修 士 論 文

線形計画法における主双対内点法アルゴリズムについて

青山学院大学 理工学研究科 理工学専攻
学籍番号　35616007

萩原 侑

平成 30 年 3 月 2 日

目 次

1　序論

私がこの研究に取り組んだ動機は、株式や債券投資に用いられる投資戦略の 1 つであるポートフォリオの最適化に興味があったからである. ポートフォリオ最適化には凸計画法や非線形計画問題がよく用いられるが、その理解が目的であった. しかし、ポートフォリオ最適化の問題は複雑かつ多岐にわたり、時間的な制約もあったため、まず線形計画法に焦点を当てた.

線形計画問題とは、与えられた幾つかの一次式、一次不等式 (制約条件と呼ばれる) の条件の下で、与えられた一次関数を最適化 (最大最小) する変数を見つける問題である. この問題の応用として 2 次凸計画法や非線形計画法などが考えられる.

これらの問題に対して一般的に解を求めることは容易ではないが、ニュートン法や内点法など数値的に近似最適解を求めることができる方法が存在する. 線形計画法の最適化にも多くの近似的解法があり、私は文献 [10], [1] を参考に研究を進めた. しかし、これらの教科書では理論的な証明がしばしば省略されていたり、説明が省かれていたりしたので、私なりに数学的な証明を理解することを中心に研究を行った. 特に本研究では線形計画法における内点法に焦点を当てている.

このノートがこれから線形計画法を勉強しようとする人の理解に役立てば幸いである.

2　線形計画問題とは

与えられた幾つかの一次式、一次不等式 (制約条件と呼ばれる) の下で、与えられた一次関数を最適化 (最大最小) する解を見つける問題を線形計画問題と呼ぶ [10]. この線形計画問題は一見単純なように思えるが、変数や制約条件が増えれば増えるほど計算にかかる労力や時間が莫大になる. その点から、より効率的に計算する方法があると便利である.

線形計画問題の解法には様々な方法があるが、その中に主問題と双対問題と呼ばれる問題を同時に考える方法がある. 準備として主問題とその双対問題についてまず解説する.

2.1　主問題と双対問題

定義 1 (線形計画問題) 係数行列 $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ と, 定数ベクトル $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ が与えられ、変数 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ に対する制約条件

$$\text{条件 (P)} \qquad \begin{cases} Ax - b = -y \\ x_i, y_j \geq 0,\ = 0,\ \text{条件無} \end{cases}$$

の下で関数

$$f(x) = {}^t c \cdot x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

を最適化 (最小化) するような点 x を探索する問題を**線形計画問題**と呼ぶ.

x_i, y_j の条件は成分ごとに変えることができる (詳しくは下記の定義における注意点を参照).

例 2.1 与えられた定数係数行列と定数ベクトル

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

において線形計画問題は以下のように表される.

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数} & f(x) = {}^t c \cdot x = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{制約条件} \quad Ax = b, x > 0 & \left\{ \begin{array}{rr} x_1 - x_2 + 2x_3 = & 5 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = & -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = & 0 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array} \right. \end{array}$$

この線形計画問題に付随して、双対問題と呼ばれる問題を考えると便利である. 双対問題は主問題と同じ A, b, c に対して、以下のように定式化される [10].

定義 2 (双対問題 (D)) $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ と, $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ が与えられ、変数 $u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m$ に対する制約条件

$$\text{条件 (D)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} {}^t Av - c = -u \\ u_i, v_j \geq 0, \ \text{条件無}, \ = 0 \end{array} \right.$$

の下で一次関数

$$h(v) = {}^t v \cdot b = v_1 b_1 + \cdots + v_m b_m$$

を最適化 (最大化) する点 v を探索する問題を元の線形計画問題に対する**双対問題**と呼ぶ.

この双対問題に対して、元の問題を**主問題** (P) と呼ぶ.

例 2.2 *例 2.1 の主問題に対する双対問題は、次のようになる.*

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数} & h(v) = {}^t v \cdot b = 5v_1 - 7v_2 \\ \text{制約条件} \quad {}^t Av + u = c, u > 0 & \left\{ \begin{array}{rr} v_1 - 2v_2 - 2v_3 + u_1 = & 2 \\ -v_1 + v_2 + 3v_3 + u_2 = & 1 \\ 2v_1 - 2v_2 - 5v_3 + u_3 = & -1 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 & \end{array} \right. \end{array}$$

$\boxed{\text{上記の定義における注意点}}$
制約条件 (P),(D) の成分 x_i と u_i、y_j と v_j に対する条件は下のそれぞれのように対応している.

$$\begin{cases} x_j \geq 0, & = 0, \quad 条件無 \\ y_i \geq 0, & = 0, \quad 条件無 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} u_j \geq 0, & 条件無, \quad = 0 \\ v_i \geq 0, & 条件無, \quad = 0 \end{cases}$$

例えば、 $x_i \geq 0$ ならば $u_i \geq 0$ となり, $y_j = 0$ ならば $v_j =$ 条件無 となる.

