_j-r_i}{R-r_i} + \frac{d_{ij}^2}{2(R-r_i)(R-r_j)} \\
&= \frac{1}{(R-r_i)(R-r_j)} (d_{ij}^2 - (r_i-r_j)^2)
\end{aligned}$$

となる．ここで $(r_i-r_j)^2 = r_{ij}^2$ とおくと

$$D_{ij}^2 = \frac{R^2}{(R-r_i)(R-r_j)} (d_{ij}^2 - r_{ij}^2) \quad (15)$$

となる．4 接点 $K_1 \sim K_4$ は外接円 O 上にあるから，定理 15 より $\det(D_{ij}^2) = 0$ は成り立つの．(15) 式より

$$\det(D_{ij}^2) = R^8 \cdot \prod_{k=1}^4 \frac{1}{(R-r_k)^2} \cdot \det(d_{ij}^2 - r_{ij}^2)$$

となる．ここで $(d_{ij}^2 - r_{ij}^2) = t_{ij}^2$ なので

$$\det(D_{ij}^2) = 0 \iff \det(t_{ij}^2) = \det P = 0 \quad (16)$$

である．よって 4 円に外接する円が定理の条件下で存在するならば

$$\det P = 0$$

が成り立つことがわかる．

□

この行列式は定理 3 より，因数分解可能でき，元々の Casey の定理の関係式である

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24} \quad (17)$$

が導かれ，上記の行列式表示が Casey の定理と同値関係にあることも即座にわかる (図 6 の位置関係では式 (17) が成立する)．

系 13. 4 円が円 O に内接していれば,

$$(d_{ij}^2 - r_{ij}^2) = 0$$

系では a_{ij}^2 は中心 C_i, C_j の座標の方程式 $r_{ij}^2 = (r_i - r_j)^2$ であったから, 結局 4 円が一つの円に内接するための一つの条件として, 中心の座標および半径の代数方程式が得られたことになる. つまり, Casey の定理は 4 円の配置問題の一つとしてこれで定式化したことになる.

4 双曲面上の Ptolemy の定理, Casey の定理と行列式による定式化

ここまではユークリッド平面 \mathbb{R}^2 上で考えてきたが, この章では §2 の結果を双曲面上へ拡張することを考える. まず双曲面上の Ptolemy の定理とその行列式による定式化について述べよう. ここで紹介する行列式表示は T.Kubota([10]), J.E. Valentine([8]) によって得られたものである. 定式化にあたり, \mathbb{D} 上の測地線, 双曲距離, 等長変換を用いるため, それらを紹介する. さらに双曲面上の Ptolemy の定理を定式化したのち, 双曲面上の Casey の定理へ一般化し, 行列式により定式化する.

4.1 双曲面上の Ptolemy の定理と行列式による定式化

定理 14 (双曲面上の Ptolemy の定理). 双曲面上の円 O に内接する図 7 のような双曲四角形 $ABCD$ を考える. 曲線 AB の双曲距離を $d(A, B)$ と表すと,

$$\sinh \frac{d(A, B)}{2} \sinh \frac{d(C, D)}{2} + \sinh \frac{d(D, A)}{2} \sinh \frac{d(B, C)}{2} = \sinh \frac{d(A, C)}{2} \sinh \frac{d(B, D)}{2}$$

が成り立つ.

ここで \mathbb{R}^2 上と同様, 定理 14 には逆も成り立つ. これを双曲面上の Euler-Ptolemy の定理と呼ぼう. よってここから双曲面上の Euler-Ptolemy の定理を行列式により定式化する.

