曲面上のMorse関数について

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科
学籍番号:15114136　山田 美優
指導教員 西山 享

平成 30 年 2 月 20 日

目 次

1　序論

1.1　研究の背景

卒業研究のセミナーで位相幾何学的観点から閉曲面の分類やオイラー標数について学んだ [大田]．それで幾何学に興味を持って，独自に Morse 理論の初歩を [松本] によって勉強した．Morse 理論では多様体を解析学を用いて観察することができることを学んで面白いと思ったからである．例えば，形状の分からない曲面 M があったとする．曲面 M 上の関数 f が Morse 関数であれば，f を微分することによってオイラー標数なども計算でき，曲面 M の幾何学的な情報を引き出すことができる．このように幾何学を解析学を用いて理解できることに興味を持った．

[松本] の第 1 章を読み，曲面上の Morse 関数について学んだ．そこで私は，簡単な曲面 M 上の簡単な関数 f を考えた時にどのような Morse 関数が存在するかを実際の計算によって求めた．簡単な曲面の簡単な関数ではあるが，計算は想像以上に手こずった．

この論文を書くにあたって，[松本] の第 1 章を主に参考にし，[横田] も必要に応じて参考にした．

1.2　研究の主結果

曲面 M 上の関数 $f:\ M \to \mathbb{R}$ の臨界点がすべて非退化である時，f を **Morse 関数**と呼ぶ．

本研究では，単位球面 $\mathbb{S}^2$ 上とトーラス面 $\mathbb{T}^2$ 上の関数 f において考えた．ほとんどの関数は Morse 関数である．単位球面 $\mathbb{S}^2$ 上の 4 種類の関数（一次，二次，三次），トーラス $\mathbb{T}^2$ 上の関数でも一次式についてを調べみた．ここでは，そのうちの三つの例を紹介する．

(1) $\mathbb{S}^2$ 上の一次関数 $f = ax + by + cz \quad (a, b, c:$ 定数$)$

臨界点 : $p_0 = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c)$

臨界点は 2 個あり，$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ の時，非退化な臨界点となる．また，臨界点の 1 つは極大でもう一つは極小，峠点はないから $1 - 0 + 1 = 2$ が $\mathbb{S}^2$ のオイラー標数である．

(2) $\mathbb{S}^2$ 上の三次関数 $f = ax^3 + by^2 + cz \quad (a, b, c > 0:$ 定数$)$

臨界点において下表のように 4 つに場合分けができた．

		$x=0$	$x\neq 0$
$y=0$			$0<c<\frac{3}{2}$
	臨界点の個数	2 個	4 個
	臨界点 : p_0	$(0,0,\pm 1)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}(\pm\xi+\eta,0,\pm\xi-\eta)$ $\frac{1}{2\sqrt{3}}(\pm\xi-\eta,0,\pm\xi+\eta)$
		$2b\mp c\neq 0$ で非退化	$c\neq\pm\frac{3}{2}$ で非退化
$y\neq 0$		$c<2b$	$c<2b<3$
	臨界点の個数	2 個	2 個
	臨界点 : p_0	$(0,\pm\sqrt{1-(\frac{c}{2b})^2},\frac{c}{2b})$	$(\frac{2b}{3},\pm\sqrt{1-(\frac{2b}{3})^2-(\frac{c}{2b})^2},\frac{c}{2b})$
		$c\neq 2b$ で非退化	$b\neq\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{2}\pm\sqrt{(\frac{9}{2})^2-(3c)^2}}$ で非退化

(3) $\mathbb{T}^2$ 上の一次関数 $f=ax+by+cz \quad (a,b,c:$ 定数$)$

臨界点においては $\begin{cases} \tan\theta_0=\pm\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a} \\ \tan\varphi_0=\dfrac{c}{b} \end{cases}$ の値をとる．

臨界点は 8 個あり，$abc\neq 0$ の時非退化な臨界点となる．

また，臨界点は極大は 2 個，極小は 2 個，峠点は 4 個で $2-4+2=0$ が $\mathbb{T}^2$ のオイラー標数である．

1.3 本論文の構成

曲面 M 上の関数 f がどのような条件で Morse 関数になるかを判断する為に，§ 2 では臨界点や Morse 関数について定義する．理解を深める為に関数 f を二変数関数で定義する前に一変数関数の場合も定義しておく．また，Morse 関数であるかは座標の取り方によらないということも紹介する．§ 3 では，曲面 M 上で自分で考えたいくつかの関数 f の例がどのような条件で f が Morse 関数になるかを，実際に計算することによって調べた．ここでは，M として単位球面 $\mathbb{S}^2$ 上とトーラス面 $\mathbb{T}^2$ 上を例として考えた．最後に，§ 4 で研究結果のまとめと今後の課題について述べる．