2.2 実効領域と解の存在

上記の定義のように線形計画法は、変数 $(x, y), (u, v)$ に制約条件と呼ばれる条件を課し、その条件下で最適解を探さなければならない. そのような制約条件を満たす解 $(x, y), (u, v)$ 全体を**実効領域**と呼び、以下のように定義する.

$$\begin{aligned} (\text{条件 (P) の実効領域}) &= \xi(\mathrm{P}) := \{(x, y) \mid (\mathrm{P}) \text{ を満たす}\} \\ (\text{条件 (D) の実効領域}) &= \xi(\mathrm{D}) := \{(u, v) \mid (\mathrm{D}) \text{ を満たす}\} \end{aligned}$$

また、主問題と双対問題において $(x', y'), (u', v')$ が**最適解になる**とは、

$$\xi(\mathrm{P}) \ni (x', y'), \xi(\mathrm{D}) \ni (u', v') \text{ かつ}$$
$$\text{目的関数 } f(x'), h(v') \text{ を最小化, 最大化する}$$

時にいう. 最適解の条件と実効領域の関係から、理論上は以下の 4 つの場合が考えられる.

- 実効領域 $\xi(\mathrm{P}), (D) = \emptyset \quad (\Longrightarrow$ 最適解 $(x', y'), (u', v')$ は存在しない) .
- $\xi(\mathrm{P}) = \emptyset, \xi(\mathrm{D}) \neq \emptyset$ または $\xi(\mathrm{P}) \neq \emptyset, \xi(\mathrm{D}) = \emptyset$ が成り立つ.
- 実効領域 $\xi(\mathrm{P}), \xi(\mathrm{D}) \neq \emptyset$ になるが 最適解 $(x', y'), (u', v')$ は存在しない .
- 実効領域 $\xi(\mathrm{P}), \xi(\mathrm{D}) \neq \emptyset$ かつ 最適解 $(x', y'), (u', v')$ が存在する .

つまり、実効領域が空であれば当然のことながら最適解は存在せず、空でなくても最適解が存在しない場合もあるということである. この可能性をさらに明確にするために、主問題と双対問題の関係を明らかにする定理を紹介する. この定理から結果として、最適解と実効領域の関係は 4 つの組み合わせしかないことがわかる.

定理 2.1 (弱双対定理)

(1) 実効領域内の点 $(x, y) \in \xi(\mathrm{P})$, $(u, v) \in \xi(\mathrm{D})$ に対して不等式

$$f(x) = {}^t cx \geq {}^t bv = h(v)$$

が成り立つ. 等号成立は x, v が主問題と双対問題の最適解のときである.

(2) (P) が実効可能 (つまり $\xi(\mathrm{P}) \neq \emptyset$) かつ最適解を持たないならば 、(D) は実効不能 (つまり $\xi(\mathrm{D}) = \emptyset$) である.

(3) (D) が実効可能 ($\xi(\mathrm{D}) \neq \emptyset$) かつ最適解がないならば、(P) は実効不能 ($\xi(P) = \emptyset$) である.

定理 2.2 (双対定理) 最適解 $x' \in \xi(\mathrm{P}), v' \in \xi(D)$ の存在に関して、以下の (1),(2) が成り立つ

(1) (P) が最適解 x' を持つことと、(D) が最適解 v' を持つことは同値.

(2) (1) の条件の下に最適値が一致し、

$$f(x') = h(v')$$

が成り立つ.

上記の 2 つの定理より以下 1,2,3,4 が同値

1. 主問題 (P) が最適解を持つ.
2. 双対問題 (D) が最適解を持つ.
3. 主問題 (P) と双対問題 (D) は共に空でない実効領域を持つ ($\xi(\mathrm{P}) \neq \emptyset$, $\xi(\mathrm{D}) \neq \emptyset$).
4. (P) と (D) は共に最適解を持つ.

この同値関係から主問題と双対問題の実効領域が空でなければ必ず最適解が存在することがわかる. 理解しやすくするため、以下に起こりうる場合を表にまとめる (表 1).

表 1: 最適解と実効領域の関係

		1	2	3	4
(P)	実効領域	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$	$= \emptyset$	$= \emptyset$
	最適解	存在する	存在しない	存在しない	存在しない
(D)	実効領域	$\neq \emptyset$	$= \emptyset$	$\neq \emptyset$	$= \emptyset$
	最適解	存在する	存在しない	存在しない	存在しない

主問題の最適解を (x', y'), 双対問題の最適解を (u', v') とした時、双対定理より最適値が一致する ($f(x) - h(v) = 0$) ことを用いて

$$\begin{aligned} 0 &= f(x') - h(v') = {}^t c x' - {}^t b v' \\ &= ({}^t A v' + u') x - {}^t b v' = {}^t u' x' + {}^t v'(A x' - b) = {}^t u' x' \end{aligned}$$

が成り立つ. つまり、次の補題が成り立つ.

補題 2.3 主問題の最適解を (x', y'), 双対問題の最適解を (u', v') とした時

$$ {}^t u' x' = 0 $$

が成り立つ.

一般の x, u に対して ${}^t u \cdot x$ は**双対ギャップ**と呼ばれ、最適解との距離を表していると考えられる.

