正多面体に内接する図形と
p-Sylow 部分群

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科
学籍番号:15114075　菅 亮輔
指導教員 西山 享

平成 30 年 2 月 20 日

目 次

1　序論

1.1　研究の背景

本研究の動機は，私が「結晶群」という本を読んだのがきっかけである. この本 [3] には正多面体の持つ回転対称性のなす集合は，幾つかの「代数的構造」を持つと書かれており，図形の対称性を数学的に記述できることに興味を持った. また，読み進めるうちに図形の対称性と群には深い関係があることを学んだ. 本研究では図形の対称性のなす群として有名な正多面体群の構造について理解することから始めて，正多面体に内接する図形と正多面体群の部分群 (p-Sylow 部分群) との対応について研究する.

1.2　研究の主結果

正多面体は以下の条件を満たす立体のことである.

- 有限個の面で構成される凸多面体である.
- 各面は合同な正多角形からなる.
- 各頂点に集まる面の数は同一である.

正多面体は 5 種類存在し，それらは正 4 面体，正 6 面体，正 8 面体，正 12 面体，正 20 面体である. これを記号で $T_n(n = 4, 6, 8, 12, 20)$ と書く

有限群 G の位数を n とする. また，素数 p に対して n を割り切る p の最大のべき乗を p^m とする. このとき，G の部分群で位数が p^m に等しいものを G の p-Sylow 部分群という.

本論文の主結果は以下である.

- T_n に内接する図形と p-Sylow 部分群の対応

    1. T_4 に内接する図形と p-Sylow 部分群
    $p = 2$ の場合:
    2-Sylow 部分群に対応する図形:正方形 (図 4 参照).
    2-Sylow 部分群の正規化群に対応する図形:正方形 (図 4 参照).
    2-Sylow 部分群に対応する図形の個数は 3 つ.
    $P = 3$ の場合:
    3-Sylow 部分群に対応する図形 :いびつな 6 角形 (図 1, 2 参照).
    3-Sylow 部分群の正規化群に対応する図形: 正 6 角形 (図 3 参照).

    2. T_6, T_8 に内接する図形と p-Sylow 部分群
    $p = 2$ の時:
    2-Sylow 部分群に対応する図形:正方形 (図 6 参照).

2-Sylow 部分群の正規化群に対応する図形:正方形 (図 6 参照).

2-Sylow 部分群に対応する図形の個数 3 つ.

- 2-Sylow 部分群とその正規化群に対応する図形との関係

  T_4 の場合， 3-Sylow 部分群に対応するいびつな 6 角形を連続的に変形させていくと 3-Sylow 部分群の正規化群に対応する正 6 角形になった.

T_n に内接する図形と p-Sylow 部分群には深い関係があることがわかった．今回の結果を踏まえると，図形を考えれば p-Sylow 部分群がわかり, その個数もわかるということがわかった.

1.3 本論文の構成

§ 2 では正多面体群の性質を述べるために，群の定義，記号，性質ついて述べる．その後，正多面体群の合同変換，構造について述べる. § 3 では p-Sylow 部分群、安定化群について定義する．また，p-Sylow 部分群の個数の性質について述べる．その後で T_4 と T_6, T_8 の場合で p-Sylow 部分群に対応する図形を紹介をする. § 4 では研究結果のまとめと今後の課題について述べる.

2 正多面体群

2.1 群について

この節では，正多面体群の性質を述べるために，群の定義，記号，性質ついて述べる.

定義 1 (群)**.** 空でない集合 G に演算 $*$ が与えられていて，次の条件を満たすとき，$(G,*)$ は **群** であると言う.

- (結合法則)　G の任意の元 a, b, c に対して

$$a * (b * c) = (a * b) * c \tag{1}$$

  が成り立つ.

- (単位元の存在)　G の元 e が存在して，G の任意の元 a に対して

$$a * e = e * a \tag{2}$$

  が成り立つ．このとき，元 e を G の**単位元**という.