2　曲面上の Morse 理論

多様体上の関数とその多様体の形状の関連を研究するのが Morse 理論である．以下，主に曲面を考えることにするが，まず手始めに曲線の話から始める．

2.1　曲線上の Morse 理論の紹介

曲線 C のパラメータ表示を $\boldsymbol{r}(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ として，C 上の関数をパラメータ x の関数として $f(x)$ と書くことにする．そこで，一変数関数 $y = f(x)$ を考えよう．

定義 2.1 (臨界点)
一変数関数 $y = f(x)$ において $f'(x_0) = 0$ を満たす x_0 を**臨界点**という．

定義 2.2 (非退化性)
臨界点 x_0 において $f''(x_0) \neq 0$ の時，x_0 を**非退化な臨界点**といい，$f''(x_0) = 0$ の時，x_0 を**退化した臨界点**という．また，$f''(x_0) > 0$ の時，指数を 0，$f''(x_0) < 0$ の時，指数を 1 と定める．（指数は一般には，Hesse 行列の負の固有値の数として定義する [定義 2.10] 参照）

非退化な臨界点において，指数 0 の時は極小，指数 1 の時は極大と判定できることはよく知られている．

簡単な曲線上の関数の例を見てみる．

例 2.3 (単位円 $\mathbb{S}^1$ 上の Morse 関数)
単位円 $\mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$ 上の一次関数 $f(x, y) = ax + by$ $(a, b$ は定数$)$ を考えると，$(a, b) \neq (0, 0)$ の時，f の臨界点は全て非退化であることが分かる．実際，それを確かめてみよう．

$\mathbb{S}^1$ のパラメータ付けを $(x, y) = (x, \pm\sqrt{1 - x^2})$ として，$f(x, y)$ をパラメータの一変数関数として表示する．

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \; f(x, \pm\sqrt{1 - x^2}) \\ = & \; ax \pm b\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

パラメータ x は $(x, y) \neq (\pm 1, 0)$ では座標系になっていることに注意する．$(x, y) = (\pm 1, 0)$ の時は，y をパラメータ（座標系）にとって考えれば同

じ結果を得られる．$f(x,y)$ を微分すると

$$\frac{d}{dx}f(x,y)=a\mp b\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

これを 0 とおくと

$$(x_0,y_0)=(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

となり，臨界点を得る．臨界点 (x_0,y_0) における 2 階導関数は

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x_0,y_0)=\frac{\mp(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}\neq 0$$

であるから，$(a,b)\neq(0,0)$ の時は非退化な臨界点である．指数は各々0（極小）と 1（極大）である．

次に $\mathbb{S}^1$ の別のパラメータ付けで考えてみる．そこで，
$(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ をパラメータ付けにとる．

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(\cos\theta,\sin\theta)\\&=a\cos\theta+b\sin\theta\end{aligned}$$

を微分すると

$$\frac{d}{d\theta}f(\cos\theta,\sin\theta)=-a\sin\theta+b\cos\theta$$

これを 0 とおくと，臨界点において

$$\tan\theta_0=\frac{b}{a}$$

の値をとる．このような θ_0 は 2 つあって $\cos^2\theta_0=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta_0}$ だから $\cos\theta_0=\pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$（ただし，$(a,b)\neq(0,0)$）である．$\pm$ は 2 つの臨界点と対応する．臨界点 $(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$ における 二階導関数は

$$\frac{d^2}{d\theta^2}f(\cos\theta_0,\sin\theta_0)=-a\cos\theta_0-b\sin\theta_0\neq 0$$

であるから，

$$a^2+b^2\neq 0$$

となり，$(a,b)\neq(0,0)$ の時は非退化な臨界点である．一方は極大で，他方は極小．よって，パラメータ付け $(x,y)=(x,\pm\sqrt{1-x^2})$ の時と同じ結果が得られた．

例では異なる2つのパラメータ付けで計算したが，臨界点とそれが非退化であるかどうかはパラメータ付けによらないことが分かる．これは一般的な事実である．

2.2　曲面上の関数の臨界点

次に，曲面 M の座標系 (パラメータ付け) を (x,y) として，M 上の実数値関数 $z=f(x,y)$ を考える．後で述べるが，Morse 関数であるかは座標系によらないので，どのような座標系をとっても構わない．