3　双対問題を考える利点

3.1　変数の数 n と制約式の数 m

線形計画法は、一次式の計算で簡単そうに見えるが、不等式も介在することや変数や制約式の個数が莫大になることがあるので、計算量やスピードの面で困難になる. 例えばこの問題を株式や債券などの問題に応用すると、未知数 x は株や債券などの投資比率などを表わすが、実際の市場においてその数は膨大であるため主問題で最適解を求めることが一般には困難である. そのような主問題に対する双対問題を考えることで、計算量の面で有利になる場合がある. 変数の数 n は制約条件の次元を表しており、制約条件の数 m は制約条件の本数を表している. それをまとめると次のようになる.

主問題の変数の個数 $n =$ 双対問題の制約式の個数 m
主問題の制約式の個数 $m =$ 双対問題の変数の個数 n

この等式からわかることは

1. 主問題の変数の数が多く、制約式の少ない $\rightarrow$ 双対問題が有利

2. 双対問題の変数の数が少なく、制約条件が多い問題 $\rightarrow$ 主問題が有利

ということである.

3.2 主問題と双対問題の例

次のような例を考える．

例 3.1

$$
\begin{array}{ll}
\text{目的関数} & f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 \\
\text{制約条件} & \left\{
\begin{array}{rr}
2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 = & -4 \\
5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = & -1 \\
4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = & 9 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 &
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

この主問題に対する双対問題は次のようになる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{目的関数} & h(v) = -4v_1 - v_2 + 9v_3 \\
\text{制約条件} & \left\{
\begin{array}{rr}
2v_1 + 5v_2 + 4v_3 + u_1 = & 2 \\
-2v_1 - 3v_2 - 2v_3 + u_2 = & 1 \\
3v_1 - 2v_2 + v_3 + u_3 = & 3 \\
v_1 - v_2 - v_3 + u_4 = & 4 \\
-3v_1 + 2v_2 + 2v_3 + u_5 = & -2 \\
u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \geq 0 &
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

主問題を最小化した解は

$$
\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (0, 0.846154, 3.05128, 0, 3.82051) \\
f(x) &= 2.35897
\end{aligned}
$$

双対問題を最大化した解は

$$
\begin{aligned}
(v_1, v_2, v_3) &= (0.358974, -0.794872, 0.333333) \\
h(v) &= 2.35897
\end{aligned}
$$

となっている（これには *mathematica* による数値実験を用いた）．以上の結果から双対定理より最適値が一致しているので最適解であることがわかる．

4 主双対内点法

線形計画問題の最適解の近似解を求める方法は多数存在する．例えば、1979 年に L. Khachiyan よって発見されたシンプレックス法や内点法などがある．本章では、内点法の一種である主双対内点法に焦点を述べる．この理論は 1980 年に

Mclinden[12] によって初めて発見され、その後 1989 年に Megiddo[13] によって改良された. さらに主双対内点法は 1987 年に 小島政和-水野眞治-吉瀬章子 [2],[9] によって実装された.

私は主に教科書 [4] を参考に主双対内点法について理解を深めてきた. しかし、この本では定理の証明がしばしば省略されていたり、数学的に十分理解できない個所があったので、自分自身で数学的な詳細を埋めていくことを中心に研究を行った.

ここで紹介する方法は主問題 (P) が等式制約条件 $(y = 0)$ かつ $(x, u \geq 0)$ である場合の反復アルゴリズムによる最適解の近似法である.

そのために、紹介のためにもう一度主問題と双対問題の定義を $(y = 0)$ かつ $(x, u \geq 0)$ の場合で再掲する.

定義 3 (線形計画問題) $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ が与えられ、変数 $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ に対する制約条件

$$\text{条件 (P)} \qquad \begin{cases} Ax - b = 0 \\ x \geq 0, \ \ y = 0 \end{cases}$$

の下で関数

$$f(x) = {}^t c \cdot x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

を最適化 (最小化) するような点 x を求めよ.

その線形計画問題に対して双対問題と呼ばれる問題が存在して以下のように述べられる.

定義 4 (双対問題) $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ が与えられ、変数 $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$ に対する制約条件

$$\text{条件 (D)} \qquad \begin{cases} {}^t A v - c = -u \\ u \geq 0, \ \ v \text{ は条件無} \end{cases}$$

の下で関数

$$h(v) = {}^t v \cdot b = v_1 b_1 + \cdots + v_m b_m$$

を最適化 (最大化) する v の値を求めよ.

この制約条件 (P),(D) の双方を満たすような (x, u, v) の集合 (実効領域) の中で最適解になっているものを探すことが目的である.

条件 $x, u \geq 0$ の下、X, U を以下のように定義する.

$$X := \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix} \qquad U := \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

補題 2.3 より

$$ {}^t u \cdot x = 0 \Leftrightarrow XUe = 0 $$

となる.

$$ XUe = 0 $$

は相補性条件と呼ばれ、こらが成り立つと、双対ギャップ (最適解との距離) が 0 になることから、(x, u, v) が最適解になるための条件を表している. この式は、(x, u, v) が最適解であれば、x, u のどちらかのベクトルの i 成分が正で、他方のベクトルの i 成分が 0 であることを示している. また, この後何度か X, U が出てくるが、常にこの条件を満たすと仮定する.