- (逆元の存在)　G の任意の元 a に対して，G の元 b が存在して

$$a * b = b * a = e \tag{3}$$

が成り立つ．このとき G の**逆元**を a^{-1} と書いて，$b = a^{-1}$ で表す．

以下群の演算 $*$ は，しばしば省略して $a * b$ と書く代わりに ab と書く．

定義 2 (有限群，位数)**.** 有限個の元からなる群を**有限群**と呼び，元の個数をその群の**位数**と呼ぶ．有限群 G の位数は $|G|$ と表される．

定義 3 (巡回群)**.** 唯一つの元で生成される群を**巡回群**という．このとき，G は次のように表される．

$$G = \langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \tag{4}$$

定義 4 (置換群)**.** 集合 X から X への全単射を X の**置換**という．X の置換全体を $S(X)$ で表す．写像の合成を積として $S(X)$ は群になる．$X_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ の時，$S(X)$ は n **次対称群**と呼ばれ，$S(X)$ を S_n で表す．すなわち

$$S_n := \{f : X_n \to X_n \mid f \text{ は全単射 }\} \tag{5}$$

である．また，S_n の偶置換全体がなす群を n **次交代群**と呼び，A_n と表す．すなわち

$$A_n := \{f \in S_n \mid f \text{ は偶置換 }\} \tag{6}$$

である. 一般に置換群の元 f は

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix} \tag{7}$$

のように書き表すことができる．

例 5 (3 次対称群 S_3)**.** S_3 の元は以下の 6 個である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

ここで (12) は互換，(123) は 3 次の巡回置換を表す．

例 6 (3 次交代群 A_3)**.** A_3 の元として以下の 3 個がある

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (132)$$

定義 7 (剰余類)**.** G を有限群とし，H を G の部分群とする．G の元 x に対して，H の元 h をかけたもの全体を G による**剰余類**という．すなわち

$$xH := \{xh \mid h \in H\} \tag{8}$$

である．xH を x を**代表元**とする**左剰余類**という．Hx を**右剰余類**という．

定義 8. G の部分群 H に対し，左剰余類 G/H の位数を $(G:H)$ と書き，H の G における**指数**という．すなわち

$$(G:H) = |G/H| \tag{9}$$

である．さらに

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|} \tag{10}$$

である．

定理 9 (Lagrange の定理)**.** G を有限群とし， H を G の部分群とする．このとき，H の位数 $|H|$ は G の位数 $|G|$ の約数である．

証明は [2,(11.1) 定理] を参照してほしい．

定義 10 (群準同型，群同型)**.** 2 つの群 G, G' に対して写像

$$\varphi : G \to G' \tag{11}$$

が性質

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad (a, b \in G) \tag{12}$$

を満たす時，φ を G から G' への準同型という．さらに，φ が全 (単) 射の時，φ を全 (単) 準同型といい，特に φ が全単射の時，φ を同型という．2 つの群 G, G' の間に同型写像が存在する時，G と G' は同型であるといい，

$$G \cong G' \tag{13}$$

と書く．

2.2 正多面体群の定義

この節では，正多面体と合同変換の定義を与えた後，正多面体群の定義をする．

定義 11 (正多面体)**.** **正多面体**は以下の条件を満たす立体のことである．

- 有限個の面で構成される凸多面体である．

- 各面は合同な正多角形からなる.
- 各頂点に集まる面の数は同一である.

正多面体は5種類存在し，それらは正4面体，正6面体，正8面体，正12面体，正20面体である．これを記号で$T_n(n=4,6,8,12,20)$と書く

定義 12 (合同変換)**.** **合同変換**とはn次元ユークリッド空間E^nからE^nへの写像fが以下を満たすことである.

- fは全単射
- E^nの任意の元x,yに対してxとyの間の距離が$f(x)$と$f(y)$の間の距離と等しい．すなわち，
$$d(x,y)=(f(x),f(y)) \quad (x,y\in E^n) \tag{14}$$
が成り立つ.

定義 13 (正多面体群)**.** 原点を重心に持つ正多面体$T_n(n=4,6,8,12,20)$を不変に保つ合同変換をT_nの合同変換といい，T_nの合同変換全体を$Q(n)$と表す．T_nの合同変換のうち回転のみからなる群を$P(n)$と表す．2つの群をまとめて**正多面体群**という.

2.3 正多面体群に属する合同変換の分類

この節では，正多面体群に属する合同変換には，どのようなものがあるのかを紹介する.

定理 14. 正多面体の重心をOとする時，正多面体群に属する回転の回転軸は

1. Oと頂点を通る直線
2. Oと辺の中点を通る直線
3. Oと面の重心を通る直線

の3種類である．これらの軸のまわりの定角度の回転は正多面体を不変に保つ．(回転角は正多面体により異なる．また，上の3つの場合，$1,2,3$によっても異なる.)

