

# 空間内で実現不可能な 曲面のパラメータ表示と方程式

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科  
学籍番号：15112035 黒田 瑞生  
指導教員：西山 享

平成30年3月3日

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>2</b>
1.1	研究の背景	2
1.2	研究の主結果	2
1.3	本論文の構成	3
<b>2</b>	<b>位相同型な曲面</b>	<b>4</b>
2.1	位相同型	4
2.2	正三角形板から円板への位相変形	4
2.3	任意の三角形板から正三角形板への位相変形	7
<b>3</b>	<b>閉曲面の構成</b>	<b>8</b>
3.1	閉曲面の展開図	8
3.2	展開図と表示式	8
3.3	$\mathbb{R}^3$ 内での実現可能性	10
<b>4</b>	<b>射影平面</b>	<b>11</b>
4.1	クロスキャップ	11
4.2	射影平面 $\mathbb{P}^2$ の構成	12
4.3	射影平面 $\mathbb{P}^2$ のパラメータ表示	13
4.4	パラメータの消去と方程式の導出	15
4.5	方程式の定義する曲面と $\mathbb{P}^2$ の関係	16
<b>5</b>	<b>クラインの壺</b>	<b>18</b>
5.1	クラインの壺 $\mathbb{K}$ の構成	18
5.2	クラインの壺 $\mathbb{K}$ のパラメータ表示	20
5.3	パラメータの消去と方程式の導出	22
<b>6</b>	<b>結論</b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b>謝辞</b>	<b>23</b>

# 1 序論

## 1.1 研究の背景

卒業研究で教科書 [1] を輪講して位相同型について学んだ際、その自由度に驚くと共に、感覚的に行われる変形に疑問を感じた。そのため位相同型写像を数式で具体的に表すことで、位相変形についての理解を深めたいと考えた。当研究テーマはこの疑問の延長に位置している。

位相幾何学を理解する上で多く目にする曲面として、種数  $g$  の曲面に加えて実射影平面  $\mathbb{P}^2$  やクラインの壺  $\mathbb{K}$  がある。この2つの曲面は球面等の曲面と違い、表裏の区別ができず、また  $\mathbb{R}^3$  内では実現できない。しかし  $\mathbb{R}^4$  内では実現可能である。 $\mathbb{R}^3$  内では実現不可能な曲面をシンプルな数式を用いて  $\mathbb{R}^4$  内に具体的に実現することで、視覚では捉えられない複雑な曲面への理解を深めたいと考え当研究を行った。

## 1.2 研究の主結果

- (1) 位相同型の例として任意の三角形板と円板が同相であることを確認する。座標平面上に置き、各図形上の点をパラメータ表示した。これを用いて位相同型写像を具体的に数式を用いて表したところ、実際に定義を満たしていることが確認できた。
- (2) 実射影平面  $\mathbb{P}^2$  上の点を以下のようにパラメータ表示することができた。

$$(x, y, z, w) = (\sin r \cos \theta, \sin r \sin \theta, (1 - \cos r) \cos 2\theta, (1 - \cos r) \sin 2\theta) \\ (0 \leq \theta < \pi, -\pi \leq r < \pi)$$

またパラメータを消去し、次のような  $\mathbb{P}^2$  の方程式を導出することができた。

$$\begin{cases} (x^2 - y^2) = 2xyz \\ 4(z^2 + w^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 \end{cases} \quad (1)$$

方程式 (1) からこの方程式の定義する曲面を求めたところ、 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  の原点と半径2の円で分岐した二重被覆であった。

- (3)  $\mathbb{K}$  上の点に関して、以下のようにパラメータ表示することができた。

$$(x, y, z, w) = (\cos r \cos \theta, \cos r \sin \theta, \sin r \cos 2\theta, \sin r \sin 2\theta) \\ (0 \leq \theta < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq r < \frac{3}{2}\pi)$$

またパラメータを消去し次のような方程式を導出することができた。

$$\begin{cases} (x^2 - y^2) = 2xyz \\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

(2) から方程式の定義する曲面を求めたかったが、残念ながら時間が足りなくなってしまったため考察できていない。geogebra を用いて (2) の  $w$  座標を固定し、 $\mathbb{R}^3$  内に落とし込んで描いたところ図 1 のようになった。方程式 (2) に関しても二重被覆の可能性もあるかもしれない。

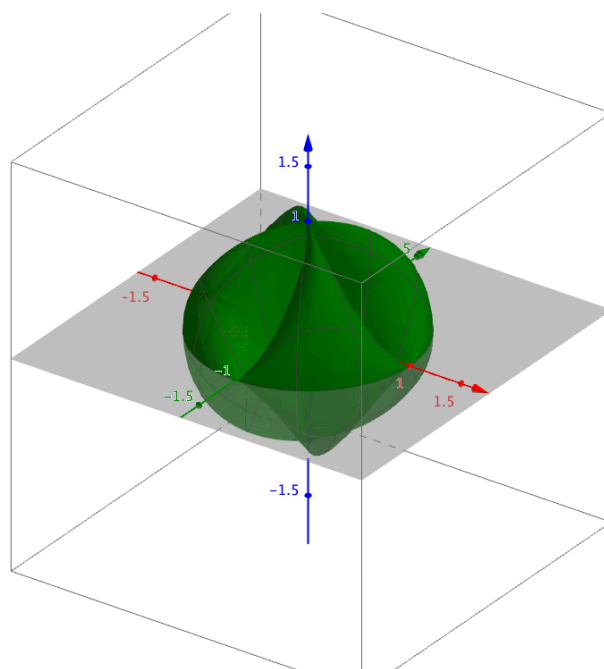


図 1: 方程式 (2) の  $\mathbb{R}^3$  内への落とし込み

### 1.3 本論文の構成

2 章では位相同型について考える。位相同型の例として任意の三角形板  $\approx$  円板を挙げ、パラメータを用いて位相同型写像を表すことで、感覚的な位相変形が位相同型の定義を満たしていることを確認する。3 章では閉曲面の展開図や表示式について紹介し、また  $\mathbb{R}^3$  内での実現可能性について触れておく。4 章では  $\mathbb{P}^2$  上の座標をパラメータ表示し、その方程式を導出する。5 章では 4 章を参考にしながら  $\mathbb{R}$  上の座標をパラメータ表示し、その方程式を導出する。

## 2 位相同型な曲面

### 2.1 位相同型

**定義 1** (位相同型、位相同型写像). 位相空間  $A, B$  に対し以下を満たす写像  $f: A \rightarrow B$  が存在するとき  $A, B$  は位相同型という.

1.  $f$  は連続かつ全単射である.
2. 逆写像  $f^{-1}$  も連続である.

このとき  $f$  を位相同型写像と呼ぶ.

定義 1 は位相空間  $A$  から  $B$  への変形に際し、切ったり貼ったりしなければ  $A$  を自由に伸縮させたり折り曲げても良いことを表している. これより例えば三角形板と円板は位相同型であると予想できるが、実際に定義を満たしているかどうかを確認したい.