定義 3,4 の実効領域内にある点の中で、相補性条件を満たす点を見つけることができれば、その点は主問題と双対問題の最適解になっていることになる. つまり以下のような条件を同時に満たす点は最適解である.

$$ \text{条件 (T)} \qquad \begin{cases} Ax - b = 0 \\ {}^t Av - c + u = 0 \\ XUe = 0 \\ x \geq 0, u \geq 0 \end{cases} $$

この条件 (T) は**主双対最適化条件**と呼ばれる. また n 次元ベクトル $x \geq 0, u \geq 0$ は n 個の成分すべてが 0 以上であることを示してる. 主双対最適化条件 (T) を満たす解を見つけることは一般的に困難であるが, 主双対最適化条件 (T) を満たす近似解を求める方法がある. それは主双対内点法と呼ばれ、以下のように定式化される.

まず、条件 (T) の代わりに新たな条件 (T_k) を考える.

$$ (\mathrm{T}_k) \qquad \begin{cases} Ax^{(k)} - b = 0 \\ {}^t Av^{(k)} - c + u^{(k)} = 0 \\ x^{(k)} > 0, \quad u^{(k)} > 0 \end{cases} \tag{1} $$

この条件の下 0 に近づくパラメータ $\mu^{(k+1)}$ を用いて

$$ X^{(k)} U^{(k)} e = \mu^{(k+1)} e $$

から $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ を帰納的に定義し、主双対最適化条件 (1) を満たす解に近づけていくことを考える. ここで $k \in \mathbb{N}$ は主双対内点法での反復回数を表している.

4.1　内点法のアルゴリズム

第 k 反復の解 $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ が求まっていると仮定し、第 $k+1$ 反復の解を与えよう. そのために条件 (T_k) を再掲する.

$$(\mathrm{T}_k) \qquad \begin{cases} Ax^{(k)} - b = 0 \\ {}^{t}Av^{(k)} - c + u^{(k)} = 0 \\ XUe = \mu^{(k)}e \\ x^{(k)} > 0, u^{(k)} > 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{ステップ}\,0}$　まず定数 $0 < \gamma, \eta < 1$ を与える.

$\boxed{\text{ステップ}\,1}$　正の数 $\mu^{(k+1)}$ を次のように決める.

$$\mu^{(k+1)} = \gamma \frac{{}^{t}x^{(k)} \cdot u^{(k)}}{n} \qquad (0 < \gamma < 1)$$

$\boxed{\text{ステップ}\,2}$　$(\Delta x, \Delta u, \Delta v)$ を求める方程式を解く (後述する) . この $(\Delta x, \Delta u, \Delta v)$ は最適解に向かう方向を与えていると考えられる.

$\boxed{\text{ステップ}\,3}$　求まった $(\Delta x, \Delta u, \Delta v)$ を用いて、ステップ幅と呼ばれる値 α を決める.

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} &= \max\{\alpha' \mid x + \alpha'\Delta x \geq 0, u + \alpha'\Delta u \geq 0\} \\ \alpha &= \alpha_{\max} \cdot \eta \qquad (0 < \eta < 1) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{ステップ}\,4}$　α を用いて $(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)}) = (x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)}) + \alpha(\Delta x, \Delta u, \Delta v)$ とおき、ステップ 1 に戻る.

4.2　実際の計算の流れ

$\boxed{k = 0 \text{ のとき}}$

$(x, 0) \in \xi(\mathrm{P})$ と $(u, v) \ni \xi(\mathrm{D})$ を $x > 0, u > 0$ となるように選ぶ. つまり内点から選ぶ. それを $(x^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)})$ とする. これを初期点と呼ぶ. しかし、もし初期点を見つけることができなかったらこの方法で最適解を求めることは論理的に不可能である. しかし、実効領域内にない初期点からでも最適解を近似的に求める方法も存在し、それは非実効可能点列内点領法、またはインフィージブル法と呼ばれている. この方法は本論文では紹介しないが [11], [4] などを参照してほしい.

$\boxed{k = 1 \text{ のとき}}$

$$\mu^{(1)} := \frac{{}^t x^{(0)} \cdot u^{(0)}}{n}\gamma \qquad (0 < \gamma < 1)$$

を求める.

方向ベクトル $\Delta x \in \mathbb{R}^n, \Delta u \in \mathbb{R}^n, \Delta v \in \mathbb{R}^m$ を用いて

$$(x^{(1)}, u^{(1)}, v^{(1)}) = (x^{(0)} + \Delta x, u^{(0)} + \Delta u, v^{(0)} + \Delta v)$$

とおいて条件 (T) に代入する. 以下 $\Delta x, \Delta u, \Delta v$ の求め方を解説する. (T_k) の第 1 式より

$$\begin{aligned} 0 &= A(x^{(1)} + \Delta x) - b \\ &= Ax^{(1)} - b + A\Delta x \\ &= A\Delta x \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに第 2 式より

$$\begin{aligned} 0 &= {}^tA(v^{(1)} + \Delta v) - c + u^{(1)} + \Delta u \\ &= {}^tAv^{(1)} - c + u^{(1)} + {}^tA\Delta v + \Delta u \\ &= {}^tA\Delta v + \Delta u \end{aligned}$$