定義 2.4 (臨界点)
曲面 M 上の *1* 点 $p_0=(x_0,y_0)$ が関数 $z=f(x,y)$ の臨界点であるとは

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)=0$$

が成り立つことである．　□

ここでは，関数 $f(x,y)$ は C^∞ 級であると仮定している．以下，この論文で考える関数は全て C^∞ 級である．その時，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

のように二階の偏微分を並べた行列を，関数 $z=f(x,y)$ の **Hesse 行列**と呼ぶ．記号で

$$H_f$$

と表す．なお，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ であるから，H_f は対称行列である．

定義 2.5 (非退化)
p_0 を f の臨界点とする．臨界点 p_0 が関数 $z=f(x,y)$ の**非退化な臨界点**であるとは，p_0 における f の Hesse 行列式が 0 でないことである．すなわち

$$\det H_f(p_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p_0)\right)^2\neq 0$$

が成り立つことである．$\det H_f(p_0)=0$ の時，p_0 は**退化した臨界点**であるという．　□

M をひとつの曲面とする．M の各点 p に実数 $f(p_0)$ を対応させる写像

$$f:\ M \to \mathbb{R}$$

のことを，M 上の関数という．($\mathbb{R}$ は実数全体の集合である．)

定義 2.6 (Morse 関数)
曲面 M 上の関数 $f:\ M \to \mathbb{R}$ の臨界点がすべて非退化である時，f を **Morse 関数**と呼ぶ.

補題 2.7 ([松本，補題 **1.8**])
座標系 (x,y) を使って計算した Hesse 行列を $H_f(p)$ とし、別の座標系 (u,v) を使って計算した Hesse 行列を $\mathbb{H}_f(p)$ とすると

$$\mathbb{H}_f(p) = {}^tJ(p)H_f(p)J(p)$$

が成り立つ．ここに $J_(p)$ は座標変換に伴う **Jacobi 行列**で定義される．

$$J(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(p) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(p) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

また，$J(p_0)$ は正則行列であり，${}^tJ(p)$ は $J(p)$ の転置行列である． □

補題 2.7 の系として，次の系 2.8 を得る．

系 2.8 ([松本，系 **1.10**])
点 p_0 が関数 f の非退化な臨界点であるということは，p_0 の近傍の座標系の選び方によらない．退化した臨界点についても，同じことが言える．□

$\mathbb{H}_f(p_0) = {}^tJ(p_0)H_f(p_0)J(p_0)$ であるから，両辺の行列式をとると

$$\det \mathbb{H}_f(p_0) = \det {}^tJ(p_0)\ \det H_f(p_0)\ \det J(p_0)$$

座標変換の Jacobi 行列については正則行列であるから，つねに

$$\det J(p_0) \neq 0$$

である．したがって，$\det \mathbb{H}_f(p_0) \neq 0$ と $\det H_f(p_0) \neq 0$ は同値である．

これらの行列は，適当な行列 J を見つけて，${}^tJHJ$ を計算し，それが対角線の上だけに 0 でない数の並んだ対角行列にになるようにしたものと思えるわけである．Sylvester の法則 [深谷，P.8] によれば，$H_f(p_0)$ のような対称行列を対角行列に直した時に，対角線上に現れるマイナスの数の個数は，はじめの $H_f(p_0)$ で決まり，対角化の仕方によらない．

定義 2.9 (指数)
2 変数関数 f の Hesse 行列 $H_f(p_0)$ を対角化したものを考えた時

$$\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix} \text{又は} \begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$$

であるのに応じて，非退化な臨界点 p_0 の**指数**をそれぞれ $0,1,2$ と定義する．言い換えれば，対角線上に現れるマイナスの符号の個数が p_0 の指数である． □

2.3 オイラー標数

[大田] に従って閉曲面 S のオイラー標数について紹介をする．

定義 2.10 (オイラー標数 [大田，P.64])
任意の閉曲面 S の多面体グラフ G が，p 個の頂点，q 本の辺，r 個の面を持つ時

$$\chi(S) = \chi(S, G) = p - q + r$$

は常に一定なので，これをオイラー標数と呼ぶ． □

定理 2.11 ([大田，定理 4.22])
向き付け可能な閉曲面 S の種数（穴の個数）を g とすると，S のオイラー標数は

$$\chi(S) = 2 - 2g$$

□

さらに，曲面 M 上の Morse 関数に対しては，次の系 2.12 が成り立つ．

系 2.12 ([松本，系 4.19])
曲面 M 上の Morse 関数 f を考える．f の指数 $i = 0,1,2$ の臨界点の個数を k_i とすれば，M のオイラー標数は