### 2.2 正三角形板から円板への位相変形

任意の三角形板から円板への変形について考える前に、まず正三角形板を円板へと位相変形することを考える. 座標が扱いやすく考察しやすいためである.

**定理 2.** 正三角形板  $\approx$  円板  $\mathbb{B}^2$

[証明]. 正三角形板  $ABC$  の重心を原点  $O$  に固定し、また正三角形板  $ABC$  は単位円に内接しているとする. 正三角形板  $ABC$  の周を単位円周上に写すことを考える. 内部の点に関しては、正三角形板  $ABC$  を  $s$  ( $s \in \mathbb{R}, 0 < s$ ) 倍拡大・縮小してできる正三角形板  $A'B'C'$  を考え、同じ比率で写す. またパラメータ  $t$  ( $t \in \mathbb{R}, 0 \leq t < 3\sqrt{3}$ ) を用いて周長を表す. このときの状態を表したのが図 2 である.

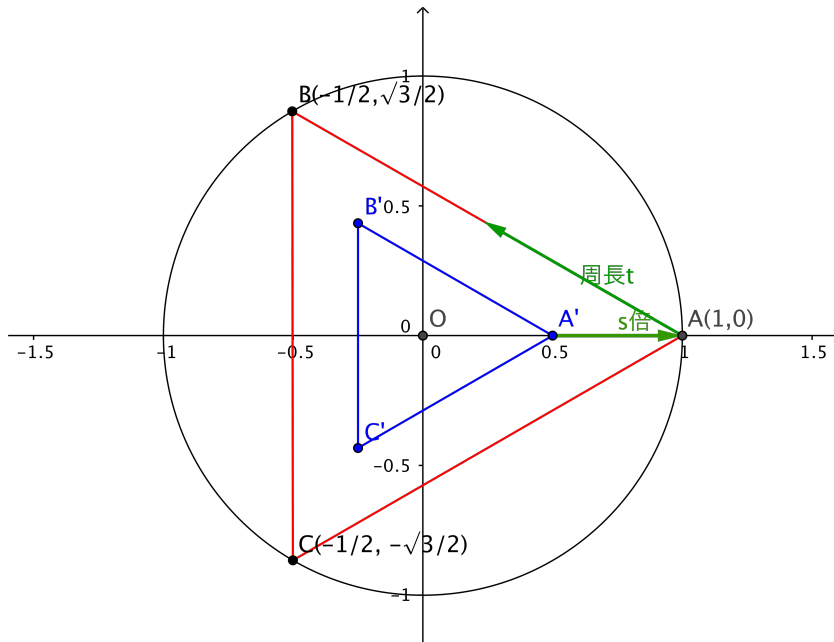


図 2: 三角形板と円板の関係

$\triangle ABC$  上の点を次のように表す.

$$T(x, y) = (x_t, y_t) = \begin{cases} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{1}{2}t) & (0 \leq t < \sqrt{3}) \\ (-\frac{1}{2}, -t + \frac{3\sqrt{3}}{2}) & (\sqrt{3} \leq t < 2\sqrt{3}) \\ (\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{7}{2}, \frac{1}{2}t - \frac{3\sqrt{3}}{2}) & (2\sqrt{3} \leq t < 3\sqrt{3}) \end{cases}$$

$\triangle ABC$  周上の点  $T$  を単位円上に写した点は次のようになる.

$$f(x, y) = \left( \frac{x_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}}, \frac{y_t}{\sqrt{x_t^2 + y_t^2}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t^2 - \sqrt{3}t + 1}}(x_t, y_t) & (0 \leq t < \sqrt{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 - 3\sqrt{3}t + 7}}(x_t, y_t) & (\sqrt{3} \leq t < 2\sqrt{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 - 5\sqrt{3}t + 19}}(x_t, y_t) & (2\sqrt{3} \leq t < 3\sqrt{3}) \end{cases}$$

$T$  を  $\triangle A'B'C'$  上に写した点を

$$T'(x, y) = s(x_t, y_t)$$

と書くと, 円周上から正三角形への写像  $f: T \rightarrow f(T')$  が次のように得られる.

$$f(sx_t, sy_t) = \begin{cases} \frac{s}{\sqrt{t^2 - \sqrt{3}t + 1}}(x_t, y_t) & (0 \leq t < \sqrt{3}) \\ \frac{s}{\sqrt{t^2 - 3\sqrt{3}t + 7}}(x_t, y_t) & (\sqrt{3} \leq t < 2\sqrt{3}) \\ \frac{s}{\sqrt{t^2 - 5\sqrt{3}t + 19}}(x_t, y_t) & (2\sqrt{3} \leq t < 3\sqrt{3}) \end{cases} \quad (3)$$

$f$  が全単射であることを  $f^{-1}$  が存在することから示す.

単位円周上の点を  $(\alpha, \beta)$  とおく.  $O$  と  $(\alpha, \beta)$  を通る直線と  $\triangle ABC$  周上の交点を  $k(\alpha, \beta)$  で表す. ( $k \in \mathbb{R}$ ) このときの状態を表したものが図3である.

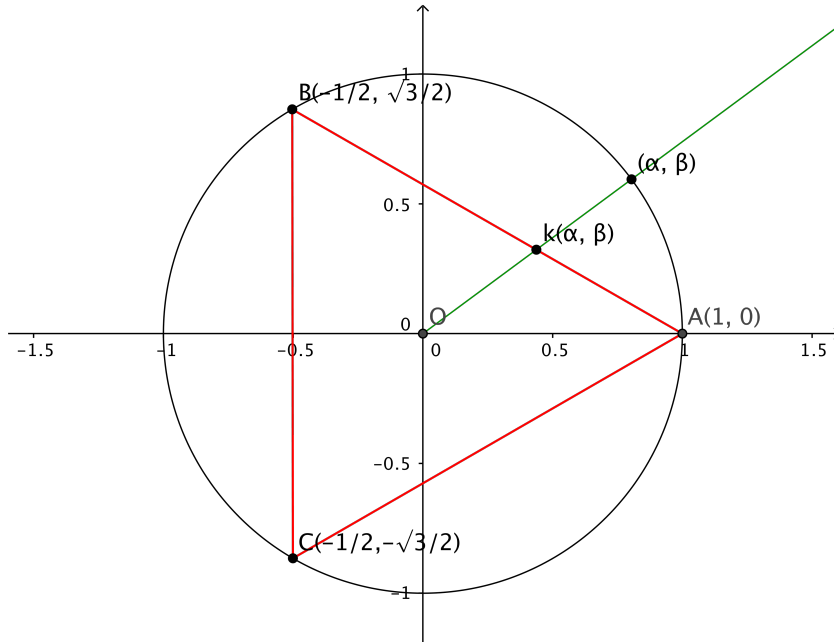


図 3: 三角形板と円板の関係

$$\begin{cases} BA: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} & (-\frac{1}{2} < x \leq 1, 0 \leq y < \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ CB: x = -\frac{1}{\sqrt{2}} & (-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y < \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ CA: y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} & (-\frac{1}{2} \leq x < 1, -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y < 0) \end{cases}$$

より,  $k$  の値を以下のようにしたとき  $f^{-1} : (\alpha, \beta) \rightarrow k(\alpha, \beta)$  は存在する.

$$k = \begin{cases} \frac{1}{\alpha + \sqrt{3}\beta} & (-\frac{1}{2} < \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1) \\ -\frac{1}{2\alpha} & (-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} < \beta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \frac{1}{\alpha - \sqrt{3}\beta} & (-\frac{1}{2} \leq \alpha < 1, -1 \leq \beta < 0) \end{cases} \quad (4)$$

$\therefore f$  は全単射.