となる. これを行列の形にまとめると

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & {}^tA \\ U^{(1)} & X^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu^{(1)}e - X^{(1)}U^{(1)}e \end{pmatrix}$$

となる. これを用いて $(\Delta x, \Delta u, \Delta v)$ を求めよう. 計算の簡略化のために

$$p = \mu^{m+1}e - X^{(1)}U^{(1)}e$$

とおく. 上記の行列より

$$U^{(1)}\Delta x + X^{(1)}\Delta u = p$$
$$\Delta x = (U^{(1)})^{-1}(p + X^{(1)}({}^tA)\Delta u)$$

が成り立つ. 同様に

$${}^tA\Delta v + \Delta u = 0$$
$$\Delta u = -{}^tA\Delta v$$

となる. さらに $\Delta x, \Delta u$ から

$$\begin{aligned} 0 &= A\Delta x \\ &= A(U^{(1)})^{-1}(p - X^{(1)}\Delta u) \\ &= A(U^{(1)})^{-1}(p - X^{(1)t}A\Delta v) \end{aligned}$$

となる. これを Δv を求める式に直すと

$$\Delta v = -(A(U^{(1)})^{-1}X^{(1)t}A)^{-1}(A(U^{(1)})^{-1}(\mu^{(1)}e - X^{(1)}U^{(1)}e))$$

が成り立つ. つまり以下のように

$$\begin{cases} \Delta v &= -(A(U^{(k)})^{-1}X^{(k)t}A)^{-1}(A(U^{(k)})^{-1}p) \\ \Delta u &= -{}^{t}A\Delta v \\ \Delta x &= (U^{(k)})^{-1}(p + X^{(k)}({}^{t}A)\Delta u) \end{cases}$$

このようにして、$\Delta v, \Delta u, \Delta x$ の順番に方向ベクトルが求まる.

次にステップ幅と呼ばれる Δ 方向にどれぐらい動かすことができるかを決める値を求める.

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} &:= \max\{\alpha' | x^{(1)} + \alpha'\Delta x \geq 0, u^{(1)} + \alpha'\Delta u \geq 0\} \\ \alpha &:= \alpha_{\max} \cdot \eta \qquad (0 < \eta < 1) \end{aligned}$$

これら全て求まることができたら、

$$(x^{(1)}, u^{(1)}, v^{(1)}) = (x^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)}) + \alpha(\Delta x, \Delta u, \Delta v)$$

とし初期点から最適解の方向に値を近づけることができる. $k = 1$ で求まった $(x^{(1)}, u^{(1)}, v^{(1)})$ を用いて $k = 2$ の $(x^{(2)}, u^{(2)}, v^{(2)})$ を求め、$k = 3, 4, 5...$ と同様の操作を繰り返す.

4.3 主双対内点法のアルゴリズムで抱いた疑問点

主双対内点法での計算において、自分なりに理解することが難しかった点を以下にまとめた. 本章ではこれらの点について証明や説明をつけながら述べる.

難しかった点

1. $k \to \infty$ のとき $\mu^{(k)} \to 0$ になるか.
2. 新たに求まった $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ は条件 (T_k) を満たしているか.
3. $(A(U^{(k)})^{-1}X^{(k)t}A)$ は正則か.
4. 任意の k に対して $p = \mu^{(k)}e - X^{(k)}U^{(k)}e \neq 0$ であるか.
5. $\alpha_{\max}$ は必ず存在するのか.
6. $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ は収束するか.

4.3.1 $k \to \infty$ のとき $\mu^{(k)} \to 0$ になるか

主双対内点法のアルゴリズムでは、$\mu(k)$ が 0 に収束することを用いて解を求めている. そこで、μ の定義から 0 に収束するか確かめる必要がある. しかし、結果

的に $\mu^{(k)}$ が単調減少することは示せたが、0 に収束することを示すことができなかった. 0 に収束することの証明などは教科書 [5] に掲載されているので参考にして欲しい.

補題 4.1 $\mu^{(k+1)}$ は $(k \to \infty)$ のとき単調減少する.

証明 1 $\boxed{\text{階差 } \mu^{(k+2)} - \mu^{(k+1)} < 0 \text{ を示す}}$
定義より

$$
\begin{aligned}
\mu^{(k+2)} - \mu^{(k+1)} &= \frac{\gamma}{n}({}^t x^{(k+1)} \cdot u^{(k+1)} - {}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)}) \\
\frac{n}{\gamma}(\mu^{(k+2)} - \mu^{(k+1)}) &= {}^t x^{(k+1)} \cdot u^{(k+1)} - {}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)}
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
{}^t x^{(k+1)} \cdot u^{(k+1)} - {}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)} < 0
$$

となることを示せば十分である. 定義 $(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}) = (x^{(k)} + \alpha\Delta x, u^{(k)} + \alpha\Delta u)$ より

$$
\begin{aligned}
{}^t x^{(k+1)} \cdot u^{(k+1)} - {}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)} &= {}^t(x^{(k)} + \alpha\Delta x)(u^{(k)} + \alpha\Delta u) - {}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)} \\
&= {}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)} + \alpha {}^t x^{(k)} \Delta u + \alpha {}^t(\Delta x) u^{(k)} + \alpha^{2t}(\Delta x)\Delta u - {}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)} \\
&= \alpha({}^t x^{(k)} \Delta u + {}^t(\Delta x) u^{(k)} + \alpha {}^t(\Delta x)\Delta u)
\end{aligned}
$$

$\alpha > 0$ なので ${}^t x^{(k)}\Delta u + {}^t(\Delta x)u^{(k)} + \alpha {}^t(\Delta x)\Delta u < 0$ を示すことができれば、 $\mu^{(k+1)}$ が単調減少していることがわかる.