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{2} k_i(-1)^i$$

に一致する． □

指数は対角化の仕方によらないので，座標の取り方を変えても計算結果は変わらないことに注意する．

以上のことを使うと，Morse 関数の情報から曲面の種数を逆算することができる．

3 Morse関数の計算例

3.1 単位球面 $\mathbb{S}^2$ 上の関数

ここでは，単位球面 $\mathbb{S}^2$: $x^2+y^2+z^2=1$ 上の関数 f を考えた時に，どのような Morse 関数が存在するかを求める．また，Morse 関数による計算がオイラー標数 $\chi(\mathbb{S}^2)=2$ と一致することを確認する．

3.1.1 $\mathbb{S}^2$ 上の関数の例 1 (一次関数 $f=ax+by+cz$)

関数 f を

$$f(x,y,z)=ax+by+cz \qquad (a,b,c：定数)$$

とする．

$$(x,y,z)=(x,y,\pm\sqrt{1-x^2-y^2})$$

をとって，f に代入すると

$$f=ax+by\pm c\sqrt{1-x^2-y^2}$$

となる．$1-x^2-y^2=0$ では，座標系にならないので $1-x^2-y^2\neq 0$ で考える．ここでは，複号 $\pm$ の $+$ の場合を考える．まず，臨界点を求める．関数 f の導関数は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=a+\dfrac{-cx}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=b+\dfrac{-cy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{cases}$$

であった．これを 0 とおくと臨界点 p_0 は

$$p_0=\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$$

で臨界点は 2 個あると分かる．ここで $a^2+b^2+c^2\neq 0$ とする．f の二階導関数は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=c\dfrac{y^2-1}{z^3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=c\dfrac{x^2-1}{z^3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-c\dfrac{xy}{z^3} \end{cases}$$

となるから Hesse 行列式は $c \neq 0$ の時

$$\det H_f(p_0) = c^2 \neq 0$$

である．同様に，赤道上で考えると座標系 (y, z) の時は $a \neq 0$，座標系 (z, x) の時は $b \neq 0$ でなければならない．

赤道上 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ においては座標系として (y, z) 又は (z, x) をとって計算すれば，対称性により同じ結果を得る．よって，$abc \neq 0$ の時，全ての臨界点が非退化であるので Morse 関数となる．

臨界点 : p_0	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c)$
H	$\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$
指数 : i	2	0
個数 : k_i	1	1

峠点がないのでオイラー標数は

$$\chi(\mathbb{S}^2) = \sum_{i=0}^{2} k_i(-1)^i = 1(-1)^0 + 0(-1)^1 + 1(-1)^2 = 2$$

となる．

3.1.2 $\mathbb{S}^2$ 上の関数の例 2 (二次関数 $f = ax^2 + by^2 + cz^2$)

関数 f を

$$f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 \qquad (a, b, c：定数)$$

とする．(x, y) は $\mathbb{S}^2$ の座標系になり，$1 - x^2 - y^2 = 0$ では，座標系にならないので $1 - x^2 - y^2 \neq 0$ で考えると

$$(x, y, z) = (x, y, \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

を f に代入すると

$$f = ax^2 + by^2 + c(1 - x^2 - y^2)$$

となる．まず，臨界点を求める．関数 f の導関数は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x(a-c) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y(b-c) \end{cases}$$

であった．これを 0 とおくと

（１）$a-c \neq 0, b-c \neq 0$ の時，臨界点 p_0 は

$$p_0 = (0, 0, \pm 1)$$

となる．f の二階導関数は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(a-c) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(b-c) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \end{cases}$$

となるから Hesse 行列式は

$$\det H_f(p_0) = 4(a-c)(b-c) \neq 0$$

である．従って，非退化な臨界点である．

赤道上 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ においては座標系として (y, z) 又は (z, x) をとって計算すれば，対称性により同じ結果を得る．よって，$(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ の時，全ての臨界点が非退化であるので Morse 関数となる.

（２）$a-c=0$ または $b-c=0$ の時，関数 f は

$$\begin{aligned} f &= cx^2 + cy^2 + cz^2 \\ &= c(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= c \end{aligned}$$

となる．つまり全ての点が臨界点で，全て退化している．また，$a-c=0, b-c \neq 0$ の時と $a-c \neq 0, b-c=0$ の時もきちんと計算す

れば，臨界点が連続で無限個あらわれて，全て退化していることが分かる．対称なので $a > b > c$ として考える．

臨界点 : p_0	$(0,0,\pm 1)$	$(\pm 1,0,0)$	$(0,\pm 1,0)$
H	$\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$
指数 : i	0	2	1
個数 : k_i	2	2	2