(3)(4) は連続関数より  $f, f^{-1}$  は連続写像. (各関数の連結部分  $t = \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 0$  または  $3\sqrt{3}$  において  $f(sx_t, sy_t)$  は連続,

$$(\alpha, \beta) = (1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

において  $k$  も連続になっている。) □  
 正三角形板  $\approx$  円板  $\mathbb{B}^2$  が確認できた.

### 2.3 任意の三角形板から正三角形板への位相変形

次に任意の三角形板を正三角形板へ位相変形する.

**定理 3.** 任意の三角形板は正三角形板と同相である.

[証明]. 正三角形板  $ABC$  の各点の座標を  $A(1, 0), B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  とする. また任意の三角形板  $DEF$  の各点の座標を  $D(d_1, d_2), E(e_1, e_2), F(f_1, f_2)$  とする.

三角形板  $DEF$  上の点は  $p, q (p, q \geq 0, 0 \leq p + q \leq 1)$  を用いて,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = p \vec{d} + q \vec{e} + (1 - p - q) \vec{f}$$

で表せる. これより,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - f_1 & e_1 - f_1 \\ d_2 - f_2 & e_2 - f_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X - f_1 \\ Y - f_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X - f_1 \\ Y - f_2 \end{pmatrix}$$

三角形板  $ABC$  上の点  $(X', Y')$  も  $p, q$  を用いて同様に表せるので,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} &= AB \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - AB \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより  $g : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$  が表された. また  $g(X, Y)$  が連続写像であることも明らか. 同様の手順で  $g^{-1}(X, Y)$  の存在と連続性も示すことができる.

$\therefore$  任意の三角形板  $DEF \approx$  正三角形板  $ABC$  □

定理 2, 定理 3 をあわせて考えると任意の三角形板は円板と同相であることが具体的に確かめられる.

これより位相同型の定義を満たしていることが確認できた.



### 3 閉曲面の構成

#### 3.1 閉曲面の展開図

ここでは教科書 [1] に従って、閉曲面の多辺形の貼り合わせによる構成を紹介する。詳細については [1] を参照してほしい。

**定義 4 (ラベル).** 展開図における辺の名前をラベルと呼ぶ。各辺に矢印を付け、同名のラベルを矢印の向きに沿って貼り合わせる。

**定義 5 (展開図).** 以下の条件を満たす多辺形  $D$  が与えられたとする。

- $D$  は  $2n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) 辺形で表される。
- $D$  の各辺にはラベルが付けられ、同じラベルの辺は丁度 2 個ずつ存在する。
- $D$  の各辺には矢印により向きが与えられている。

ラベルを貼り合わせたとき、ある閉曲面  $S$  と位相同型な閉曲面ができたとする。このとき  $D$  は  $S$  の展開図であるという。

**例 6 (四面体  $T^4$  の展開).** 四面体  $T^4$  の展開図は 6 辺形となる。

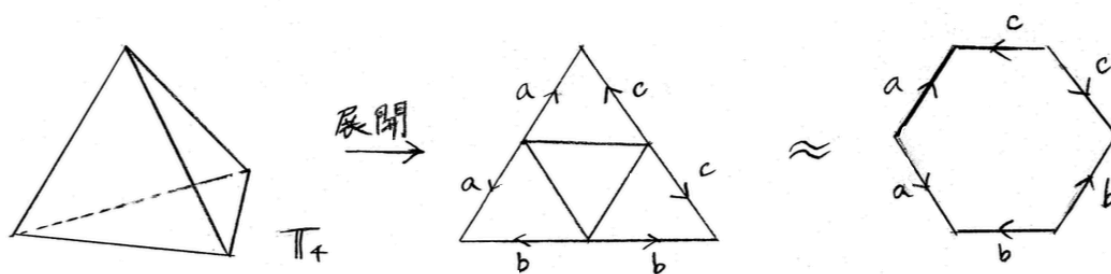


図 4: 四面体  $T^4$  の展開と展開図の位相変形

#### 3.2 展開図と表示式

**定義 7 (表示式).** 閉曲面  $S$  の展開図  $D$  が与えられたとき、 $D$  の任意の頂点を始点として、 $D$  の周りを辺に沿って 1 周する経路を表す符号付きラベルの列を  $F$  とする。このとき  $F = 1$  を展開図  $D$  から導かれる  $S$  の表示式という。

例 8 (トーラス  $T^2$  · 球  $S^2$ ). トーラス  $T^2$  · 球  $S^2$  は以下のような展開図から作成できる.

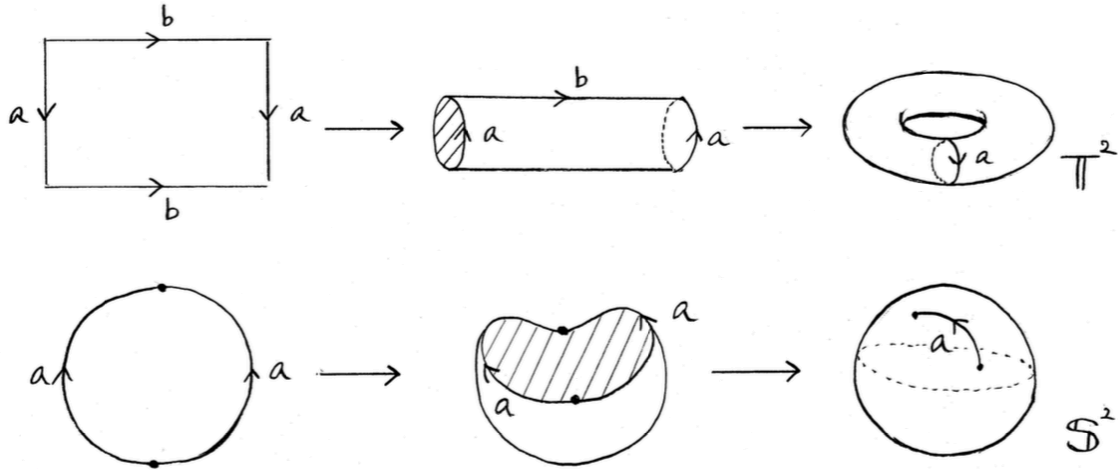


図 5: トーラス  $T^2$  · 球  $S^2$  の作成

トーラス  $T^2$  の表示式:  $a^{-1}b^{-1}ab = 1$

球  $S^2$  の表示式:  $aa^{-1} = 1$

定理 9 (展開図の表示式の組み合わせ同値変形).  $A, B, C, D$ : 符号付きラベルの列,  
 $x, y$ :  $A, B, C$  の中で使われていないラベル,  $\varepsilon = \pm 1$

- 展開図の切断と貼り合わせ

$$ABC = 1 \iff \begin{cases} Ax^\varepsilon C = 1 \\ x^\varepsilon = B \end{cases} \quad (B \neq \phi)$$

- 展開図の切り込みの解消と挿入

$$Ax^\varepsilon x^{-\varepsilon} B = 1 \iff AB = 1 \quad (A \vee B \neq \phi)$$

- 辺のラベルと符号の変更

$$AxBxC = 1 \iff Ay^\varepsilon By^\varepsilon C = 1$$

証明は参考文献 [1, p.41] の補題 2.21 を参照されたし.

