Mayer-Vietoris完全列を用いたホモロジー群の計算

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科
学籍番号:15114011　伊藤 和也
指導教員 西山 享

平成 30 年 2 月 20 日

目 次

1　序論

1.1　研究の背景

私が本研究を行った動機は，ポアンカレ予想に興味を持ったからである．ポアンカレ予想はポアンカレによって1904年頃に予想されていたが，100年以上かかって，2006年にグリゴリー・ペレルマンによって最終的に解決された．それは単連結な3次元閉多様体は球面と同相であることを主張している．ポアンカレ予想を使うと宇宙が閉多様体であるとしたとき，それが単連結であれば3次元球面と同相であることが結論できてしまうことに驚いた．私はその予想をよりよく理解するために，多様体のホモロジー群を計算してみることにした．
多様体のホモロジー群は位相不変量で，これによって多様体を粗く分類できる．多くの場合2つの多様体が同相でないことを判定するのに有効である．このように幾何学を代数的な道具を用いて計算することで多様体を分類できることに興味を持った．
初めは単体複体のホモロジー群を計算していたが，かなり計算が大変になることが分かった．もっと簡単に多様体 M のホモロジー群を計算するために変位レトラクトや，Mayer-Vietoris 完全列を用いるという手法を学んだ．M が2つの部分多様体 X, Y に分解できて，その部分多様体 X, Y と共通部分 $X \cap Y$ のホモロジー群が分かれば，求めたい多様体 M のホモロジー群の情報を得られることが分かった．
この手法を用いて，2次元球面 $\mathbb{S}^2$，トーラス $\mathbb{T}^2$，射影平面 $\mathbb{P}^2$，レンズ空間 $L(p,q)$ することができるようになったのでここに報告する．

1.2　研究の主結果

n 次元球体を $\mathbb{B}^n$，n 次元球面を $\mathbb{S}^n$ とする．すなわち，

$$\mathbb{B}^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

$$\mathbb{S}^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

である．円環 $\mathbb{A}$ は，

$$\mathbb{A} = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

と実現しておき，$\mathbb{T}^2$ をトーラス面，$\mathbb{T}^n$ を種数 n のトーラス面，$\mathbb{P}^2$ を実射影平面とする．これらの多様体のホモロジー群はよく知られているが，

以下の表になることを自分で計算して確かめた．(これらの多様体については，[大田] の記号に従った．詳しい定義や構成は [大田] を参照してほしい．)

	$\mathbb{B}^n$	$\mathbb{S}^n$	$\mathbb{A}$	$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{T}^n$(種数 n)	$\mathbb{P}^2$
H_0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
H_1	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^{2n}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
H_2	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0
H_3	0	0	0	0	0	0
H_n	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0

また，レンズ空間 $L(p,q)$ は 3 次元多様体の一つである ([森元, §8])．そのホモロジー群は，計算してみると

$$H_k(L(p,q)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \quad (k=0,3) \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad (k=1) \\ 0 \quad (k \neq 0,1,3) \end{cases}$$

のようになる．また定理 17 から，2 つのレンズ空間 $L(p_1,q_1), L(p_2,q_2)$ を考えると，$p_1 = p_2$ のときには，ホモロジー群が等しい．しかし，例えば $L(5,1), L(5,2)$ のように p が等しくても同相でないレンズ空間が存在することが分かった（[森元, p.61]) ので，レンズ空間だけ考えても，ホモロジー群は位相同型を判定するには十分でないことも学んだ．

1.3 本論文の構成

多様体をホモロジー群で分類するために，§2 では単体複体を用いた組み合わせ幾何学によるホモロジー群を定義する．四面体を例として，実際にホモロジー群を計算する．§3 では代数的な複体のホモロジー群を定義する．そしてホモロジー群を計算する準備として，完全列とその性質を紹介する．§4 では幾何学的対象に代数的なホモロジー群の理論を応用するために，鎖複体の完全列を扱う．また Mayer-Vietoris 完全列を紹介する．§5 では，よく知られている空間のホモロジー群を，変位レトラクトや，Mayer-Vietoris 完全列を用いて計算する． §6 では 3 次元多様体の 1 つであるレンズ空間を紹介して，§5 の結果を用いてレンズ空間のホモロジー群を計算する．最後に §7 で研究結果のまとめと今後の課題について述べる．

2 単体的複体のホモロジー群

定義 1 (単体). 原点と $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k \in \mathbb{R}^k$ の凸包と同相な多面体を k 単体といい,

$$\sigma^k = \{\sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{e_i} \mid \sum_{i=1}^{k} = 1, a_i \geq 0\}$$

と表す．$\boldsymbol{e}_i$ は，i 成分が 1 の基本ベクトルである.

定義 2 (単体的複体). K を単体の集合とする．また，単体 σ を点集合として見たとき $|\sigma|$ と書く．K は次の 2 つの条件を満たすとする.

(1) $\sigma \in K$ ならば，σ の全ての面は K の元である.