オイラー標数を確かめると

$$\chi(\mathbb{S}^2) = \sum_{i=0}^{2} k_i(-1)^i = 2(-1)^0 + 2(-1)^1 + 2(-1)^2 = 2$$

となって確かに $\mathbb{S}^2$ のオイラー標数と一致する．

3.1.3 $\mathbb{S}^2$ 上の関数の例３ (三次関数 $f = ax^3 + by^3 + cz^3$)

関数 f を

$$f(x,y,z) = ax^3 + by^3 + cz^3 \qquad (a, b, c：定数)$$

とする．$\mathbb{S}^2$ に xy 座標系

$$(x,y,z) = (x, y, \pm\sqrt{1-x^2-y^2})$$

を f に代入すると

$$f = ax^3 + by^3 \pm c(1-x^2-y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}$$

となる．$1-x^2-y^2 = 0$ では，座標系にならないので $1-x^2-y^2 \neq 0$ で考える．ここでは，複号 $\pm$ の $+$ の場合を考える．まず，臨界点を求める．関数 f の導関数は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3ax^2 - 3cx\sqrt{1-x^2-y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3by^2 - 3cy\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

であった．f の二階導関数は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6ax + 3c(\dfrac{x^2}{z} - z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6by + 3c(\dfrac{y^2}{z} - z) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3c\dfrac{xy}{z} \end{cases}$$

となる．Hesse 行列式は

$$\det H_f(p_0) = \left\{6ax + 3c\left(\frac{x^2}{z} - z\right)\right\}\left\{6by + 3c(\frac{y^2}{z} - z)\right\} - \left(3c\frac{xy}{z}\right)^2$$

である．$\det H_f(p_0) \neq 0$ となる時，非退化な臨界点である．計算を進めていくと，以下の 3 つの場合分けが存在することが分かった．

(1) $xyz \neq 0$ の時，臨界点 p_0 は

$$p_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}(bc, ca, ab)$$

で臨界点は 2 個ある．ここで $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \neq 0$ とする．Hesse 行列式は

$$\det H_f(p_0) = \frac{5c^2}{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2}(5a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

である．よって，$c = 0$ の時は退化した臨界点である．従って，$c \neq 0$ でなければならない．同様に座標を取って考えると，$a \neq 0, b \neq 0$ であるから，$abc \neq 0$ の時，臨界点が非退化である．この時，$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \neq 0$ でもある．

(2) $x = 0, yz \neq 0$ の時，臨界点 p_0 は

$$p_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}}(0, c, b)$$

で臨界点は 2 個ある．Hesse 行列式は

$$\det H_f(p_0) = -\frac{c^2}{(b^2 + c^2)}(5b^2 + c^2)$$

である．よって，これも $abc \neq 0$ の時，臨界点が非退化である．$y = 0, zx \neq 0$ の時と $z = 0, xy \neq 0$ の時も対称性により，臨界点が 2 個ずつ存在し，やはり $abc \neq 0$ なら非退化である．

(3) $x=0, y=0, z\neq 0$ の時，臨界点 p_0 は

$$p_0=(0,0,\pm 1)$$

で臨界点は 2 個ある．Hesse 行列式は

$$\det H_f(p_0)=9c^2$$

である．よって，$c\neq 0$ の時，この臨界点は非退化である．$x=0, y\neq 0, z=0$ の時 $x\neq 0, y=0, z=0$ の時も対称性により，臨界点が 2 個ずつ存在して，$abc\neq 0$ なら非退化である．

まとめると，$abc\neq 0$ なら $f=ax^3+by^3+cz^3$ は $\mathbb{S}^2$ 上の Morse 関数であって，臨界点は下の表のようになる．

臨界点 : p_0	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}(bc,ca,ab)$
H	$\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$
指数 : i	0
個数 : k_i	2

臨界点 : p_0	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}(0,c,b)$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}(c,0,a)$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b,a,0)$
H	$\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$
指数 : i	1	1	1
個数 : k_i	2	2	2

臨界点 : p_0	$(0,0,\pm 1)$	$(0,\pm 1,0)$	$(\pm 1,0,0)$
H	$\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$
指数 : i	2	2	2
個数 : k_i	2	2	2

オイラー標数を計算してみると，

$$\chi(\mathbb{S}^2)=\sum_{i=0}^{2}k_i(-1)^i=2(-1)^0+6(-1)^1+6(-1)^2=2$$

となって，確かに $\mathbb{S}^2$ のオイラー標数と一致する．

3.1.4 $\mathbb{S}^2$ 上の関数の例４ (三次関数 $f = ax^3 + by^2 + cz$)