$\boxed{{}^t(\Delta x)\Delta u = 0 \text{ を示す}}$

$$
\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & {}^t A & I \\ U^{(k)} & 0 & X^{(k)} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta v \\ \Delta u \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu^{(k+1)} e - X^{(k)} U^{(k)} e \end{pmatrix}
$$

であった. ここで

$$
p = \mu^{(k+1)} e - X^{(k)} U^{(k)} e
$$

とおくと、 Δ を求める方程式は以下のようになる.

$$
\begin{cases}
\Delta x &= (U^{(k)})^{-1}(p - X^{(k)}\Delta u) \\
\Delta u &= -{}^t A \Delta v \\
\Delta v &= (A(U^{(k)})^{-1}(X^{(k)}){}^t A)(-A(U^{(k)})^{-1} p)
\end{cases}
$$

これより

$$
{}^t(\Delta x)\Delta u = -{}^t(\Delta x){}^t A \Delta v = -{}^t(A\Delta x)\Delta v = 0
$$

となり、

$$ {}^t(\Delta x)\Delta u = 0 $$

が示された.

$\boxed{{}^t x^{(k)}\Delta u + {}^t(\Delta x)u^{(k)} < 0 \text{ を示す}}$

$$ \Delta x = U^{-1}(p - X\Delta u) = \begin{pmatrix} u_1^{-1}(p_1 - x_1\Delta u_1) \\ \vdots \\ u_n^{-1}(p_n - x_n\Delta u_n) \end{pmatrix} $$

である. この式に右から $u^{(k)}$ をかけると、

$$ \begin{aligned} {}^t(\Delta x)u^{(k)} &= p_1 + \cdots + p_n - {}^t x^{(k)}\Delta u \\ {}^t x^{(k)}\Delta u + {}^t(\Delta x)u^{(k)} &= p_1 + \cdots + p_n \end{aligned} $$

である. $p = \mu^{(k+1)}e - X^{(k)}U^{(k)}e$ より

$$ \begin{aligned} p_1 + \cdots + p_n &= n\mu^{(k+1)} - {}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)} \\ &= n\frac{{}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)}}{n}\gamma - {}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)} \\ &= {}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)}(\gamma - 1) \\ &= -{}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)}(1 - \gamma) \end{aligned} $$

であるがだったから、$0 < \gamma < 1$ より

$$ -{}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)}(1 - \gamma) < 0 $$

つまり

$$ \begin{aligned} p_1 + \cdots + p_n &< 0 \\ {}^t x^{(k)}\Delta u + {}^t(\Delta x)u^{(k)} &< 0 \end{aligned} $$

が成り立つ. ${}^t(\Delta x)\Delta u = 0$ であることから

$$ {}^t x^{(k)}\Delta u + {}^t(\Delta x)u^{(k)} = -{}^t x u^{(k)}(1 - \gamma) $$

となる. これを書き直すと

$$ \begin{aligned} \mu^{(k+2)} - \mu^{(k+1)} &= -\frac{\gamma}{n}(1 - \gamma){}^t x^{(k)} \cdot u^{(k)} \\ &= -(1 - \gamma)\mu^{(k+1)} \end{aligned} $$

□

よって、単調減少である.

4.3.2 新たに求まった $(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)})$ は条件 (T) を満たしているか.

内点法は実効領域内で $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ を更新していく方法である. 新たに求まった $(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)})$ が実効領域内にあることを確かめる.
定義より

$$(x^{(k+1)}, u^{(k+1)}, v^{(k+1)}) = (x^{(k)} + \alpha\Delta x, u^{(k)} + \alpha\Delta u, v^{(k)} + \alpha\Delta v)$$

であったから、

$$\begin{aligned} Ax^{(k+1)} &= A(x^{(k)} + \alpha\Delta x) \\ &= Ax^{(k)} + \alpha A\Delta x = Ax^{(k)} = b \end{aligned}$$

次に $(u^{(k+1)}, v^{(k+1)})$ に対して

$$\begin{aligned} {}^tAv^{(k+1)} + u^{(k+1)} &= {}^tA(v^{(k)} + \alpha\Delta v) + u^{(k)} + \alpha\Delta u \\ &= {}^tAv^{(k)} + u^{(k)} + \alpha({}^tA\Delta v + \Delta u) \\ &= {}^tAv^{(k)} + u^{(k)} = c \end{aligned}$$

となる. これより $k+1$ の解は実効領域内に含まれることがわかる. $k+2, k+3...$ のとき同様に成り立つが $k \to \infty$ のとき実効領域内の点であるかは確認しないとわからない. しかし、双対ギャップ ${}^tx^{(k)}u^{(k)}$ が小さくなっていることから最適解の近似解が得られる.