- ラベルの移動 (同符号ペア)

$$ABx^\varepsilon Cx^\varepsilon D = 1 \iff Ax^\varepsilon CB^{-1}x^\varepsilon D = 1$$

$$Ax^\varepsilon BCx^\varepsilon D = 1 \iff Ax^\varepsilon Cx^\varepsilon B^{-1}D = 1$$

- ラベルの移動 (異符号ペア)

$$ABx^\varepsilon Cx^{-\varepsilon}D = 1 \iff Ax^\varepsilon Cx^{-\varepsilon}BD = 1$$

$$Ax^\varepsilon BCx^{-\varepsilon}D = 1 \iff Ax^\varepsilon CBx^{-\varepsilon}D = 1$$

証明は参考文献 [1, p.88 – 90] の補題 4.11, 12 を参照されたし.

### 3.3 $\mathbb{R}^3$ 内での実現可能性

**定義 10** (向き付け不可能). メビウスの帯を  $M$  とする. 曲面  $S$  が  $M$  を含むとき,  $S$  は向き付け不可能であるという.

**命題 11.** 向き付け不可能な曲面と, 向き付け可能な曲面は位相同型でない. 証明は [1, p.57] の命題 2.32 を参照されたし.

**定義 12** (連結和). 2つの曲面  $A, B$  に対し, 各々から 2次元円板の内部を取り除く. 残った曲面を, 取り除いて出来た境界同士で貼り合わせることによって得られる曲面を  $A$  と  $B$  の連結和と呼び,  $A\#B$  で表す.

次の定理で用いる射影平面  $\mathbb{P}^2$  に関しては, 次章で触れることとする.

**定理 13** (閉曲面の分類定理). 任意の連結な閉曲面は, 以下のいずれかの閉曲面と位相同型である.

$$(1) \underbrace{\mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2}_n = \mathbb{P}^2(n)$$

$$(2) \underbrace{\mathbb{T} \# \cdots \# \mathbb{T}}_n = \mathbb{T}(n)$$

$$(3) \mathbb{S}^2$$

証明に関しては [1, p.95] の定理 4.17, 定理 4.18 を参照されたし.

**定理 14** (ジョルダン-ブラウワーの分離定理).  $\mathbb{R}^3$  の任意の閉曲面は  $\mathbb{R}^3$  を 2つの部分に分割する.

証明に関しては [1, p.35] の定理 2.12 を参照されたし.

系 15 ( $\mathbb{R}^3$  内での実現可能性). 閉曲面  $S$  が  $\mathbb{R}^3$  内に実現できることと,  $S$  が向き付け可能であることは同値である. つまり, (閉曲面:  $S \subset \mathbb{R}^3$ )  $\iff$  ( $S$  は向き付け可能).

[証明]. ( $\implies$ ) 定理 14 より  $\mathbb{R}^3$  内に実現可能な閉曲面は, 表裏の区別ができることがわかる. 対偶をとって,

$$\text{表裏の区別ができない} \implies \mathbb{R}^3 \text{ 内に実現不可能}$$

メビウスの帯  $M$  は表裏の区別ができないので,

$$\text{向き付け不可能} \implies \mathbb{R}^3 \text{ 内に実現不可能}$$

対偶をとって,

$$\mathbb{R}^3 \text{ 内に実現可能} \implies \text{向き付け可能}$$

( $\impliedby$ ) 命題 11, 定理 13 より,

$$\text{向き付け可能} \implies \mathbb{R}^3 \text{ 内に実現可能}$$

$$\therefore (\text{閉曲面: } S \subset \mathbb{R}^3) \iff (S \text{ は向き付け可能})$$

これで系は示された. □

## 4 射影平面

### 4.1 クロスキャップ

メビウスの帯  $M$  の境界が円になるように位相変形すると, クロスキャップができる. (詳細な変形については [1, p.45] の例 2.22 を参照されたし.)

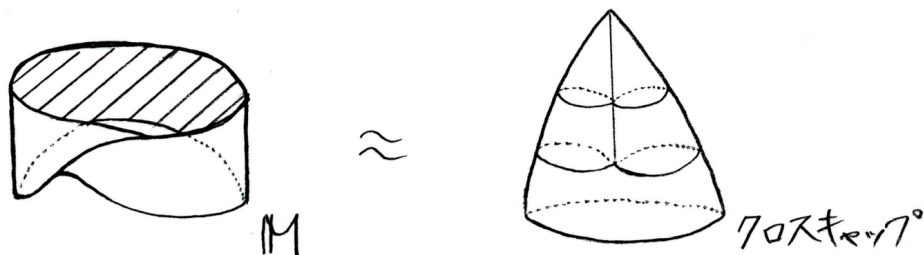


図 6: メビウスの帯  $M$  の別の姿

命題 16.  $M$  とクロスキャップは位相同型である.

[証明].  $M$  の表示式は,

$$abac^{-1} = 1 \iff \begin{cases} abd = 1 \\ d = ac^{-1} \iff a = dc \end{cases} \iff dcba = 1$$

$$\therefore dxd = 1$$

クロスキャップの表示式は,

$$daxa^{-1}d = 1 \iff dxa^{-1}da^{-1} = 1 \iff adxda^{-1} = 1$$

$$\iff dxda^{-1}a = 1 \iff dxd = 1$$

したがって  $M$  とクロスキャップは位相同型である. □

## 4.2 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の構成

射影平面  $\mathbb{P}^2$  の表示式は  $aa = 1$  である. 展開図にして考えてみると, 球体  $S^2$  の展開図のラベルが捩れの関係になった形をしている.