(2) $\sigma,\ \tau \in K$ ならば，$|\sigma| \cap |\tau|$ は σ 及び τ の面である.

このとき，K を単体的複体という.

定義 3 (k 単体の向き). k 単体 σ^k には向きが 2 種類ある．向きのついた k 単体を $\langle v_0 v_1 \cdots v_k \rangle$ と書き，$-\langle v_0 v_1 \cdots v_k \rangle$ は $\langle v_0 v_1 \cdots v_k \rangle$ と反対向きを持つものとする．また，同じ記号 σ^k で向きのついた k 単体，$-\sigma^k$ でその反対向きをもつ k 単体を表す.

定義 4 (単体的複体 K のホモロジー群). K に含まれる k 単体の集合 $\{\sigma^k\}$ を生成元の集合とする $\mathbb{Z}$ 加群を k 次元**鎖群**とよび，$C_k(K)$ と表す．すなわち,

$$C_k(K) = \left\{ \sum_{i=0}^{\ell} a_i \sigma_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z}, \sigma \in K, \dim \sigma_i = k \right\}$$

である．ただし $k < 0$ のときは $C_k(K) = \{0\}$ と定義する．∂_k を k 次元**境界作用素**という．$\mathrm{Ker}\,\partial_k$ を k 次元**輪体群**とよび，$Z_k(K)$ と表す．すなわち,

$$Z_k(K) = \{c \in C_k(K) \mid \partial(c) = 0\}$$

である．$\mathrm{Im}\,\partial_k$ を k 次元**境界輪体群**とよび，$B_k(K)$ と表す．すなわち,

$$B_k(K) = \{\partial(c) \mid c \in C_{k+1}(K)\}$$

とする．$H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K)$ を k 次元**ホモロジー群**という.

定義 5. $\sigma^k = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$ を複体 K の k 単体としたとき，

$$\partial \sigma^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma_i^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k \rangle$$

と定義する．ここで $\langle v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k \rangle$ は k 単体の i 番目の頂点のない $(k-1)$ 次元面である．∂ は $C_k(K)$ に $\mathbb{Z}$ 線形に拡張しておく．

2.1 4面体のホモロジー群の計算

表面のみの 4 面体

$$T_4 = \{\langle v_0 v_1 v_2 \rangle, \langle v_0 v_2 v_3 \rangle, \langle v_0 v_3 v_1 \rangle, \langle v_1 v_2 v_3 \rangle, \langle v_0 v_1 \rangle, \langle v_0 v_2 \rangle,$$
$$\langle v_0 v_3 \rangle, \langle v_1 v_2 \rangle, \langle v_2 v_3 \rangle, \langle v_3 v_1 \rangle, \langle v_0 \rangle, \langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle, \langle v_3 \rangle\}$$

のホモロジー群を定義にしたがって計算する．はじめに，3 次元以上の単体は T_4 には存在しないので $C_k(T_4) = \{0\}$ $(k \geq 3)$ である．また定義より，$C_k(T_4) = \{0\}$ $(k < 0)$ である．$0 \leq k \leq 2$ に対して鎖群は次のように与え

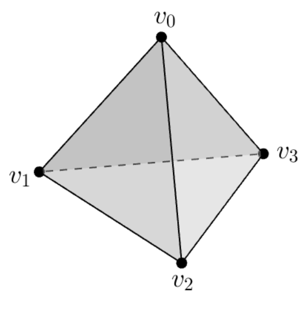

図 1: 四面体

られる．

$$\begin{aligned}
C_2(T_4) &= \{a\langle v_0 v_1 v_2 \rangle + b\langle v_0 v_2 v_3 \rangle + c\langle v_0 v_3 v_1 \rangle + d\langle v_1 v_2 v_3 \rangle \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\} \\
C_1(T_4) &= \{e\langle v_0 v_1 \rangle + f\langle v_0 v_2 \rangle + g\langle v_0 v_3 \rangle + h\langle v_1 v_2 \rangle + i\langle v_2 v_3 \rangle + j\langle v_3 v_1 \rangle \\
&\quad \mid e, f, g, h, i, j \in \mathbb{Z}\} \\
C_0(T_4) &= \{k\langle v_0 \rangle + \ell\langle v_1 \rangle + m\langle v_2 \rangle + n\langle v_3 \rangle \mid k, \ell, m, n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