定理 15 (双曲面上の EPD 定理). 双曲面上の 4 点を p_i ($i = 1, 2, 3, 4$), 2 点の双曲距離を $D_{ij} = d(p_i, p_j)$, とし 4 次元正方行列 P を $P = (|D_{ij}|^2)_{1 \leq i, j \leq 4}$ と定義する. このとき 4 点が同一双曲円上にあることと,

$$\det P = 0$$

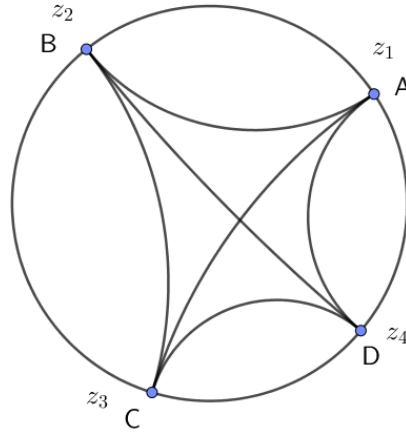


図 7 双曲面上の Ptolemy の定理

が成り立つことは同値である .

定理 15 の行列式表示を導びくために , 私は双曲距離を 2 次元行列式で表し , 定式化 $\det P = 0$ を導いた . そのためには単位円板モデル \mathbb{D} 上の測地線 , 双曲距離 , 等長変換などが必要になる . よってここからは \mathbb{D} 上の測地線 , 双曲距離 , \mathbb{D} 上の等長変換についてまず述べたい ([1]) .

4.2 単位円板モデル \mathbb{D} と \mathbb{D} 上の双曲距離

定義 16. 単位円板を

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

. \mathbb{D} に含まれる曲線 $l : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ に対して , その長さ $\text{Leg}(l)$ を

$$\text{Leg}(l) = \int_a^b \frac{2}{1 - |l(t)|^2} \left| \frac{dl}{dt}(t) \right| dt$$

で定義する . ここで $l(t) = l_1(t) + il_2(t)$ と表されるとき

$$\left| \frac{dl}{dt}(t) \right| = \sqrt{\left(\frac{dl_1}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dl_2}{dt}(t)\right)^2}$$

である . 曲線の長さを用いて , \mathbb{D} 上の 2 点間の距離は

$$d(P, Q) = \inf\{\text{Leg}(l) \mid l : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}, l(a) = P, l(b) = Q\}$$

のように PQ を結ぶ曲線の長さの下限として定義される。

定義 17 (\mathbb{D} 上の測地線). $l: [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ を $P = l(a)$ と $Q = l(b)$ なる曲線とするとき, l が測地線であるとは, l の長さが, P と Q の距離 $d(P, Q)$ に等しいことを指す。

\mathbb{D} 上の等長変換の補題として以下の補題がある。

補題 18. ([1, 2.25]) 一次分数変換 Φ が \mathbb{D} 上の点を \mathbb{D} の点に写せば, Φ は \mathbb{D} から \mathbb{D} への等長変換である。

このような Φ は不定値特殊ユニタリ群の元に対して Φ を対応させ構成することができる。よって不定値特殊ユニタリ群について述べたい。

定義 19 (特殊ユニタリ群). 特殊ユニタリ群 $SU(p, q)$ は $I_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$ とすると,

$$SU(p, q) = \{g \in SL_2(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} I_{p,q} g = I_{p,q}\}$$

と定義される。この中でも今回用いる 2 次不定値特殊ユニタリ群とは

$$\begin{aligned} SU(1, 1) &= \{g \in SL_2(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

となるものをいう。

この $SU(1, 1)$ の元を用いて一次分数変換を作ることで以下の定理が成り立つ。

定理 20 ([2] 演習 9.20). $g \in SU(1, 1)$ をとり, これに対応する一次分数変換を Φ_g とする。このとき Φ_g は単位円板 \mathbb{D} を保ち, D 上の等長変換となっている。

この補題より, 上記の Φ_g は単位円板モデル上の等長変換である。次に \mathbb{D} 上の点 $re^{i\theta}$ と原点との距離は以下の式で計算できることを述べる。

補題 21 ([1] 補題 2.32).

$$d(0, z) = d(0, re^{i\theta}) = \log \frac{1+r}{1-r} \quad (18)$$

この補題を用いて \mathbb{D} 上の双曲距離を行列式で表わそう。

定理 22 (\mathbb{D} 上の双曲距離の行列式表示). $g = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \bar{\beta}_2 & \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} \in \text{SU}(1,1)$ をとり, 点 $z = g \cdot 0, w = h \cdot 0$ となる \mathbb{D} 上の点を考える. z と w の双曲距離 $d(z, w)$ は $\sinh \frac{1}{2}$ をとったものは行列式を用いて,

$$\sinh \frac{1}{2} d(z, w) = \left| \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} \right| \quad (19)$$

と表すことができる.