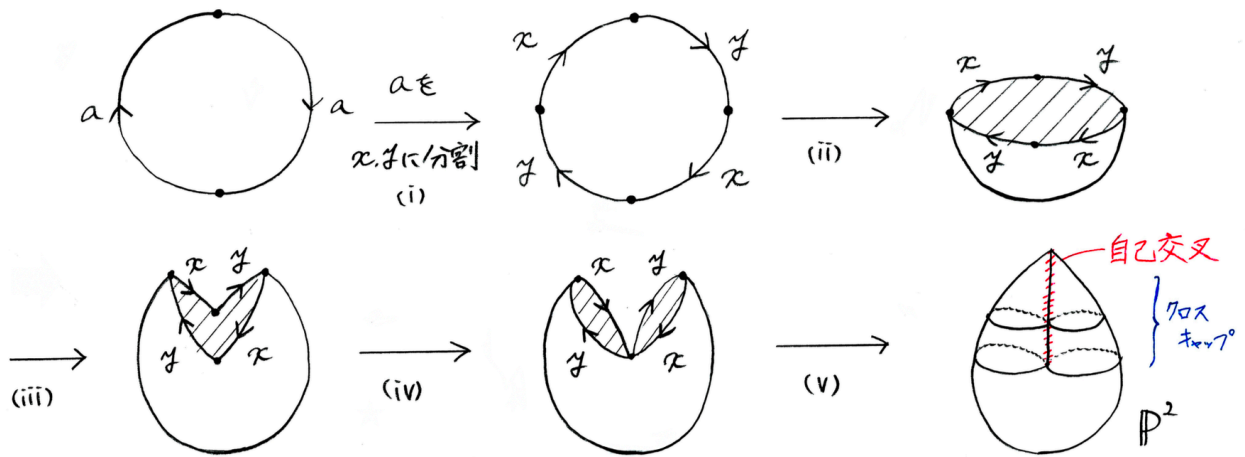


図 7:  $\mathbb{P}^2$  の展開図からの作成

[変形の方針].

- i.  $a$  を分割して  $x, y$  とする.
- ii. 展開図の底を凹ませる.
- iii. お椀型になった展開図の縁を持ち上げる.

iv. 点を貼り付ける.

v.  $x, y$  を貼り合わせる. このとき自己交叉が生じる.

ラベル  $x, y$  をそれぞれ貼り合わせようとしたとき, 自己交叉が生じ, クロスキャップができる. これにより  $M \subset \mathbb{P}^2$  であり,  $\mathbb{R}^3$  内で実現不可能になっている.

また  $\mathbb{P}^2 = M \cup B^2$  である. これは図はもちろんのこと, 命題 16 の証明内で用いた表示式  $dx^2 + dy^2 = 1$  から直感的にわかるであろう.

### 4.3 射影平面 $\mathbb{P}^2$ のパラメータ表示

射影平面  $\mathbb{P}^2$  を (3.1) の通りに作成し, 射影平面  $\mathbb{P}^2$  上の点をパラメータ表示する. このとき図 8 のように原点を通る線分  $AA'$  を丸めて  $\mathbb{P}^2$  を構成することを考える.

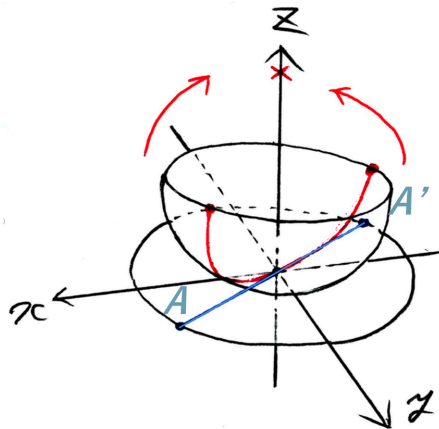


図 8: パラメータ表示の方針

実際に数値をおいていこう. 半径  $\pi$  の単位円板を  $\mathbb{P}^2$  の展開図とする. このとき原点を通る線分  $AA'$  を点  $A, A'$  が重なるように丸める.

線分  $AA'$  を丸める前に,  $xy$  平面で展開図を見たのが図 9 である. (3) の作成方法に則って言うのならば, 円周の上半分と下半分がそれぞれラベル  $a$  になっている.

このとき点  $A, A'$  の座標は,

$$\begin{cases} A(x, y) = \pi(\cos \theta, \sin \theta) \\ A'(x, y) = -\pi(\cos \theta, \sin \theta) \end{cases} \quad (0 \leq \theta < \pi)$$

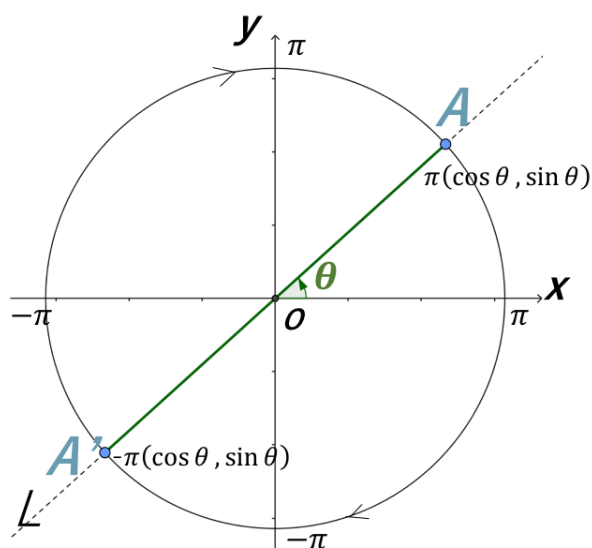


図 9:  $xy$  平面から見た  $\mathbb{P}^2$  の展開図

次に線分  $AA'$  を点  $A, A'$  に重なるように丸めたときの状態を  $Lz$  平面で見たのが図 10 である。  $L$  軸とは、丸める前の直線  $AA'$  のことを表している。

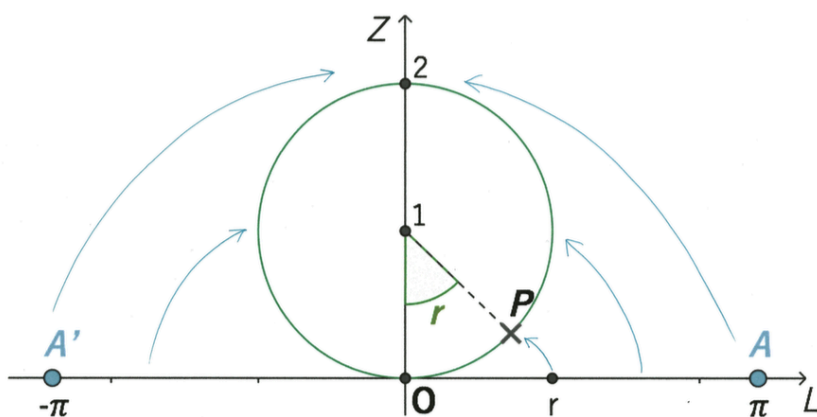


図 10:  $Lz$  平面から見た  $\mathbb{P}^2$  の展開図

このとき線分  $AA'$  上の点  $P$  の座標は、

$$P(L, z) = (\sin r, 1 - \cos r) \quad (-\pi \leq r \leq \pi)$$

$$\therefore P(x, y, z) = (\sin r \cos \theta, \sin r \sin \theta, 1 - \cos r)$$

しかし、この表示では円周上の全ての点が  $P(0, 0, 2)$  になってしまう。ここで、同一にならないように重なってしまう部分を  $\mathbb{R}^3 : P \rightarrow \mathbb{R}^4 : P'$  に移行する必要がある。

$\theta = 0, \pi$  で一致し、それ以外では異なるような関数をかけて、

$$P(x, y, z) = (\sin r \cos \theta, \sin r \sin \theta, 1 - \cos r)$$

↓

$$P'(x, y, z, w) = (\sin r \cos \theta, \sin r \sin \theta, (1 - \cos r) \cos 2\theta, (1 - \cos r) \sin 2\theta)$$