となる．まず3次元単体がないので，$B_2(T_4) = \mathrm{Im}\partial_3 = \{0\}$ である．次に輪体群を調べる．Z_2 を計算するために，

$$c^2 = a_1\langle v_0v_1v_2\rangle + a_2\langle v_0v_2v_3\rangle + a_3\langle v_0v_3v_1\rangle + a_4\langle v_1v_2v_3\rangle \in C_2(T_4)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\partial c^2 &= a_1\{\langle v_1v_2\rangle - \langle v_0v_2\rangle + \langle v_0v_1\rangle\} + a_2\{\langle v_2v_3\rangle - \langle v_0v_3\rangle + \langle v_0v_2\rangle\} \\
&\quad + a_3\{\langle v_3v_1\rangle - \langle v_0v_1\rangle + \langle v_0v_3\rangle\} + a_4\{\langle v_2v_3\rangle - \langle v_1v_3\rangle + \langle v_1v_2\rangle\} \\
&= (a_1 + a_4)\langle v_1v_2\rangle + (a_2 - a_1)\langle v_0v_2\rangle + (a_1 - a_3)\langle v_0v_1\rangle \\
&\quad + (a_2 + a_4)\langle v_2v_3\rangle + (a_3 - a_2)\langle v_0v_3\rangle + (a_3 + a_4)\langle v_3v_1\rangle
\end{aligned}$$

である．したがって，$\partial c^2 = 0$ となるのは，$a_1 = a_2 = a_3 = -a_4$ のときである．ゆえに

$$\begin{aligned}
Z_2(T_4) &= \mathbb{Z}(\langle v_0v_1v_2\rangle + \langle v_0v_2v_3\rangle + \langle v_0v_3v_1\rangle - \langle v_1v_2v_3\rangle) \\
&= \mathbb{Z}(\langle v_0v_1v_2\rangle + \langle v_0v_2v_3\rangle + \langle v_0v_3v_1\rangle + \langle v_1v_3v_2\rangle) \\
&\cong \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

これより，ホモロジーは，$H_2(T_4) = Z_2(T_4)/B_2(T_4) \cong \mathbb{Z}$ であることが分かる．同様にして，$H_1(T_4)$ を計算する．

$$\begin{aligned}
\partial\langle v_1v_2v_3\rangle &= \langle v_2v_3\rangle - \langle v_1v_3\rangle + \langle v_1n_2\rangle \\
&= \{\langle v_1v_2\rangle - \langle v_0v_2\rangle + \langle v_0v_1\rangle\} + \{\langle v_2v_3\rangle - \langle v_0v_3\rangle + \langle v_0v_2\rangle\} \\
&\quad + \{\langle v_3v_1\rangle - \langle v_0v_1\rangle + \langle v_0v_3\rangle\} \\
&= \partial\langle v_0v_1v_2\rangle + \partial\langle v_0v_2v_3\rangle + \partial\langle v_0v_3v_1\rangle
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
B_1(T_4) &= \{a_1\partial\langle v_0v_1v_2\rangle + a_2\partial\langle v_0v_2v_3\rangle + a_3\partial\langle v_0v_3v_1\rangle \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{a_1(\langle v_1v_2\rangle - \langle v_0v_2\rangle + \langle v_0v_1\rangle) + a_2(\langle v_2v_3\rangle - \langle v_0v_3\rangle + \langle v_0v_2\rangle) \\
&\quad + a_3(\langle v_3v_1\rangle - \langle v_0v_1\rangle + \langle v_0v_3\rangle) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{(a_1 - a_3)\langle v_0v_1\rangle + (a_2 - a_1)\langle v_0v_2\rangle + (a_3 - a_2)\langle v_0v_3\rangle \\
&\quad + a_1\langle v_1v_2\rangle + a_2\langle v_2v_3\rangle + a_3\langle v_3v_1\rangle \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

である．また，輪体群 Z_1 を計算するために

$$\begin{aligned}
c^1 &= b_1\langle v_0v_1\rangle + b_2\langle v_0v_2\rangle + b_3\langle v_0v_3\rangle \\
&\quad + b_4\langle v_1v_2\rangle + b_5\langle v_2v_3\rangle + b_6\langle v_3v_1\rangle \in C_1(T_4)
\end{aligned}$$

に対して，$\partial c^1 = 0$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\partial c^1 &= b_1(\langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle) + b_2(\langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle) + b_3(\langle v_3\rangle - \langle v_0\rangle) \\
&\quad + b_4(\langle v_2\rangle - \langle v_1\rangle) + b_5(\langle v_3\rangle - \langle v_2\rangle) + b_6(\langle v_1\rangle - \langle v_3\rangle) \\
&= -(b_1 + b_2 + b_3)\langle v_0\rangle + (b_1 - b_4 + b_6)\langle v_1\rangle \\
&\quad + (b_2 + b_4 - b_5)\langle v_2\rangle + (b_3 + b_5 - b_6)\langle v_3\rangle = 0
\end{aligned}
$$

である．したがって

$$
\begin{cases}
b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\
b_1 - b_4 + b_6 = 0 \\
b_2 + b_4 - b_5 = 0 \\
b_3 + b_5 - b_6 = 0
\end{cases}
$$

が成り立つ．これを解くと，

$$
\begin{cases}
b_3 = b_6 - b_5 \\
b_2 = b_5 - b_4 \\
b_1 = b_4 - b_6
\end{cases}
$$