4.3.3 任意の k に対して $p = \mu^{(k)}e - X^{(k)}U^{(k)}e \neq 0$ であるか.

最適解の方向ベクトル

$$\begin{cases} \Delta x &= (U^{(k)})^{-1}(p - X^{(k)}\Delta u) \\ \Delta u &= -{}^tA\Delta v \\ \Delta v &= (A(U^{(k)})^{-1}(X^{(k)})^tA)(-A(U^{(k)})^{-1}p) \end{cases}$$

を求めるとき、$p = 0$ であると、$\Delta v, \Delta u, \Delta x$ が求まらなくなり、アルゴリズムを反復することができない. よって、背理法で $p \neq 0$ であることを示す. そこで $p = 0$

と仮定する.

$$
\begin{aligned}
0 &= \mu^{(k)}e - X^{(k)}U^{(k)}e \\
&= \gamma\frac{{}^t x^{(k)}\cdot u^{(k)}}{n}e - \begin{pmatrix} x_1^{(k)} & & \\ & \ddots & \\ & & x_n^{(k)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^{(k)} & & \\ & \ddots & \\ & & u_n^{(k)} \end{pmatrix}e \\
&= \frac{\gamma}{n}\begin{pmatrix} {}^t x^{(k)}\cdot u^{(k)} \\ \vdots \\ {}^t x^{(k)}\cdot u^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1^{(k)}\cdot u_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)}\cdot u_n^{(k)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる. これを下に $x^{(k)}\cdot u^{(k)}$ を式変型すると

$$
\begin{aligned}
x^{(k)}\cdot u^{(k)} &= \sum_{i=1}^{n} {}^t x_i^{(k)}u_i^{(k)} = \frac{\gamma}{n}\sum_{k=1}^{n} {}^t x^{(k)}\cdot u^{(k)} \\
&= \frac{\gamma}{n}n {}^t x^{(k)}\cdot u^{(k)} = \gamma {}^t x^{(k)}\cdot u^{(k)}
\end{aligned}
$$

これより次の関係から

$$
\begin{aligned}
{}^t x^{(k)}\cdot u^{(k)} &= \gamma {}^t x^{(k)}\cdot u^{(k)} \\
(1-\gamma){}^t x^{(k)}\cdot u^{(k)} &= 0
\end{aligned}
$$

定義より $\gamma \neq 1$ なので ${}^t x^{(k)}\cdot u^{(k)} = 0$ であるはずだが、定義より $x^{(k)}, u^{(k)} > 0$ なので 矛盾である. よって

$$p = \mu^{(k+1)}e - X^{(k)}U^{(k)}e \neq 0$$

が示された.

4.3.4 $(A(U^{(k)})^{-1}X^{(k)t}A)^{-1}$ は存在するか.

定義より $C = (U^{(k)})^{-1}X^{(k)}$ は対角成分に正の値を持つ $n \times n$ 行列なので、正定値行列である. $A \in M_{mn}$ が横長の行列 $(m \leq n)$ でかつ $\mathrm{rank}A = m$ であると仮定すると対称行列 $(A(U^{(k)})^{-1}X^{(k)t}A)$ は正則であるかという問題である.

そこで、C を一般の正定値対称行列として、

$$AC({}^t A) > 0$$

を示そう. そこで、左から ${}^t x$, 右から x をかける

$$
\begin{aligned}
{}^t xAC({}^t Ax) &\geq 0 \\
{}^t({}^t Ax)C({}^t Ax) &\geq 0
\end{aligned}
$$

しかし、正則であることを示すには、$x \neq 0$ のとき、${}^t({}^tAx)C({}^tAx) \neq 0$ である事を示さなければならない. つまり、${}^tAx \neq 0$ であることを示す. そのために ${}^tAx = 0$ と仮定し、矛盾が起きることを示す. $a_1, a_2, \cdots, a_m$ を ${}^tA$ の列ベクトルとすると

$$
{}^tAx = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = 0
$$

となる. $\mathrm{rank}A = m$ であることから、ベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_m$ は一次独立である. つまり、等式が成り立つのは $x = 0$ の場合のみである. このことから $x \neq 0$ と仮定すると、${}^t({}^tAx)C({}^tAx) \neq 0$ は常に成り立つ. よって、対称行列 $(A(U^{(k)})^{-1}X^{(k)t}A)$ は正則である.

4.3.5 $\alpha_{\max}$ は必ず存在するか.

$\alpha_{\max}$ の定義より、

$$
\alpha_{\max} \;:=\; \max\{\alpha' | x^{(k)} + \Delta x \geq 0, u^{(k)} + \Delta u \geq 0\}
$$

である. もし $\Delta x, \Delta u \geq 0$ だった場合 $\alpha_{\max}$ はいくらでも大きく取ることができ、max が存在しない. そのことから $\Delta x, \Delta u$ の成分に必ず負のものが現れることが分かれば max が存在し、 $\alpha_{\max} > 0$ を決めることができる.