これが射影平面  $\mathbb{P}^2$  の 4 次元空間  $\mathbb{R}^4$  におけるパラメータ表示である。

**定理 17** (射影平面  $\mathbb{P}^2$  のパラメータ表示). 射影平面  $\mathbb{P}^2$  上の点は、

$$P'(x, y, z, w) = (\sin r \cos \theta, \sin r \sin \theta, (1 - \cos r) \cos 2\theta, (1 - \cos r) \sin 2\theta) \\ (0 \leq \theta < \pi, -\pi \leq r < \pi)$$

とパラメータ表示できる。

#### 4.4 パラメータの消去と方程式の導出

$P'(x, y, z, w) = (\sin r \cos \theta, \sin r \sin \theta, (1 - \cos r) \cos 2\theta, (1 - \cos r) \sin 2\theta)$  から  $\theta, r$  をそれぞれ消去し、2つの方程式を導出する。

**定理 18.**  $\mathbb{P}^2$  に属する  $(x, y, z, w)$  は

$$\begin{cases} w(x^2 - y^2) = 2xyz & (5) \\ 4(z^2 + w^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 & (6) \end{cases}$$

を満たす。

[証明].

(i)  $r$  の消去

$(\sin r \neq 0) \vee (\cos \theta \neq 0)$  かつ  $(\cos r \neq 1) \vee (\cos 2\theta \neq 0)$  のとき

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \tan \theta \\ \frac{w}{z} = \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$w(x^2 - y^2) = 2xyz \quad (7)$$

$(\sin r = 0) \vee (\cos \theta = 0)$  かつ  $(\cos r = 1) \vee (\cos 2\theta = 0)$  のときも (7) を満たす。よって式 (5) は示された。



(ii)  $\theta$  の消去

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sin^2 r \\ z^2 + w^2 = (1 - \cos r)^2 = 2 - 2 \cos r - (x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$\therefore 2 \cos r = 2 - (x^2 + y^2) - (z^2 + w^2)$$

両辺を 2 乗して整理すると,

$$4(z^2 + w^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2$$

よって式 (6) は示された.

□

## 4.5 方程式の定義する曲面と $\mathbb{P}^2$ の関係

定理 19. 2 つの方程式

$$\begin{cases} w(x^2 - y^2) = 2xyz & (8) \\ 4(z^2 + w^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 & (9) \end{cases}$$

で定義される  $\mathbb{R}^4$  の曲面は実射影平面  $\mathbb{P}^2$  の二重被覆であり, それは原点及び半径 2 の円  $\{(0, 0, z, w) | z^2 + w^2 = 2^2\}$  において分岐する.

[証明]. 実射影平面  $\mathbb{P}^2$  上の点  $(x, y, z, w)$  は定理 19 の方程式を満たしているが, その逆は明らかでない. ここでは方程式 (8), (9) を満たす点の集合が元の  $\mathbb{P}^2$  以外にどのような点を含んでいるのかを考える. そこでまず,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \alpha \geq 0 & (10) \\ z^2 + w^2 = \beta \geq 0 & (11) \end{cases}$$

とにおいて, これを式 (9) に代入すると,

$$\begin{aligned} 4(z^2 + w^2) &= (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 \iff 4\beta = (\alpha^2 + \beta^2)^2 \\ \therefore \beta &= (2 - \alpha) \pm 2\sqrt{1 - \alpha} \geq 0 \quad \therefore 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

これより  $(x, y)$  は半径  $\sqrt{\alpha}$  の円周上の点である.

$$\therefore (x, y) = \sqrt{\alpha}(\cos \theta', \sin \theta') \quad (0 \leq \theta' \leq 2\pi)$$

と書ける.

$\mathbb{P}^2$  のパラメータと合わせるために,

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \theta' \leq \pi \rightsquigarrow \theta = \theta' \\ 0 \leq \theta' \leq \pi \rightsquigarrow \theta = \theta' - \pi \end{array} \right\} \text{とする.}$$

すると  $0 \leq \theta \leq \pi$  では  $(x, y) = \pm\sqrt{\alpha}(\cos \theta, \sin \theta)$  と  $\pm\sqrt{2}$  が出現する. これを解消するために,

$$\begin{cases} +\sqrt{\alpha} = \sin r' & 0 \leq r' \leq \frac{\pi}{2} \\ -\sqrt{\alpha} = \sin r' & -\frac{\pi}{2} \leq r' \leq 0 \end{cases}$$

と  $r$  をとる.

次に  $\beta$  について考えよう.  $\alpha = \sin^2 r'$  であるから,

$$\begin{aligned} \beta &= (2 - \sin^2 r') \pm 2\sqrt{1 - \sin^2 r'} \\ &= 1 + \cos^2 r' \pm 2 \cos r' = (1 \pm \cos r')^2 \end{aligned}$$

ここで  $1 \pm \cos r'$  を  $1 - \cos r$  と統一的に表すために  $r = r' + \pi$  とすると,

$$\cos r = \cos r' + \pi = -\cos r'$$

であるから,  $-\frac{\pi}{2} \leq r \leq \frac{3}{2}\pi$  で考えると,

$$1 - \cos r = \begin{cases} 1 - \cos r' & (-\frac{\pi}{2} \leq r \leq \frac{\pi}{2}) \\ 1 + \cos r' & (\frac{\pi}{2} \leq r \leq \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

となる. 従ってこのように  $r$  をとると,  $\beta = (1 - \cos r)^2$  と統一的に書ける.

一方, 式(8)より,

$$\frac{w}{z} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

なので,

$$(z, w) = k(\cos 2\theta, \sin 2\theta) \quad (k \text{ は定数})$$

と書ける．一方  $\beta = z^2 + w^2 = k^2$  であったから，

$$\therefore k = \pm\sqrt{\beta} = \pm(1 - \cos r)$$

である．従って，

$$\therefore (z, w) = \pm(1 - \cos r)(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

となることがわかる．これより  $-\pi < r < \pi, 0 < \theta < \pi$  とすると， $(z, w)$  は 2 通りの可能性がある．従って  $\alpha \neq 0$  なら， $\mathbb{P}^2$  の点  $(x, y, z, w)$  と  $(x, y, -z, -w)$  が同時に現れる．

$\alpha = 0$  とすると  $\beta = 0$  または  $4$  であるが， $\beta = 0$  ならば  $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$  は原点である．また  $\beta = 4$  のとき  $z^2 + w^2 = 4$  より  $(x, y, z, w) = (0, 0, z, w)$  は半径 2 の円となる．これらの点は  $\mathbb{P}^2$  上に元からある点である．  $\square$

## 5 クラインの壺

### 5.1 クラインの壺 $\mathbb{K}$ の構成

クラインの壺  $\mathbb{K}$  の表示式  $ab^{-1}ab = 1$  はであり，トーラス  $\mathbb{T}$  の展開図のラベルが 1 つ捻れた関係にある展開図から作成することができる．