この定理により双曲距離を行列式で表すことができた. よって定理 15 を示すにあたり定理 8 が使えるようになったことになる. これが重要な点である. 書いておくことで定理 8 が使える形 ($\det(v_i, v_j)$ の形) にすることで, \mathbb{R}^2 と双曲面上の「4 点が同一円上にあるための条件」を一度に証明することができる. ではここから定理 22 を導く.

Proof. [定理 22] $g = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \bar{\beta}_1 & \bar{\alpha}_1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \bar{\beta}_2 & \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} \in \text{SU}(1,1)$ とし, $z = g \cdot 0, w = h \cdot 0$ を \mathbb{D} の点とする. \mathbb{D} 上の原点 0 と任意の 1 点との双曲距離は, Φ_g の作用で等長的である. よって \mathbb{D} 上の双曲距離を $d(z, w)$ とすると,

$$d(z, w) = d(g \cdot 0, h \cdot 0) = d(0, g^{-1}h \cdot 0)$$

と表すことができる. また,

$$\begin{aligned} g^{-1}h &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 & -\beta_1 \\ -\bar{\beta}_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \bar{\beta}_2 & \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1\alpha_2 + \beta_1\bar{\beta}_2 & \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2 - \beta_1\bar{\alpha}_2 \\ -\bar{\beta}_1\alpha_2 + \alpha_1\bar{\beta}_2 & -\bar{\beta}_1\beta_2 + \alpha_1\bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \bar{\tau} & \bar{\sigma} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と置き直すと, $g^{-1}h \cdot 0$ は,

$$g^{-1}h \cdot 0 = \frac{\sigma \cdot 0 + \tau}{\bar{\tau} \cdot 0 + \bar{\sigma}} = \frac{\tau}{\bar{\sigma}}$$

と表すことができる. よって,

$$d(z, w) = \log \left(\frac{1 + \frac{|\tau|}{|\bar{\sigma}|}}{1 - \frac{|\tau|}{|\bar{\sigma}|}} \right) = \log \frac{|\bar{\sigma}| + |\tau|}{|\bar{\sigma}| - |\tau|} = \log \frac{(|\bar{\sigma}| + |\tau|)^2}{|\bar{\sigma}|^2 - |\tau|^2} = 2 \log(|\bar{\sigma}| + |\tau|)$$

$|\bar{\sigma}|^2 - |\tau|^2 = 1$ を用いたが, これは $\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \bar{\tau} & \bar{\sigma} \end{pmatrix}$ が $SU(1, 1)$ の元であることになる. 次に

双曲距離の $\sinh \frac{1}{2}$ をとると,

$$\begin{aligned} \sinh \frac{1}{2} d(z, w) &= \frac{1}{2}(e^{\log(|\sigma|+|\tau|)} - e^{-\log(|\sigma|+|\tau|)}) = \frac{1}{2} \left(|\sigma| + |\tau| - \frac{1}{|\sigma| + |\tau|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|\sigma| + |\tau| - \frac{|\sigma| - |\tau|}{|\sigma|^2 - |\tau|^2} \right) = |\tau| = |\bar{\alpha}_1 \beta_2 - \beta_1 \bar{\alpha}_2| = \left| \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

となり, z と w の双曲距離の $\sinh \frac{1}{2}$ をとったものは小行列式を用いて

$$\sinh \frac{1}{2} d(z, w) = \left| \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix} \right|$$

と表せる. □

定理 22 から双曲面上の Ptolemy の定理が複比と Plücker 関係式を用いることで, 複素平面上の Ptolemy の定理と同様に示すことができる. 証明は省くが複比と Plücker 関係式についても紹介しておく. 証明は参考文献 [2] を参照してほしい.