が得られる．従って

$$
\begin{aligned}
Z_1(T_4) = \{&(b_4 - b_6)\langle v_0 v_1\rangle + (b_5 - b_6)\langle v_0 v_2\rangle + (b_6 - b_5)\langle v_0 v_3\rangle \\
&+ b_4\langle v_1 v_2\rangle + + b_5\langle v_2 v_3\rangle + b_6\langle v_3 v_1\rangle \mid b_4, b_5, b_6 \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

よって

$$Z_1(T_4) \cong B_1(T_4)$$

である．つまり，$H_1(T_4) \cong \{0\}$ である．
最後に，$H_0(S_4)$ を計算する．定義より，$\partial\langle v_i\rangle = 0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ であるから

$$
\begin{aligned}
Z_0(T_4) &= C_0(T_4) \\
&= \{a_1\langle v_0\rangle + a_2\langle v_1\rangle + a_3\langle v_2\rangle + a_4\langle v_3\rangle \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^4
\end{aligned}
$$

である．また，0 次元境界輪体群 B_0 は

$$\begin{aligned}
B_0(T_4) &= \{a_1\partial\langle v_0v_1\rangle + a_2\partial\langle v_0v_2\rangle + a_3\partial\langle v_0v_3\rangle + a_4\partial\langle v_1v_2\rangle \\
&\quad +a_5\partial\langle v_2v_3\rangle + a_6\partial\langle v_3v_1\rangle \mid a_i \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le 6\} \\
&= \{a_1(\langle v_1\rangle - \langle v_0\rangle) + a_2(\langle v_2\rangle - \langle v_0\rangle) \\
&\quad +a_3(\langle v_3\rangle - \langle v_0\rangle) + a_4(\langle v_2\rangle - \langle v_1\rangle) \\
&\quad +a_5(\langle v_3\rangle - \langle v_2\rangle) + a_6(\langle v_1\rangle - \langle v_3\rangle) \mid a_i \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le 6\} \\
&= \{(-a_1 - a_2 - a_3)\langle v_0\rangle + (a_1 - a_4 + a_6)\langle v_1\rangle + (a_2 + a_4 - a_5)\langle v_2\rangle \\
&\quad +(a_3 + a_5 - a_6)\langle v_3\rangle \mid a_i \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le 6\}
\end{aligned}$$

従って

$$Z_0(T_4)/B_0(T_4) \cong \mathbb{Z}.$$

よって 4 面体 T_4 のホモロジー群は

$$H_k(T_4) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, 2) \\ 0 & (k \neq 0, 2) \end{cases}$$

となることが分かった．

3 ホモロジー群の完全列

単体的複体 K に対し，その k 次元鎖群 $C_k(K)$，輪体群 $Z_k(K)$，境界輪体群 $B_k(K)$，ホモロジー群 $H_k(K)$ などを定義した．そしてそれを計算することは，4 面体 T_4 の場合でさえ，とても手間がかかることも分かった．ここでは，鎖群 $C_k(K)$ と $C_{k-1}(K)$ の間の準同型（境界作用素）$\partial_k : C_k(K) \to C_{k-1}(K)$ に対し $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ という性質を持った抽象的な群の系列を考える．すなわち，幾何学的対象とは限らない鎖群の系列に対して，その代数的性質のみを用いて，何が，どこまで言えるのかを考えることにする．

3.1 代数的なホモロジー群

定義 6 (鎖複体)．$\mathbb{Z}$ -加群 C_q の列 $(C., \partial)$

$$C_\bullet : \cdots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0$$

であって，$\partial_{q-1}\circ\partial_q = 0$ が成り立つようなものを **鎖複体** と呼ぶ．$\partial_{q-1}\circ\partial_q = 0$ は $\operatorname{Im}\partial_{q+1} \subset \operatorname{Ker}\partial_q$ と同値であることに注意する．

定義 7 (代数的なホモロジー群)**.** $\operatorname{Ker}\partial_q$ を q 次 **輪体群** と呼び，$Z_q(C)$ と表す．すなわち，

$$Z_q(C) = \{\gamma \in C_q \mid \partial_q(\gamma) = 0\} = \operatorname{Ker}\partial_q$$

と表す．また，$\operatorname{Im}\partial_{q+1}$ を q 次 **境界輪体群** と呼び，$B_q(C)$ と表す．すなわち，

$$B_q(C) = \{\partial(\gamma) \mid \gamma \in C_{q+1}\} = \operatorname{Im}\partial_{q+1}$$

と表す．鎖複体 $C_\bullet$ の q 次ホモロジー群を $H_q(C_\bullet) = Z_q(C)/B_q(C)$ と定義する．

3.2 完全列

定義 8 (完全列)**.** G_q をアーベル群，$f_q : G_q \to G_{q+1}$ を準同型写像とする．

$$\cdots \xrightarrow{f_{q-1}} G_q \xrightarrow{f_q} G_{q+1} \xrightarrow{f_{q+1}} G_{q+2} \xrightarrow{f_{q+2}} \cdots$$