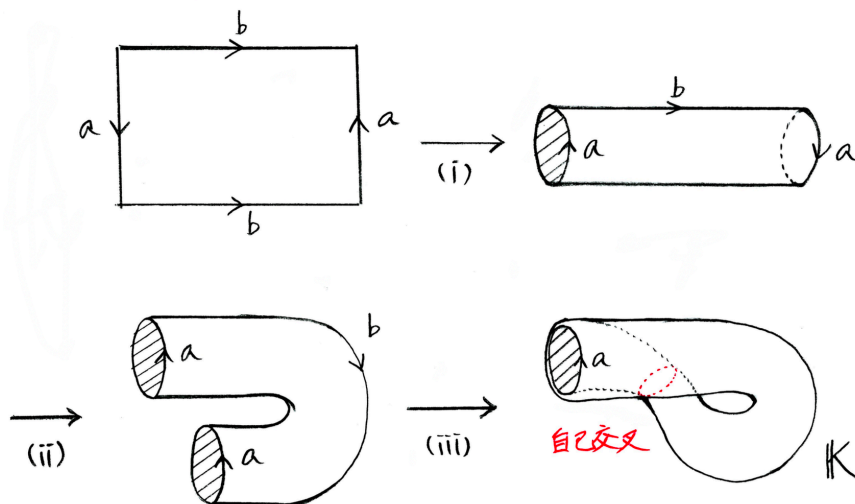


図 11: クラインの壺  $\mathbb{K}$  の作成

[変形の方針].

i.  $b$ を貼り合わせる.

ii. 円筒を引き伸ばす.

iii. 円筒の内側に向かって引き伸ばし, 自己交叉させて  $a$ を貼り合わせる.

$M$ のラベルを一部名前だけ変えたものでもあるから, 展開図から  $M \subset \mathbb{K}$ は感覚的にわかるのではないだろうか.

今回は  $\mathbb{K} \approx \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ を利用して, 射影平面  $\mathbb{P}^2$ の作成と類似した手順でパラメータ表示していく.

**命題 20.**  $\mathbb{K} \approx \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$

[証明].  $\mathbb{K}$ の表示式は,

$$\begin{aligned} abab^{-1} = 1 &\iff \begin{cases} abc = 1 \\ ab^{-1} = c \iff a = cb \end{cases} \\ &\iff cbbc = 1 \iff bbcc = 1 \\ &\therefore aabb = 1 \end{aligned}$$

$\mathbb{P}^2$ の表示式は,

$$aa = 1, bb = 1$$

$\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ を考えるにあたり, 各々から2次元円板の内部を取り除くと,

$$\begin{cases} aadd^{-1}c = 1 \\ bbee^{-1}c^{-1} = 1 \end{cases} \iff aabb = 1$$

$$\therefore \mathbb{K} \approx \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$$

□

これより  $\mathbb{K}$ は  $M$ と  $M$ をその境界の円周に沿って貼り合わせたものであることがわかる.  $M \subset \mathbb{K}$ であるから,  $\mathbb{K}$ も  $\mathbb{R}^3$ 内で実現不可能な閉曲面である.

## 5.2 クラインの壺 $\mathbb{K}$ のパラメータ表示

$\mathbb{K} \approx \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$  を利用して、 $\mathbb{K}$  上の点をパラメータ表示する．このとき図 12 のように円筒（アニュラス）を考え、一直線上の点  $A_k, A'_k$  を上部と下部でそれぞれ重ねるように変形することを考える．

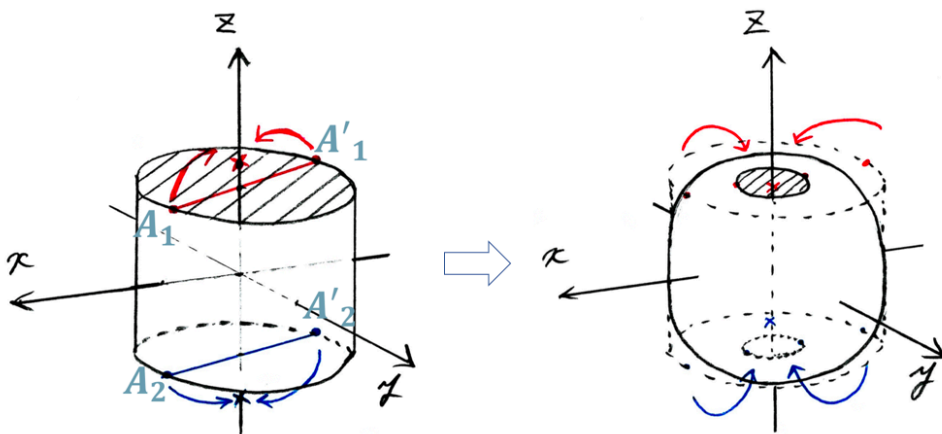


図 12: パラメータ表示の方針

高さが  $\pi$  で、半径 1 の単位円が底面になるように丸めた円筒（アニュラス）を考える．このとき点  $(0, 0, \frac{\pi}{2})$  を通る線分と円周の交点  $A_1, A'_1$ ，また点  $(0, 0, -\frac{\pi}{2})$  を通る線分と円周の交点  $A_2, A'_2$  がそれぞれ重ねるように丸める．

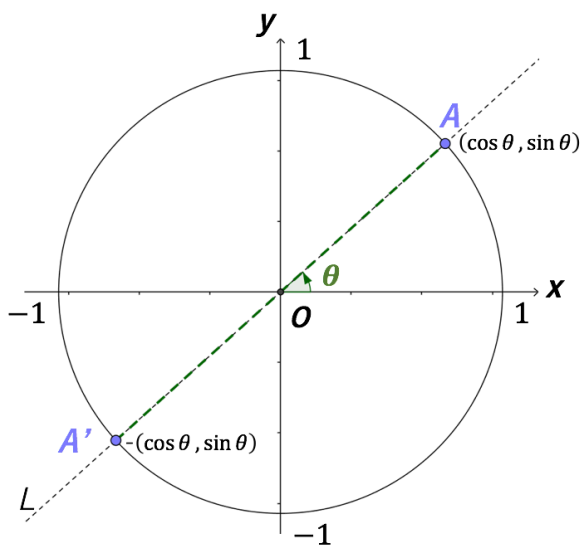


図 13:  $xy$  平面から見た円筒（アニュラス）

点  $A_k, A'_k (k = 1, 2)$  を重ねる前に,  $xy$  平面で  $z > 0$  から円筒 (アニュラス) を見たのが図 13 である. このとき点  $A_k, A'_k$  の座標は,

$$\begin{cases} A_k(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta) \\ A'_k(x, y) = (-\cos \theta, -\sin \theta) \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

$A_2, A'_2$  は  $\pi \leq \theta < 2\pi$  に含まれている.