関数 f を

$$f(x, y, z) = ax^3 + by^2 + cz \qquad (a, b, c > 0：定数)$$

とする．いま $a \neq 0$ であり，また，$a = 1$ と考えても同様の結果が得られるので

$$\begin{aligned} f &= a(x^3 + \frac{b}{a}y^2 + \frac{c}{a}z) \\ &= x^3 + by^2 + cz \end{aligned}$$

となる．Morse 関数であるかは座標系の取り方によらないので，今回は単位球面 $\mathbb{S}^2$ 上の座標を (u, v) として考えることにして

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

とおく．まず，臨界点を求める．関数 f の導関数は，合成関数の微分公式を用いて求めると

$$\begin{cases} f_u = f_x x_u + f_y y_u + f_z z_u \\ f_v = f_x x_v + f_y y_v + f_z z_v \end{cases}$$

であった．これを 0 とおくと臨界点 p_0 において

$$\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

とすると

$$\nabla f \perp \mathbf{x}_u, \ \nabla f \perp \mathbf{x}_v$$

である．さらに球面上の関数を考えているので

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

の導関数は，合成関数の微分公式を用いて求めると

$$\begin{cases} 2xx_u + 2yy_u + 2zz_u = 0 \\ 2xx_v + 2yy_v + 2zz_v = 0 \end{cases}$$

となる．ここで

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{とすると} \begin{cases} 2\mathbf{x}\mathbf{x}_u = 0 \\ 2\mathbf{x}\mathbf{x}_v = 0 \end{cases} \text{となるので} \ \mathbf{x} \perp \mathbf{x}_u,\ \mathbf{x} \perp \mathbf{x}_v$$

よって，$\nabla f \,/\!/\, \mathbf{x}$ となることが分かる．つまり

$$\begin{pmatrix} f_x & x \\ f_y & y \\ f_z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 & x \\ 2by & y \\ c & z \end{pmatrix}$$

であるので

$$\begin{vmatrix} 3x^2 & x \\ 2by & y \end{vmatrix} = 0 \ \text{かつ} \ \begin{vmatrix} 2by & y \\ c & z \end{vmatrix} = 0$$

いま $z = c$ であり $z \neq 0$ だから，赤道上にはないことが分かる．ゆえに，座標 (u, v) を xy 座標系にとって良い．そこで，以下座標 (u, v) を座標 (x, y) で考えることにする．f の二階導関数は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + cz_{xx} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2b + cz_{yy} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = cz_{xy} \end{cases}$$

となるから Hesse 行列式は

$$\det H = (6x + cz_{xx})(2b + cz_{yy}) - (cz_{xy})^2$$

である．$\det H_f \neq 0$ となる時，非退化な臨界点である．実際に計算をすると，以下のような 4 つの場合分けが存在することが分かった．

(1) $y = 0, x = 0$ の時，臨界点 p_0 は

$$p_0 = (0, 0, \pm 1)$$

で２個ある．Hesse 行列式は

$$\det H_f(p_0) = \mp c(2b \mp c)$$

である．$\det H_f(p_0) \neq 0$ となる時，非退化な臨界点である．つまり，$2b \mp c \neq 0$ の時，臨界点が非退化である．

(2) $y = 0, x \neq 0$ の時

$$\begin{cases} 3axz = c & (1) \\ x^2 + z^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

(1)，(2) より

$$\begin{cases} xz = \dfrac{c}{3} & (3) \\ x + z = \pm\sqrt{1 + \dfrac{2c}{3}} & (4) \end{cases}$$

よって，解と係数の関係を利用することができる．また，さらに場合分けが必要だと分かる．

(a) $\dfrac{3}{2} < c$ の時，臨界点は０個である．

(b) $c = \dfrac{3}{2}$ の時，臨界点 p_0 は

$$p_0 = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$$

で２個ある．しかし，Hesse 行列式は

$$\det H_f(p_0) = 0$$

となるので，臨界点は退化している．

(c) $0 < c < \dfrac{3}{2}$ の時，臨界点 p_0 は $\xi = \sqrt{3 + 2c}$，$\eta = \sqrt{3 - 2c}$ とすると

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\pm\xi + \eta, 0, \pm\xi - \eta) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\pm\xi - \eta, 0, \pm\xi + \eta) \end{aligned}$$

で4個ある．Hesse 行列式は

$$\mathrm{det}H_f(p_0) = \left\{6xz^3 - c(1-y^2)\right\}\left\{2bz^3 - c(1-x^2)\right\} - (cxy)^2$$

である．$\det H_f(p_0) \neq 0$ となる時，非退化な臨界点である．つまり，$c \neq \pm\frac{3}{2}$ の時，臨界点が非退化である．

(3) $y \neq 0, x = 0$ の時
臨界点 p_0 は

$$p_0 = (0, \pm\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2b}\right)^2}, \frac{c}{2b})$$

で2個ある．ここで，$c < 2b$ であることに注意する．Hesse 行列式は

$$\det H_f(p_0) = \pm 4b^2\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2b}\right)^2}$$

である．$\det H_f(p_0) \neq 0$ となる時，非退化な臨界点である．つまり，$c \neq 2b$ の時，臨界点が非退化である.