$\operatorname{Im} f_q = \operatorname{Ker} f_{q+1}$ が任意の q で成り立つとき，上の列を**完全列**という．

命題 9. 以下，0 は零加群を表す．

(1) $0 \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} 0$ が完全列であることと，$G = 0$ は同値．

(2) $0 \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H$ が完全列であることと，g が単射であることは同値．

(3) $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} 0$ が完全列であることと，f が全射であることは同値．

(4) $0 \to G \xrightarrow{f} H \to 0$ が完全列であることと，f が同型写像であることは同値

(5) $0 \to G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \to 0$ が完全列であることと，$G_3 \cong G_2/\operatorname{Im} f_1(G_1)$ であることは同値．
*(*準同型定理*)* このような列を**短完全列**とよぶ．

(証明). (1) $(\Leftarrow)$ は明らかなので，$(\Rightarrow)$ を示す．$\mathrm{Im}\, f = 0$, $\mathrm{Ker}\, g = G$ である．完全列であることより

$$G = \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f = 0$$

したがって，$G = 0$ である．
(2) 「$\mathrm{Im}\, f = 0$ で，完全である」 $\Longleftrightarrow$ 「$\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f = 0$」
$\Longleftrightarrow$ 「g は単射である」．
(3) まずは，$\mathrm{Ker}\, g = H$ である．また
「完全列である」 $\Longleftrightarrow$ 「$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g = H$」 $\Longleftrightarrow$ 「f は全射」
(4) (2) より f は単射，(3) より f は単射であるから，これは，f が同型写像であることと同値である．
(5) まずは，(3) より $\mathrm{Im}\, f_2 \cong G_3$．$f_2$ で準同型定理を用いると

$$G_2/\,\mathrm{Ker}\, f_2 \cong G_3$$

が成り立つ．また「完全列である」 $\Longleftrightarrow$ 「$\mathrm{Ker}\, f_2 = \mathrm{Im}\, f_1$」 $\Longleftrightarrow$ 「$G_3 \cong G_2/\,\mathrm{Ker}\, f_2 \cong G_2/\,\mathrm{Im}\, f_1(G_1)$」
よって $G_3 \cong G_2/\,\mathrm{Im}\, f_1(G_1)$ が示せた． $\square$

3.3 ホモロジーの完全列

定義 10 (鎖準同型). $C_\bullet, C'_\bullet$: 鎖複体
その間の準同型写像 $\{\varphi_q\}(\varphi_q : C_q \to C'_q)$ の列に対して
$\partial'_q \circ \varphi_q = \varphi_{q-1} \circ \partial_q$ が成り立つとき $\{\varphi_q\}$ を鎖準同型という．

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_\cdot : \cdots & \xrightarrow{\partial_{q+2}} & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & \cdots \to 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_q} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{q-1}} & & \\
C'_\cdot : \cdots & \xrightarrow{\partial'_{q+2}} & C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} & \xrightarrow{\partial'_{q-1}} & \cdots \to 0
\end{array}$$

命題 11. 2 つの鎖複体 $C_\bullet, C'_\bullet$ の間に鎖準同型 $\varphi = \{\varphi_q\} : C \to C'$ があるとき，
φ から導かれる写像 $\varphi_* : H_*(C) \to H_*(C')$ は準同型写像になる．

(証明). $[z] \in H_q = Z_q/B_q$ に対し $\varphi_{q*}([z]) = [\varphi_q(z)]$ と定義する．このとき以下の 3 つが成り立つことを示す．
(1) $\varphi_q(z) \in Z_q$.

(2)　$[\varphi_q(z)]$ が $[z]$ の代表元の取り方に依らない.

(3)　φ_{q*} が準同型写像.

(1) の証明.
φ_q が鎖準同型なので,

$$\begin{aligned}\partial'_q \circ \varphi_q(z) &= \varphi_{q-1} \circ \partial_q(z) \quad (z \in Z_q(C)) \\ &= \varphi_{q-1}(0) = 0\end{aligned}$$

$\varphi_q(z) \in Z_q(C')$ より (1) は示せた.
(2) の証明.
$z' = z + \partial_{q+1}(c_{q+1}) \quad (c_{q+1} \in C_{q+1})$,

$$\begin{aligned}\varphi_q(z') &= \varphi_q(z + \partial_{q+1}(c_{q+1})) \\ &= \varphi_q(z) + \varphi_q(\partial_{q+1}(c_{q+1})) \\ &= \varphi_q(z) + \partial'_{q+1} \circ \varphi_{q+1}(c_{q+1}),\end{aligned}$$

$\varphi_q(z') - \varphi_q(z) = \partial'_{q+1} \circ \varphi_{q+1}(c_{q+1}) \quad (\in B_q(C'))$,
$\therefore [\varphi_q(z')] = [\varphi_q(z)]$.
従って $\varphi_q(z)$ は $[z]$ の代表元の取り方によらない.
(3) の証明.