まず $\Delta u \geq 0$ と仮定する. その時に Δx の成分に負が現れることを示す. 示すために用いる条件として主双対内点条件より $\Delta x = (U^{(k)})^{-1}(\mu^{(k+1)}e - X^{(k)}U^{(k)}e - X^{(k)}\Delta u)$ と $X^{(k)}, U^{(k)}, x, u > 0$ である. $X^{(k)}U^{(k)}e$ の成分の中で最大なものを $x_k^{(k)} \cdot u_k^{(k)}$ とすると

$$
\begin{aligned}
\mu^{(k+1)} - x_k^{(k)} \cdot u_k^{(k)} &= \frac{\gamma}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} \cdot u_i^{(k)} - x_k^{(k)} \cdot u_k^{(k)} \\
&\leq \frac{\gamma}{n}\sum_{i=1}^{n} x_k^{(k)} \cdot u_k^{(k)} - x_k^{(k)} \cdot u_k^{(k)} \\
&= \frac{\gamma}{n}(nx_k^{(k)} \cdot u_k^{(k)}) - x_k^{(k)} \cdot u_k^{(k)} \\
&= (\gamma - 1)x_k^{(k)} \cdot u_k^{(k)}
\end{aligned}
$$

定義より $0 < \gamma < 1$ なので

$$
\gamma - 1 < 0
$$

よって

$$
\mu^{(k+1)} - x_k^{(k)} \cdot u_k^{(k)} < 0
$$

であることが示される. よってベクトル

$$
\mu^{(k+1)}e - X^{(k)}U^{(k)}e
$$

の成分の中には少なくとも一つ負のものが現れる．つまり、

$$\Delta x = (U^{(k)})^{-1}(\mu^{(k+1)}e - X^{(k)}U^{(k)}e - X^{(k)}\Delta u)$$

の成分に少なくとも一つ負のものが現れる． このことから $\alpha_{\max}$ は存在する．

4.3.6 $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ は収束するか．

主双対内点法のアルゴリズムで $(x^{(k)}, u^{(k)}, v^{(k)})$ の更新がポイントであったが、$k \to \infty$ のとき、その解は収束するかを確かめる必要がある．結果から述べると、解が収束することを証明することはできなかった．また証明が掲載されている文献を見つけることもできなかったが、本大学の数値解析を分野に研究を行う杉原正顯教授によると、現在では解の収束性はすでに示されていることをご教授頂きました．

4.3.7 まとめと将来の課題

本研究で、線形計画法及び主双対内点法の理解を深めることができた．疑問点を中心に自分なりに証明を行ったが、解決できなかった点（$\mu^{(K)}$ と解の収束性）は今後の課題である．本研究の目的に戻ると、株や債券などのポートフォリオ最適化を理解することであった．そのことからまず、線形計画法で理解したことを非線形計画法に応用すること．またその非線形計画法からポートフォリオ最適化に応用することが今後の課題である．そこから、実際の経済の問題に対して教科書 [3] などを参考に勉強していきたい．

5　参考文献

参考文献

[1] 小島政和・土谷隆・水野眞治・矢部博『内点法』朝倉書店, 2001.

[2] 小島政和, 水野眞治, 吉瀬章子, 『多項式オーダーの主双対内点法』, 『線形計画問題の新解法』, 統計数理研究所共同研究レポート 5(1987), pp.13-24.

[3] 小林孝雄,・芦田敏夫, 『新・証券投資論 I 』日本経済新聞出版社, 2009.

[4] 田辺國士, "Centered Newton method for linear programming: Exterior point method", 統計数理 37(1989), pp.146-148.

[5] 並木誠, 『線形計画法』, 朝倉書店, 2008.

[6] 枇々木規雄・田辺隆人『ポートフォリオ最適化と数理計画法』朝倉書店, 2005.

[7] 福島雅夫『新版数理計画入門』朝倉書店, 2011.

[8] M. Kojima, N. Megiddo and S. Mizuno, "A primal-dual infeasible-interior-point algorithm for linear pogramming", Mathematical Programming 61(1993), pp.263-280.

[9] M. Kojima, S. Mizuno and A. Yoshise, "A primal-dual interior-point algorithm for linear programming", Progress in Mathematical Programming, Interior-Point and Related Methods (Springer-Verlag, New York, 1989), pp.29-47.

[10] H. W. Kuhn, "Nonlinear Programming", Amer. Math Monthly, vol 9(1976), pp.393-415.

[11] I. J. Lustig, "Feasibility issues in a primal-dual interior-point method for linear programming", Mathematical Programming 49(1990/1991), pp.145-162.

[12] L. McLinden, "The complementarity problem for maximal monotone multi-functions", Variational Inequalities and Complementarity Problems, eds. R. W. Cottle, F. Gianenssei and J. L. Lions, (John Wiley & Sons, New York, 1980), pp.251-270.

[13] N. Megiddo, "Pathways to the optimal set in linear programming", Progress in Mathematical Programming, Interior-Point and Related Methods (Springer-Verlag, New York, 1989), pp.131-158.

6　謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導を頂いた指導教員の西山享教授に感謝致します。また、本研究の内容に関して、様々なご指導を頂きました副査である杉原正顯教授に深謝いたします。それに加え、日常の議論を通じて多くの知識や示唆を頂いた西山研究室の皆様に感謝します。