次に点  $A_k, A'_k$  が重なるように丸めたときの状態を考える. 丸める前の直線  $A_k A'_k$  を  $xy$  平面に射影したものを  $L_0$  とする. このとき  $L_0 z$  平面で見たのが図 14 である. このとき線

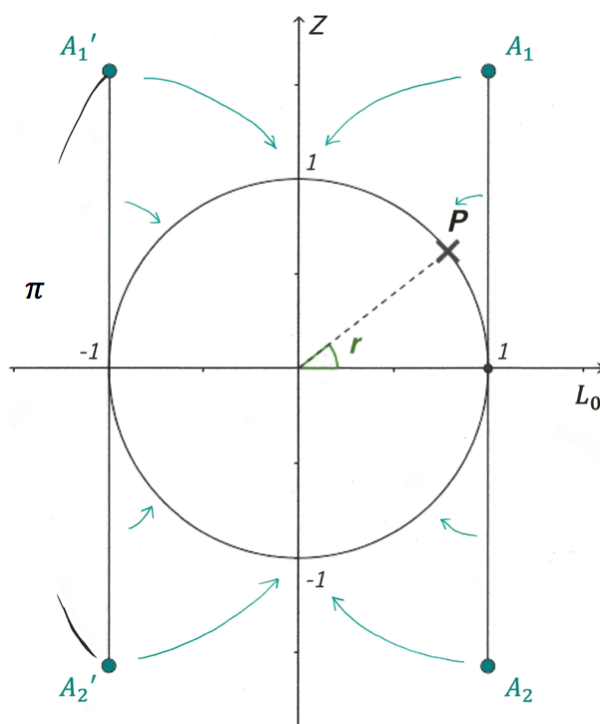


図 14:  $L_0 z$  平面から見た  $\mathbb{K}$  の組み立て

分  $A_k A'_k$  上の点  $P$  の座標は,

$$P(L_0, z) = (\cos r, \sin r) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq r < \frac{3}{2}\pi\right)$$

$A_1 A'_1$  上から  $A_2 A'_2$  上への移り変わりは  $r = \pm \frac{\pi}{2}$  で起こっている.

$\therefore P_k(x, y, z) = (\cos r \cos \theta, \cos r \sin \theta, \sin r)$  である.

ただし  $\begin{cases} k = 1 \text{ において } (0 \leq \theta < \pi, -\frac{\pi}{2} \leq r < \frac{1}{2}\pi) \\ k = 2 \text{ において } (\pi \leq \theta < 2\pi, -\frac{1}{2}\pi \leq r < \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$

しかし、この表示では  $z = \frac{\pi}{2}$  平面の円周上の点全てが  $P_1(0, 0, 1)$  になり、また  $z = -\frac{\pi}{2}$  平面の円周上の点全てが  $P_2(0, 0, 1)$  になってしまう。そこで、これらの点が同一にならないように、重なってしまう部分を4次元に移行して考える。

$\theta = 0, \pi$  及び  $\theta = \pi, 2\pi$  で一致し、それ以外では異なるような関数  $\cos 2\theta, \sin 2\theta$  を用いて  $z$  座標を膨らませることによって、

$$P(x, y, z) = (\cos r \cos \theta, \cos r \sin \theta, \sin r)$$

↓

$$P'(x, y, z, w) = (\cos r \cos \theta, \cos r \sin \theta, \sin r \cos 2\theta, \sin r \sin 2\theta)$$

となり、重なっている点が分離できた。したがって、これがクラインの壺  $\mathbb{K}$  の4次元空間  $\mathbb{R}^4$  におけるパラメータ表示である。

**定理 21** (クラインの壺のパラメータ表示). クラインの壺  $\mathbb{K}$  上の点は、

$$(x, y, z, w) = (\cos r \cos \theta, \cos r \sin \theta, \sin r \cos 2\theta, \sin r \sin 2\theta) \\ (0 \leq \theta < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq r < \frac{3}{2}\pi)$$

### 5.3 パラメータの消去と方程式の導出

$P'(x, y, z, w) = (\cos r \cos \theta, \cos r \sin \theta, \sin r \cos 2\theta, \sin r \sin 2\theta)$  から  $\theta, r$  をそれぞれ消去し、2つの方程式を導出する。

**定理 22.**  $\mathbb{K}$  に属する  $(x, y, z, w)$  は

$$\begin{cases} w(x^2 - y^2) = 2xyz & (12) \\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 & (13) \end{cases}$$

を満たす。

[証明].

(i)  $r$  の消去

$(\cos r \neq 0) \vee (\cos \theta \neq 0)$  かつ  $(\sin r \neq 1) \vee (\cos 2\theta \neq 0)$  のとき

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \tan \theta \\ \frac{w}{z} = \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$w(x^2 - y^2) = 2xyz \quad (14)$$

$(\sin r = 0) \vee (\cos \theta = 0)$  かつ  $(\cos r = 1) \vee (\cos 2\theta = 0)$  のときも (14) を満たす。よって式 (12) は示された。

(ii)  $\theta$  の消去

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \cos^2 r \\ z^2 + w^2 = \sin^2 r \end{cases}$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

よって式 (13) は示された.

□

これらの方程式は  $\mathbb{R}$  の点を全て含んでいるが, まだ  $\mathbb{R}$  そのものの定義式であるかどうかはわからないことに注意しておく. (定理 19 参照)

## 6 結論

位相変形の際に感覚的に行なっている伸縮・折り曲げ等は, 定義を満たした変形であることが確認できた. 単純な図形同士の変形でも節 2.2 及び節 2.3 程度の計算が必要であったことから, 複雑な閉曲面の位相変形を数式を用いて考えるとかなりの作業量になることだろう. 感覚的な考察ができる位相同型の有用性を改めて感じる事ができた.

$\mathbb{R}^4$  内であれば  $\mathbb{P}^2$  等の向き付け不可能な閉曲面も実現できる. このことより  $\mathbb{P}^2$  そのもののみを表す方程式が求められるのではないかと考えていたが, 残念ながら二重被覆となった.  $\mathbb{R}^4$  内で  $\mathbb{P}^2$  そのもののみを表す方程式が作れるのか, もしくはさらに高次元にすれば作れるのかどうかを今後も考察してみたい. また  $\mathbb{R}$  に関しては時間が足りず, 不完全燃焼のまま終わってしまった. こちらに関しても方程式 (2) を解いて, 方程式の定義する曲面が  $\mathbb{R}$  になっているか確認したい.

## 7 謝辞

最後に, 本研究を行うにあたり, 1年間手厚くご指導いただいた西山亨教授にお礼申し上げます. ご多忙の中1人1人と向き合い, 論文の添削や相談に乗っていただきましたこと, 深く感謝致します. また大学生活を温かく見守って下さった中山教授, 古川教授にもお礼申し上げます.

中間・卒業研究発表会でご助言いただきました谷口教授, 市原准教授, 増田准教授, 松田助教授, 川上助教授にも深く感謝致します. 特に松田助教授には, 卒業研究発表会前後にも多くの有意義なご助言をいただきました. 重ねてお礼申し上げます. また共に過ごした西山研究室の院生・学部生の皆様からもたくさんの助言や, 楽しい時間をいただきました. 1年間ありがとうございました.



## 参考文献

- [1] 大田春外「楽しもう射影平面 目で見る組み合わせトポロジーと射影幾何学」日本評論社 (2016).
- [2] 矢野公一「距離空間と位相構造」共立出版株式会社 (1997).