$$\begin{aligned}\varphi_{q*}([z_1] + [z_2]) &= \varphi_{q*}([z_1 + z_2]) \\ &= [\varphi_q(z_1 + z_2)] \\ &= [\varphi_q(z_1) + (z_2)] \\ &= [\varphi_q(z_1)] + [\varphi_q(z_2)] \\ &= \varphi_{q*}([z_1]) + \varphi_{q*}([z_2])\end{aligned}$$

したがって φ_{q*} は準同型写像である. □

命題 12 (鎖複体の短完全列). $0 \to C. \xrightarrow{\varphi} C'. \xrightarrow{\varphi'} C''. \to 0$: (完全) に対して準同型写像 $\partial_* : H_q(C'') \to H_{q-1}(C)$ が次のように定義される.

$$\partial_*([z'']) = [\varphi_{q-1}^{-1}(\partial'_q \circ \varphi'^{-1}_q(z''))] \quad (z'' \in Z_q(c''))$$

この写像を連結準同型写像という.

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\varphi_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & C'_{q+1} \arrow[r, "\varphi'_{q+1}"] \arrow[d, "\partial'_{q+1}"] & C''_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_q \arrow[r, "\varphi_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & C'_q \arrow[r, "\varphi'_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & C''_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-1} \arrow[r, "\varphi_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & C'_{q-1} \arrow[r, "\varphi'_{q-1}"] \arrow[d, "\partial'_{q-1}"] & C''_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q-1}"] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

(証明). $[z'']$ の代表元 $z'' \in Z''_q \subset C''_q$ の取り方に依らず ∂_* の右辺が決まることを示す．φ'_q が全射であることから

$$\exists z' \in C'_q \text{ s.t. } \varphi_q(z') = z''$$

である．そして

$$\varphi'_{q-1} \circ \partial'_q(z') = \partial''_q \circ \varphi'_q(z') = \partial''_q(z'') = 0$$

より $\partial'_q(z') \in \mathrm{Ker}\ \varphi'_{q-1} = \mathrm{Im}\ \varphi_{q-1}$ である．したがって

$$\exists z \in C_{q-1} \quad \text{s.t.} \quad \varphi_{q-1}(z) = \partial'_q(z')$$

よって

$$\varphi_{q-2} \circ \partial_{q-1}(z) = \partial'_{q-1} \circ \varphi_{q-1}(z) = \partial'_{q-1} \circ \partial'_q(z') = 0$$

であり φ_{q-2} は単射であるから $\partial_{q-1}(z) = 0$．$\therefore z \in Z_{q-1}$ である．これから $\varphi_{q-1}^{-1}(\partial'_q \circ \varphi'^{-1}_q(z''))$ で決まる C_{q-1} の元 z はとにかく Z_{q-1} に入っている．そこで

$$\widetilde{z''} = z'' + \partial''_{q+1}(c'') \quad (c'' \in C''_{q+1})$$

とおくと $\partial''_{q+1}(c'') = \widetilde{z''} - z''$ となる．φ'_{q+1} は全射であるから

$$\exists c' \in C'_{q+1} \quad \text{s.t.} \quad \varphi'_{q+1}(c') = c''$$

である．したがって

$$\widetilde{z''} - z'' = \partial''_{q+1}(c'') = \partial''_{q+1} \circ \varphi'_{q+1}(c') = \varphi'_q \circ \partial'_{q+1}(c')$$

となる．これより，$\widetilde{z''} = z'' + \varphi'_q \partial'_{q+1}(c')$ である．
同様に，φ'_q が全射であるから

$$\exists \widetilde{z'}, z' \in C'_{q+1} \quad \text{s.t.} \quad \widetilde{z''} = \varphi'_q(\widetilde{z'}),\ z'' = \varphi'_q(z')$$

となり，そこで

$$\varphi'_q(\widetilde{z'}) = \varphi'_q(z') + \varphi'_q \circ \partial'_{q+1}(c') = \varphi'_q(z' + \partial'_{q+1}(c'))$$

となることを考慮すれば，$\widetilde{z'} - z' - \partial'_{q+1}(c') \in \mathrm{Ker}\ \varphi'_q = \mathrm{Im}\ \varphi_q$ であることが分かる．従って $\widetilde{z'} - z' - \partial'_{q+1}(c') = \varphi_q(c)$ となる $c \in C_q$ が存在する．
また，

$$\exists z, \widetilde{z} \quad \text{s.t.} \quad \partial'_q(z') = \varphi_{q-1}(z),\ \partial'_q(\widetilde{z'}) = \varphi_{q-1}(\widetilde{z})$$