(4) $y \neq 0, x \neq 0$ の時
臨界点 p_0 は

$$p_0 = (\frac{2b}{3}, \pm\sqrt{1 - \left(\frac{2b}{3}\right)^2 - \left(\frac{c}{2b}\right)^2}, \frac{c}{2b})$$

で2個ある．ここで，$c < 2b < 3$ であることに注意する．Hesse 行列式は

$$\det H = \left\{6xz^3 - c(1-y^2)\right\}\left\{2bz^3 - c(1-x^2)\right\} - c^2x^2y^2$$

である．$\det H_f(p_0) \neq 0$ となる時，非退化な臨界点である．つまり，
$b \neq \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - (3c)^2}}$ の時，臨界点が非退化である.

まとめると，$c \neq \pm 2b$ かつ $c \neq \pm\dfrac{3}{2}$ かつ $b \neq \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{9}{2}\right)^2 - (3c)^2}}$ なら $f = ax^3 + by^2 + cz$ は $\mathbb{S}^2$ 上の Morse 関数である．以上の結果をまとめると，下表のようになる．

		$x=0$	$x\neq 0$
			$0<c<\frac{3}{2}$
$y=0$	臨界点の個数	2 個	4 個
	臨界点 : p_0	$(0,0,\pm 1)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}(\pm\xi+\eta,0,\pm\xi-\eta)$ $\frac{1}{2\sqrt{3}}(\pm\xi-\eta,0,\pm\xi+\eta)$
		$2b\mp c\neq 0$ で非退化	$c\neq\pm\frac{3}{2}$ で非退化
		$c<2b$	$c<2b<3$
$y\neq 0$	臨界点の個数	2 個	2 個
	臨界点 : p_0	$(0,\pm\sqrt{1-(\frac{c}{2b})^2},\frac{c}{2b})$	$(\frac{2b}{3},\pm\sqrt{1-(\frac{2b}{3})^2-(\frac{c}{2b})^2},\frac{c}{2b})$
		$c\neq 2b$ で非退化	$b\neq\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{2}\pm\sqrt{(\frac{9}{2})^2-(3c)^2}}$ で非退化

これは複雑すぎるので，簡単な場合として $3<c<2b$ の時を考えると以下の表のようになる．

臨界点 : p_0	$(0,0,1)$	$(0,0,-1)$	$(0,\sqrt{1-(\frac{c}{2b})^2},\frac{c}{2b})$	$(0,-\sqrt{1-(\frac{c}{2b})^2},\frac{c}{2b})$
H	$\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$
指数 : i	1	0	0	0
個数 : k_i	1	1	1	1

オイラー標数を確かめてみると，

$$\chi(\mathbb{S}^2)=\sum_{i=0}^{2}k_i(-1)^i=3(-1)^0+1(-1)^1+0(-1)^2=2$$

となって確かに $\mathbb{S}^2$ のオイラー標数と一致する．

3.2 トーラス $\mathbb{T}^2$ 上の関数

ここでは，単位球面上 $\mathbb{T}^2$ 上の関数 f を考えた時に，どのような関数 f が Morse 関数になるかを考察する．座標系は

$$(x, y, z) = (\cos\theta, (\sin\theta{+}2)\cos\varphi, (\sin\theta{+}2)\sin\varphi) \qquad (0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

を用いて考えるが，$\mathbb{T}^2$ の方程式は

$$\mathbb{T}^2 \ : \ (x^2 + y^2 + z^2 + 3) = 16(y^2 + z^2)$$

とも書くことが出来る．この時，$\mathbb{T}^2$ 上の関数 f に対して Morse 関数になる為の条件を考える．また，オイラー標数 $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$ と Morse 関数の計算結果が一致するかを確認する．

3.2.1 $\mathbb{T}^2$ 上の関数の例（一次関数 $f = ax + by + cz$）

関数 f を

$$f(x, y, z) = ax + by + cy \qquad (a, b, c : \text{定数})$$

とする．$(x, y, z) = (\cos\theta, (\sin\theta + 2)\cos\varphi, (\sin\theta + 2)\sin\varphi)$ を f に代入すると

$$f = a\cos\theta + b(\sin\theta + 2)\cos\varphi + c(\sin\theta + 2)\sin\varphi$$