(証明)．正多面体群に属する回転は正多面体を不変に保つ．よって，正多面体の重心Oは重心Oに移る．これより回転の回転軸は重心Oを通る.

重心Oを通る直線は必ず多面体上の2点と交わる(中間値の定理)．交わる2点のうち1点をaとする．このとき，aは頂点，辺上の点，面上の点のいずれかになる.

aが頂点の時，回転軸は重心Oと頂点を通る直線になる.

a が頂点ではなく，辺 b 上にある時，辺は辺に移るので辺 b はある辺に移る．この時，a は動かない．また，a を含む辺は b しかないので，b は b に移る (b は保たれる)．よって，b の重心 (中点) は重心 (中点) に移る．これより回転軸は O と辺の中点を通る直線になる．

a が頂点でも辺上でもない面上にある場合も同様に考えると，回転軸は O と面の重心を通る直線になる事がわかる．

定理 15. 正多面体の重心を O とする時，正多面体群に属する鏡映の鏡映面は

1. ある辺と O を含む平面
2. ある辺の垂直二等分面と O を含む平面

の 2 種類である．

(証明)．正多面体群に属する鏡映は正多面体を不変に保つ．よって，正多面体の重心 O は重心 O に移る．これより鏡映の鏡映面は重心 O を通る．

重心 O を通る鏡映面は必ず多面体と交わる．鏡映面と多面体の交わりは多角形となり，点が無限個ある．

頂点は有限個なので鏡映面と多面体の交わり部分には必ず頂点以外の点が含んでる．よって，頂点以外の点を考える．

鏡映が頂点ではない辺上の点を固定した時，その辺はある辺に移る．固定点があるのでその辺は自分自身に移る．よって，辺の重心 (中点) は辺の重心 (中点) に移る．これより中点は鏡映面上にある．この場合，(1) 辺自身が鏡映面上にある場合と (2) 中点のみ鏡映面上にある場合がある．

(1) の時，鏡映面はある辺と O を含む平面になる．

次に (2) の場合，まず辺の端点について考える．端点が不変の時，鏡映面はある辺と O を含む平面になる．端点が動く時，鏡映面はある辺の垂直二等分面と O を含む平面になる．辺を含まない面上の点の場合も同様に考えると，鏡映面は 2 つの頂点と重心 O を通る平面になる．正多面体の場合，この鏡映面は定理 14 の 1 または 2 になる．

2.4 正多面体群の元と置換の対応

この節では，正多面体群と同型な群を紹介する．

定理 16. $P(4) \cong A_4$(4 次対称群)

(証明)．正 4 面体の各頂点を $1, 2, 3, 4$ とする．この時，正 4 面体を不変に保つ回転 ($P(n)$ の元) は頂点を頂点に移す．従って，正 4 面体を不変に保つ回転は頂点 $1, 2, 3, 4$ の置換を引き起こす．このような回転は定理 13 より 3 種類ある．それぞれ場合を尽くすと次のようになっている．

1. O と頂点を通る直線 (O と面の重心を通る直線) のまわりの $\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ 回転

2. O と辺の中点を通る直線のまわりの π 回転

正 4 面体の場合，O と頂点を通る直線と O と面の重心を通る直線は同じである．1 の場合，頂点に対応して軸は 4 つある．よって，回転は 8 通り．2 の場合，軸は 3 つある．よって，回転は 3 通り．これに恒等変換 e を合わせて全部で $P(n)$ の元は 12 通り存在する．正多面体群の元がある時，頂点は頂点に移るので，頂点の間の置換は全単射を引き起こす. それは S_4 の元である．また，$P(n)$ の元の間に定義される演算 (回転の合成) と A_4 の元の間に定義される演算 (互換の積) はどちらも 2 つの元を続けて行うことなので準同型が成り立つ．像は全体では A_4 にしか入っていない．よって，$P(4) \cong A_4$ である．

定理 17. $Q(4) \cong S_4$

(証明). 正 4 面体の各頂点を $1, 2, 3, 4$ とする． この時，正 4 面体を不変に保つ合同変換 ($Q(n)$ の元) は頂点を頂点に移す．従って，正 4 面体を不変に保つ合同変換は頂点 $1, 2, 3, 4$ の置換を引き起こす．$Q(4)$ の元の間に定義される演算 (回転の合成) と S_4 の元の間に 定義される演算 (互換の積) はどちらも 2 つの元を続けて行うことなので準同型が成り立つ. $Q(n)$ に属する合同変換は 1 次変換なので単射．また，$Q(n)$ に属する合同変換からすべての置換が得られるので全射．これより $Q(4) \cong S_4$ である．