となり，ゆえに

$$\begin{aligned} \varphi_{q-1}(\widetilde{z} - z) &= \varphi_{q-1}(\widetilde{z}) - \varphi_{q-1}(z) \\ &= \partial'_q(\widetilde{z'}) - \partial'_q(z') \\ &= \partial'_q(\widetilde{z'} - z') \end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{aligned} \widetilde{z'} - z' &= \partial'_{q+1}(c') + \varphi_q(c) \\ \partial'_q(\widetilde{z'} - z') &= \partial'_q \circ \partial'_{q+1}(c') + \partial'_q \circ \varphi_q(c) - \varphi_{q-1}(\partial_q(0)) \\ &= \varphi_{q-1}(\partial_q(c)) \end{aligned}$$

である．したがって

$$\varphi_{q-1}(\widetilde{z} - z) = \varphi_{q-1}(\partial_q(c))$$

である．φ_{q-1} は単射であるから

$$\widetilde{z} - z = \partial_q(c) \in B_{q-1}(c)$$

である．よって，$[z] = [\widetilde{z}]$ を示した．したがって $\partial_*([z'']) = [\varphi_{q-1}^{-1}(\partial'_q \circ \varphi_q'^{-1}(z''))]$ は代表元 z'' の取り方によらず決まる． □

3.4 ホモロジーの長完全列

定理 13 (ホモロジー群の完全列). 鎖複体の短完全列

$$0 \to C_. \xrightarrow{\varphi} C'_. \xrightarrow{\varphi'} C''_. \to 0$$

に対してホモロジー群の完全列

$$\cdots \xrightarrow{\varphi'_{*q+1}} H_{q+1}(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_q(C) \xrightarrow{\varphi_{*q}} H_q(C') \xrightarrow{\varphi'_{*q}} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C) \cdots \to 0$$

が存在する．これをホモロジー群の**長完全列**という．

(証明). $\mathrm{Im}\ \varphi_{*q} = \mathrm{Ker}\ \varphi'_{*q}$ を証明する．

1. $\mathrm{Im}\varphi_{*q} \subset \mathrm{Ker}\varphi'_{*q}$ を示す．
   $[z'] \in \mathrm{Im}\ \varphi_{*q}$ とすると

$$\exists [z] \in H_q(C) \quad \text{s.t.} \quad [z'] = \varphi'_{*q}([z]) = [\varphi_q(z)]$$

   したがって $z' = \varphi_q(z) + \partial'_{q+1}(c') \quad (c' \in C'_{q+1})$ と書け，

$$\begin{aligned} \varphi'_{*q}([z']) &= [\varphi'_q(z)] \\ &= [\varphi'_q(\varphi_q(z) + \partial'_{q+1}(c'))] \\ &= [\varphi'_q \circ \partial'_{q+1}(c')] \\ &= [\partial''_q \circ \varphi'_{q+1}(c')] = 0 \end{aligned}$$

   であるから，$\partial''_q \circ \varphi'_{q+1}(c') \in B_q(c'') \quad (\therefore \mathrm{Im}\varphi_{*q} \subset \mathrm{Ker}\varphi'_{*q})$

2. $\mathrm{Ker}\varphi'_{*q} \subset \mathrm{Im}\varphi_{*q}$ を示す．
   $[z'] \in \mathrm{Ker}\varphi'_{*q}$ とすると $0 = \varphi'_{*q}([z']) = [\varphi'_{*q}(z')]$，

$$\exists c'' \in C''_{q+1} \quad \text{s.t.} \quad \varphi'_q(z') = \partial''_{q+1}(c'')$$

   である．また φ'_q は全射であることから

$$\exists c' \in C'_{q+1} \quad \text{s.t.} \quad c'' = \varphi'_{q+1}(c')$$

   である．よって

$$\begin{aligned} \varphi'_q(z' - \partial'_{q+1}(c')) &= \partial''_{q+1}(c'') - \varphi'_q \circ \partial'_{q+1}(c') \\ &= \partial''_{q+1}(c'') - \partial''_{q+1} \circ \varphi'_{q+1}(c') \\ &= \partial''_{q+1}(c'') - \partial''_{q+1}(c'') = 0 \end{aligned}$$

である．また，$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}\varphi$ より

$$\exists c \in C_q \quad \text{s.t.} \quad \varphi_q(c) = z' - \partial'_{q+1}(c')$$

である．一方，

$$\begin{aligned} \varphi_{q-1} \circ \partial_q(c) &= \partial'_q \circ \varphi_q(c) \\ &= \partial'_q(z' - \partial'_{q+1}(c')) = 0 \end{aligned}$$

である．φ_{q-1} は単射であるから $\partial_q(c) = 0 \quad (\therefore c \in Z_q(C))$ を得る．そして，

$$\begin{aligned} \varphi_{*q}([c]) &= [\varphi_q(c)] \\ &= [z' - \partial'_{q+1}(c')] = [z'] \end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{Ker}\varphi'_{*q} \subset \mathrm{Im}\varphi_{*q}$ ゆえに $\mathrm{Im}\varphi_{*q} = \mathrm{Ker}\varphi'_{*q}$