と表される．ここで計算を簡単にする為に $abc \neq 0$ として考える．まず，臨界点を求める．関数 f の導関数は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = -a\sin\theta + \cos\theta(b\cos\varphi + c\sin\varphi) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = (\sin\theta + 2)(-b\sin\varphi + c\cos\varphi) \end{cases}$$

であった．これを 0 とおくと，臨界点においては

$$\begin{cases} \tan\theta_0 = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a} \\ \tan\varphi_0 = \dfrac{c}{b} \end{cases}$$

の値をとる．$0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ より $\tan\theta_0$ は 4 個，$\tan\varphi_0$ は 2 個なので臨界点は 8 個と分かる．f の二階導関数は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -a\cos\theta + (-\sin\theta)(b\cos\varphi + c\sin\varphi) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -(\sin\theta + 2)(b\cos\varphi + c\sin\varphi) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \varphi} = \cos\theta(-b\sin\varphi + c\cos\varphi) \end{cases}$$

となるから Hesse 行列式は

$$\det H_f(p_0) = a^2(\sin\theta_0 + 2)(1 + \tan^2\theta_0)\cos\theta_0$$

である．$\det H_f(p_0) \neq 0$ となる時，非退化な臨界点となる．

今，$\cos\theta_0 = \pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ であるので，$\det H_f(p_0) \neq 0$ である．よって，$abc \neq 0$ の時，全て非退化な臨界点であり Morse 関数となる．

θ	$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$	$\pi < \theta_0 < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < \theta_0 < 2\pi$
H	$\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$
指数:i	1	1	0	2
個数:k_i	2	2	2	2

オイラー標数は

$$\chi(\mathbb{T}^2) = \sum_{i=0}^{2} k_i(-1)^i = 2(-1)^0 + 4(-1)^1 + 2(-1)^2 = 0$$

となる．

4 まとめ

4.1 研究結果のまとめ

単位球面 $\mathbb{S}^2$ 上とトーラス面 $\mathbb{T}^2$ 上の一次関数や二次，三次の関数 f が Morse 関数である為の条件を求めることができた．$\mathbb{S}^2$ 上の関数の例 4 に

おいては，簡単そうな関数に思えて複雑な場合分けとなり面白い結果となった．また，$\mathbb{S}^2$ と $\mathbb{T}^2$ において，Morse 関数による計算結果とオイラー標数が一致した．

4.2　卒業研究発表会での質問内容

- オイラー標数が分かると何か良いことがあるのか．
  [回答] 形状の分からない曲面 M の Morse 関数を計算をしてオイラー標数が分かれば，M の情報を得ることができる．例えば，曲面の種数なども逆算することができる．

- オイラー標数の一致を確認したいのならば全て簡単な関数を計算すれば良いのではないか．
  [回答] 確かに，オイラー標数を確認する為だけならば簡単な関数のみを計算すれば済む話であり，ほとんど全ての関数は Morse 関数である．しかし，私は Morse 関数になる為の条件が簡単になりすぎてあまり面白くないと感じた為，退化した臨界点を持つような複雑かつ特殊な関数 f を探してみた．

- Morse 関数にならないものがどのようになるか．
  [回答] 今後の課題とさせて頂きます．

4.3　今後の課題

- 退化した臨界点において，a, b, c がどのような曲線や曲面になるかを考える．例えば、単位球面 $\mathbb{S}^2$ 上で，複雑な関数の場合でも Morse 関数にならないようなものがどのような図形を描くのかを知りたい．

- ３次元空間内で実現不可能な射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上やクラインの壺 $\mathbb{K}^2$ 上の関数についてもどのような関数が Morse 関数になっているかを考える．

最後に，本研究に際して，一年間熱心なご指導をして下さった西山享教授に御礼申し上げたいと思います．多忙である中，何度も相談や添削をしてくださり心より感謝致します．また，卒業研究発表会において助言を頂いた，谷口教授，増田准教授，川上助教授，松田助教授に感謝致します．そして，一年間を共に過ごした西山研究室の皆様に感謝します．

参考文献

[松本] 松本幸夫「Morse 理論の基礎」岩波書店，2015.

[横田] 横田一郎「多様体とモース理論」現代数学社，1978.

[大田] 大田春外「楽しもう射影平面」日本評論社，2016.

[深谷] 深谷賢治「ゲージ理論とトポロジー」シュプリンガー・フェアラーク東京，1995.