下図の正多面体群 $P(n), Q(n)$ と同型な群については [2, p. 50,63] を参照.

n	4	6	8	12	20
$P(n)$	A_4	S_4	S_4	A_5	A_5
$Q(n)$	S_4	$S_4 \times Z_2$	$S_4 \times Z_2$	S_5	S_5

表 : 正多面体群 $P(n)$,$Q(n)$ と同型な群

2.5　双対多面体

この節では，双対多面体について定義する．また，その定義から得られる補題について紹介する．

定義 18 (双対多面体)**.** 双対多面体とはある多面体の頂点と面を入れ替えた立体のことをいう. 具体的には面の重心を新たな頂点とし，辺で接する面の重心同士を辺で結び，頂点で接する面の重心を結ぶ多角形を面とする.

正多面体の双対は，また正多面体になる．その関係は

- 正 4 面体 $\Longleftrightarrow$ 正 4 面体 (自己双対)
- 正 6 面体 $\Longleftrightarrow$ 正 8 面体

- 正 12 面体 $\Longleftrightarrow$ 正 20 面体

となる．これより次の補題を得る．

補題 19. 互いに双対な正多面体に対応する群は同型である．すなわち

$$\begin{cases} P(6) \cong P(8) \\ Q(6) \cong Q(8) \end{cases} \quad \begin{cases} P(12) \cong P(20) \\ Q(12) \cong Q(20) \end{cases} \tag{15}$$

である．

双対関係である互いの多面体は同じ対称性を持つ．そのため，正多面体が五種あるのに対して，正多面体群は三種しかない．

3 T_n に内接する図形と p-Sylow 部分群の対応

この章では T_n に内接する図形と p-Sylow 部分群の対応を考えるため，先に p-Sylow 部分群，正規化群，安定化群について定義する．また，p-Sylow 部分群の個数の性質について述べる．その後，T_4 と T_6, T_8 の場合で対応する図形を紹介する．

3.1 p-Sylow 部分群

定義 20 (p-Sylow 部分群)**.** G を有限群とし，H を G の部分群とする．p が素数であり，p^m を G の位数 $|G|$ を割り切る最大のべき乗とした時，H の位数 $|H| = p^m$ となる H を **p-Sylow 部分群**と呼ぶ．

定義 21 (正規化群)**.** G を有限群とし，H を G の部分群とする．このとき

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} \tag{16}$$

と表す集合を H の**正規化群**という．

定理 22 (Sylow の定理 ([2]，(20.3) 定理))**.** n_p を G の p-Sylow 部分群の個数とする時，次が成り立つ．

$$n_p = |G : N_G(H)| = \frac{|G|}{|N_G(H)|} \tag{17}$$

$$n_p \equiv 1 \text{ (mod p)} \tag{18}$$

p-Sylow 部分群の詳しい事については，同研究室の片柳創氏の論文 [5] を参照してほしい．

定義 23 (安定化群)**.** $x \in X$ に対して，x を固定する G における元全体の集合を，x の**安定化群** (*stabilizer*) と呼び，$Stab_G(x)$ と書く．すなわち

$$Stab_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\} \tag{19}$$

である．

3.2 T_4 の場合

以下 T_4 の辺の長さを 1 とする．$Q(4) \cong S_4$ を G とする．$|G| = 2^3 \cdot 3$ と素因数分解できるので G の部分群として 2-Sylow 部分群，3-Sylow 部分群しか存在しない．T_4 の各頂点を $1, 2, 3, 4$ とする．$Q(4)$ は頂点の入れ替えを行い S_4 に対応する．

3.2.1 3-Sylow 部分群

以下 x, y の条件は

$$0 < x, \quad 0 < y, \quad 0 < x + y < 1 \tag{20}$$

とする．U_3 を 3-Sylow 部分群とする．この時，$|U_3| = 3$．位数 3 となる群は巡回群のみしかない．各頂点と重心 O を通る軸のまわりの回転は位数 3 の巡回群になっている．この回転によって保たれる図形が U_3 になるものを探すと図形 $A(x \neq y$ の時$)$ が得られた．図形 A は T_4 に内接するはいびつな 6 角形である．A の安定化群は

$$Stab_G(A) = \{e, (123), (132)\} = U_3 \tag{21}$$

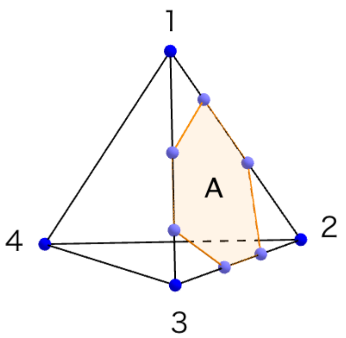

図 1:

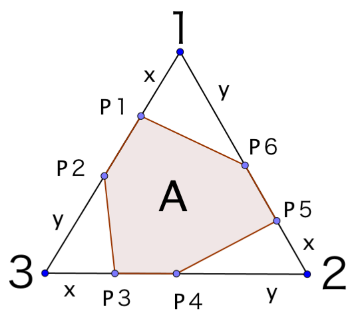

図 2:

3-Sylow 部分群 U_3 の正規化群を計算すると

$$N_G(U_3) = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\} \tag{22}$$

となることがわかった.

互換 (12), (13), (23) はそれぞれ

$$\begin{cases} \text{辺}\,3-4\,\text{と中心}\,O \\ \text{辺}\,2-4\,\text{と中心}\,O \\ \text{辺}\,1-4\,\text{と中心}\,O \end{cases}$$

を含む鏡映面による鏡映である. これらの鏡映と先ほど記述した回転をもとに図形を探すと図形 B(A の x, y が $x = y$ を満たす時) が得られた.

図形 B は T_4 の面に内接する正 6 面体である.

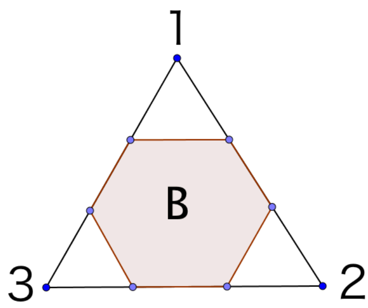

図 3:

ここで図形 A と図形 B の関係性について記述する.

$x \neq y$ の時, いびつな 6 角形となり $x = y$ の時, 正 6 角形となる. このように U_3 に対応するいびつな 6 角形を連続的に変化させると $N_G(U_3)$ に対応する正 6 角形なった. 3-Sylow 部分群の個数 n_3 は $|N_G(U_3)| = 6$ より

$$n_3 = \frac{|G|}{|N_G(U_3)|} = 4 \tag{23}$$

であるが, B はちょうど各面に 1 つずつ, 計 4 個の合同な図形としている存在していることに注意する.

3.2.2 2-Sylow 部分群

U_2 を G の 2-Sylow 部分群とする. この時, $|U_2| = 8$. これに対応する図形は図形 4 の図形 C である. 図形 C は T_4 の辺

$$\begin{cases} 1-2 \\ 2-3 \\ 3-4 \\ 4-1 \end{cases}$$

の中点を結んでできる正方形である．この時，図形 C の安定化群は

$$Stab_G(C) = \{e, (13), (24), (13)(24), (12)(34), (23)(14), (1234), (1432)\} = U_2 \tag{24}$$

となることが計算により確かめられる．

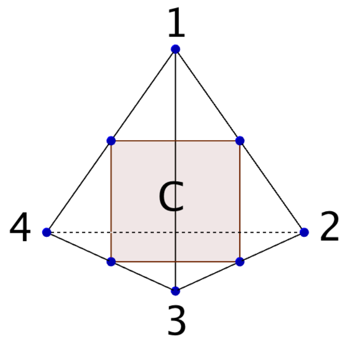

図 4:

2-Sylow 部分群 U_2 の正規化群を求めると

$$N_G(U_2) = \{e, (13), (24), (13)(24), (12)(34), (23)(14), (1234), (1432)\} \tag{25}$$

$N_G(U_2) = U_2$ となるので $N_G(U_2)$ に対応する図形も U_2 と同じ図形 C である．
n_2 は $|N_G(U_2)|$ =8 より

$$n_2 = \frac{|G|}{|N_G(U_2)|} = 3 \tag{26}$$

これより T_4 内に図形 C のような正方形は 3 つ存在する．

3.3 T_6, T_8 の場合

以下 U_2 と A については T_4 の場合と異なるものを指す．G=$Q(6) \simeq Q(8) \simeq S_4 \times Z_2$ を考える．$|G| = 48 = 2^4$･ 3 と素因数分解できるので 2-Sylow 部分群，3-Sylow 部分群しか存在しない．