定義 23. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の ∞ でない 4 点を z_1, z_2, z_3, z_4 をとり, この 4 点に対して斉次座標 $p_i = [z_i : 1]$ とする. D_{ij} を

$$D_{ij} = \det \begin{pmatrix} z_i & z_j \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = z_i - z_j$$

とおくと, 複比 $\text{cr}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ は,

$$\text{cr}(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{D_{13}D_{24}}{D_{14}D_{23}}$$

と定義される.

定理 24 (プリュッカーの関係式). 行列 $A = (v_1, \dots, v_4) \in M_{2,4}(\mathbb{C})$ に対して $D_{ij} = \det(v_i, v_j)$ と置くと次のプリュッカーの関係式が成り立つ.

$$D_{12}D_{34} + D_{13}D_{42} + D_{14}D_{23} = 0$$

4.3 双曲面上の Casey の定理とその行列式表示

ここからは双曲面上の Casey の定理についてまず述べる．この定理は N.V. Abrosimov と L.A. Mikajylova の論文に書かれている (参考文献 [7]) ．

定理 25 (双曲面上の Casey の定理)．双曲面上の双曲円 O に内接する図 8 のような 4 つの双曲円 O_1, O_2, O_3, O_4 を考える． O_i, O_j における共通外接線の長さを t_{ij} とすると，

$$\sinh \frac{t_{12}}{2} \sinh \frac{t_{34}}{2} + \sinh \frac{t_{23}}{2} \sinh \frac{t_{14}}{2} = \sinh \frac{t_{13}}{2} \sinh \frac{t_{24}}{2}$$

が成り立つ．

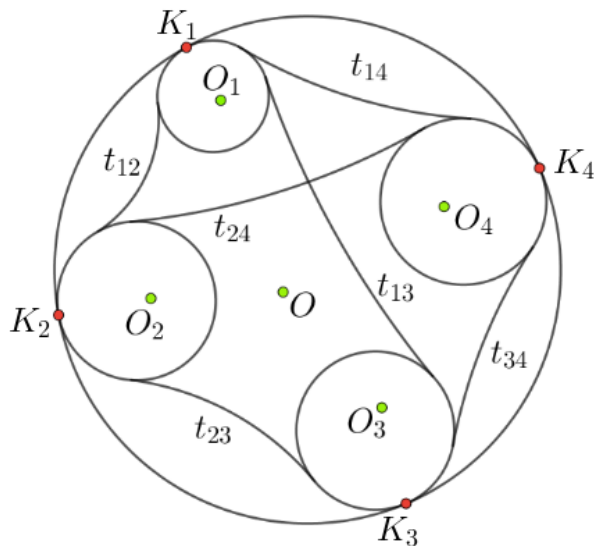


図 8 双曲面上の Casey の定理

参考文献 [7] には定理 25 の証明が書かれていた．ここから私は Ptolemy の定理と同様に双曲面上の Casey の定理の関係式を行列式表示していく．

定理 26 (双曲面上の Casey の定理の行列式表示)．双曲面上の 4 つの双曲円を O_1, O_2, O_3, O_4 とし， O_i, O_j における共通外接線の長さを t_{ij} ， $P = \left(\sinh^2 \frac{t_{ij}}{2} \right)_{1 \leq i, j \leq 4}$

とおく．このとき 4 円が一つの円に接するとき，

$$\det P = 0$$

が成り立つ．

Proof. 双曲円 O_i の半径を R_i ，外接円 O の半径を R とおく．図 8 の 2 点 K_i, K_j 間の双曲距離と， t_{ij}, R_i, R_j, R には以下のような関係式がある (参考文献 [7])．

$$\sinh^2 \frac{K_i K_j}{2} = \frac{\sinh^2 R \cosh R_i \cosh R_j}{2 \sinh(R - R_i) \sinh(R - R_j)} (\cosh t_{ij} - 1) \quad (20)$$

またそれぞれの中心を O_i ，中心間の双曲距離を $d_{ij} = d(O_i, O_j)$ とすると，

$$\cosh t_{ij} = \frac{\cosh d_{ij} + \sinh R_i \sinh R_j}{\cosh R_i \cosh R_j} \quad (21)$$

が成り立つ．これは双曲面上の余弦定理を用いて導出される． $\cosh t_{ij} - 1$ に (21) 式を代入し変形すると，

$$\begin{aligned} \cosh t_{ij} - 1 &= \frac{\cosh d_{ij} + \sinh R_i \sinh R_j - \cosh R_i \cosh R_j}{\cosh R_i \cosh R_j} \\ &= \frac{2 \sinh^2 d_{ij}/2 - 2 \sinh^2 (R_i - R_j)/2}{\cosh R_i \cosh R_j} \end{aligned} \quad (22)$$

よって (20) 式に (22) 式を代入すると， $r_{ij} = R_i - R_j$ とおいて

$$\sinh^2 \frac{K_i K_j}{2} = \frac{\sinh^2 R}{\sinh(R - R_i) \sinh(R - R_j)} \left(\sinh^2 \frac{d_{ij}}{2} - \sinh^2 \frac{(R_i - R_j)}{2} \right) \quad (23)$$

となる．この式と (15) 式

$$D_{ij}^2 = \frac{R^2}{(R - r_i)(R - r_j)} (d_{ij}^2 - r_{ij}^2)$$

を比べると，対応が見える．よって \mathbb{R}^2 上の行列式表示と同様の同値性を用いることで

$$\det P = 0$$

が言える．

□

5 結論と今後の課題

結論としてまず Euler-Ptolemy の定理, Casey の定理を行列式を用いて \mathbb{R}^2 上, 双曲面上で定式化した. また双曲面上 (\mathbb{D}) の距離を行列式表示した (定理 22). よって Euler-Ptolemy の定理について, 4 点の配置問題の観点から, 4 点が同一円上にあることと $\det P = 0$ が同値であることを, \mathbb{R}^2 上, 複素平面上, 双曲面上において, 一度に定式化することができた. その中で射影直線, 円円対応, Cayley-Menger 行列式など, 今まで勉強してきた内容の理解も深まった. \mathbb{R}^2 上, 双曲面上の Casey の定理については行列式を用いて定式化することで, \mathbb{R}^2 上の行列式表示との対応がわかった. よって Casey の定理を 4 円の配置問題の観点から考察することができた. 今後の研究課題として, Casey の定理の逆にあたる証明を導出することで, 4 円が一つの円に内接する条件を導きたい.

本修士論文の執筆にあたり, 西山先生には多忙である中, 日々のセミナーや論文添削をしていただき誠に感謝しています. また面倒を見てくださった西山先生をはじめ, 研究書を紹介してくださった松田先生, 副査として私の研究にアドバイスをくださった増田先生, 中山先生, とともにセミナーを作り上げてきた研究室の仲間にも本当に感謝している.

参考文献

- [1] 深谷賢治, 『双曲幾何』, 岩波書店, 2004 .
- [2] 西山享, 『幾何学と不変量』, 日本評論社, 2012 .
- [3] 長谷川浩司, 『線形代数』, 日本評論社, 2004 .
- [4] 田村三郎, 『John Casey について』, 数理解析研究所講究録, 2000.
- [5] 沢登正, 『円円対応とメビウス変換』, 青山学院大学卒業研究, 2017 .
- [6] 伊藤拓哉, 『双曲平面内における等辺等角双曲多角形の公式』, 青山学院大学卒業研究, 2017 .
- [7] N.V. Abrosimov, L.A. Mikaiylova, Casey's Theorem in Hyperbolic Geometry, Sib. Èlektron. Mat. Izv. 12 (2015), 354-360.
- [8] Joseph. E. Valentine, An Analogue of Ptolemy's Theorem and Its Converse in Hyperbolic Geometry', Pacific J. Math. 34 (1970), 817-825.
- [9] Philipp Lampe, Variations on Baur-Marsh 's determinant, arXiv:1709.02587 [math.CO] (2017).
- [10] T. Kubota, On the extended Ptolemy 's theorem in hyperbolic geometry, Science reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, chemistry, astronomy. 2 (1912), 131-156.
- [11] Carlos D' Andrea and Martin Sombra, The Cayley-Menger Determinant is irreducible for $n \geq 3$, arXiv:math/0406359 [math.AC] (2014).