正 6 面体の対角線をそれぞれ $1, 2, 3, 4$ とする． $Q(n)$ の合同変換は対角線の移り合いを行い，S_4 に対応する．$Q(n)$ の合同変換うち回転を $+1$，回転以外合同変換を -1 とし $Z_2 = \{\pm 1\}$ に対応する．

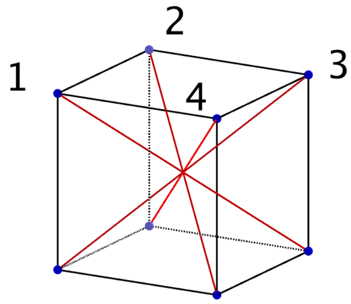

図 5:

3.3.1 2-Sylow 部分群

U_2 を G の 2-Sylow 部分群とする. この時, $|U_2| = 16$. これに対応する図形は，図形 6 の図形 A である.
図形 A は 4 つの面 ② − ⑤ の重心を結ぶ正方形である. この時, 図形 A の安定化群は

$$\begin{aligned} Stab_G(A) =& \{(e, \pm 1), ((13), \pm 1), ((24), \pm 1), ((13)(24), \pm 1), \\ & ((12)(34), \pm 1)((14)(23), \pm 1), ((1234), \pm 1)((1432), \pm 1)\}(\text{複合同順}) \end{aligned}$$

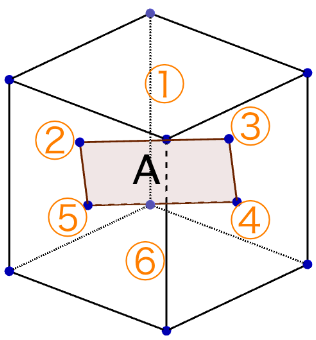

図 6:

2-Sylow 部分群 U_2 の正規化群を求めると

$$\begin{aligned} Stab_G(A) =& \{(e, \pm 1), ((13), \pm 1), ((24), \pm 1), ((13)(24), \pm 1), & (27) \\ & ((12)(34), \pm 1), ((14)(23), \pm 1), ((1234), \pm 1)((1432), \pm 1)\} & (28) \\ =& N_G(U_2)(\text{複合同順}) & (29) \end{aligned}$$

$N_G(U_2) = U_2$ となるので $N_G(U_2)$ に対応する図形も U_2 と同様に図形 A となる．n_2 は $|N_G(U_2)| = |U_2| = 16$ より

$$n_2 = \frac{|G|}{|N_G(U_2)|} = 3 \tag{30}$$

これより図形 A のような立方体は 3 つ存在する．

4 結論

4.1 研究結果のまとめ

本研究では，正多面体群について理解するために実際正多面体の模型や Geogebra を使って考察した．考察していくたびに図形の対称性と置換の対応について深く理解することができた．このことは正多面体に内接する図形と p-Sylow 部分群の対応を考える上でとても役に立った．結果として以下を求めることができた.

- T_4 時の p-Sylow 部分群, その正規化群に対応する図形 (p=2,3 の場合)
- T_6, T_8 時の 2-Sylow 部分群, その正規化群に対応する図形
- 上記の場合の Sylow 部分群に対応する図形の個数 (T_4 の場合の p=2 の時を除く)
- T_4 時の 2-Sylow 部分群とその正規化群に対応する図形との関係

4.2 今後の課題

- T_6, T_8 に内接する図形で 3-Sylow 部分群, 正規化群に対応するものを探す.
- T_{12}, T_{20} に内接する図形で p-Sylow 部分群, 正規化群に対応するものを探す.
- p-Sylow 部分群, 正規化群に対応する図形にどのような共通点があるか考察する.

最後に，卒業研究を進めるにあたり，論文の添削など丁寧かつ熱心なご指導を頂き西山亨教授に深謝いたします．また，1 年間をともに過ごした西山研究室の皆様に感謝いたします.

参考文献

[1] 志賀浩二著，群論への 30 講，朝倉書店，1989.

[2] M.A アームストロング 著・佐藤信哉 訳，対称性からの群論入門，シュプリンガージャパン，2007.

[3] 河野俊丈著，結晶群，共立出版，2015.

[4] 堀田良之著，代数入門 –群と加群– 裳華房，1987.