他のところも同様に示せる．(詳しくは [小林, p.89] を参照して欲しい) □

4 幾何学的なホモロジー群

前章までは，$\mathbb{Z}$ 加群の完全列を考えてきた．この章では，代数的なホモロジー群の理論を幾何学的対象に使うことを考える．中でも一番重要な対象が Mayer-Vietoris 完全列である．

4.1 Mayer-Vietoris 完全列

複体 K_1, K_2 に対して，$K = K_1 \cup K_2, K_1 \cap K_2 = K'$ となっているとき，写像 $\varphi : K' \to K_1 \oplus K_2$，$\psi : K_1 \oplus K_2 \to K$ を以下のように定める．

$$\begin{cases} \varphi(c) = i \oplus i'(c) = (i(c), i'(c)) & (c \in C(K')) \\ \psi(c_1, c_2) = j - j'(c_1, c_2) & ((c_1, c_2) \in C(K_1) \oplus C(K_2)) \end{cases}$$

ここで，i, i', j, j' は包含写像である．

補題 14. 以上の設定の下に，下の列は鎖複体の短完全列となる．

$$0 \xrightarrow{f} C_\bullet(K') \xrightarrow{\varphi} C_\bullet(K_1) \oplus C_\bullet(K_2) \xrightarrow{\psi} C_\bullet(K) \xrightarrow{g} 0$$

(証明). $\mathrm{Im} f = 0$ であるが,φ は包含写像であることから $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ である．したがって，$\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\varphi$ を得る．また，φ は包含写像であることから，φ は全射である．したがって，$\mathrm{Im}\varphi = (C(K'), C(K'))$ である. $\mathrm{Ker}\psi = (C(K'), C(K'))$ であるから, $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Ker}\psi$ を得る．ψ は全射であることから，$\mathrm{Im}\psi = C_q(K)$ である．また, $\mathrm{Ker} g = C_q(K)$ であるので, $\mathrm{Im}\psi = \mathrm{Ker} g$ を得る．したがって短完全列となる． □

定理 13 と補題 14 から次の系を得る．

系 15 (Mayer-Vietoris 完全列)**.** X, Y を多様体 M の部分多様体とする．すなわち，$M = X \cup Y$，　$F = X \cap Y$ とおくと

$$\cdots \xrightarrow{\psi_{*q+1}} H_{q+1}(M) \quad \xrightarrow{\partial_{*q+1}} \quad H_q(F) \xrightarrow{\varphi_{*q}} H_q(X) \oplus H_q(Y) \xrightarrow{\psi_{*q}} H_q(M)$$
$$\xrightarrow{\partial_{*q}} \quad H_{q-1}(F) \cdots \to 0$$

はホモロジー群の完全列である．これを *Mayer-Vietoris* 完全列と呼ぶ．

5　よく知られている空間のホモロジー群

以下，準備を兼ねてよく知られている多様体のホモロジー群を計算する．そのためにまず，変位レトラクトを紹介をする．

5.1　変位レトラクト

定義 16 (変位レトラクト [小林, p.23])**.** 連続写像

$$F : X \times [0,1] \to X$$

が空間 X の部分空間 A の上への**変位レトラクト**であるとは，全ての $x \in X$ と $a \in A$ に対して

$$F(x,0) = x, \quad F(x,1) \in A, \quad \text{かつ} \quad F(a,1) = a$$

であることをいう．

このとき X から A へ，変位レトラクトが存在するとき，$H_i(X) = H_i(A)$ となる．

5.2 n 次元球面のホモロジー群

n 次元球体 $\mathbb{B}^n$ は 1 点に変位レトラクトできる (つまり可縮である) から，$\mathbb{B}^n$ のホモロジーは 1 点のホモロジーと等しくなる（参考文献 [小林, p.23]）．すなわち，

$$H_k(\mathbb{B}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

を得る．また，0 次元球面は，$\mathbb{S}^0 = \{x \mid x = \pm 1\}$ であることから，

$$H_k(\mathbb{S}^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

である．

5.2.1 1 次元球面

円周の上半分を X，下半分を Y としたとき，$\mathbb{S}^1 = X \cup Y$，$\mathbb{S}^0 = X \cap Y$ であり，$X \cong Y \cong [-1, 1] \cong \mathbb{B}^1$ である．この分解に対する Mayer-Vietoris 完全列は

$$0 \xrightarrow{\psi_{*1}} H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_{*1}} H_0(\mathbb{S}^0) \xrightarrow{\varphi_{*0}} H_0(X) \oplus H_0(Y) \xrightarrow{\psi_{*0}} H_0(\mathbb{S}^1) \to 0 : (\text{完全})$$

である．さらに，$X \cong Y \cong \mathbb{B}^1$ であることに注意してホモロジー群を具体的に書くと

$$0 \xrightarrow{\psi_{*1}} H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_{*1}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{*0}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{*0}} H_0(\mathbb{S}^1) \to 0 : (\text{完全})$$

を得る．∂_{*1} の部分において準同型定理を用いると，

$$H_1(\mathbb{S}^1)/\mathrm{Ker}\partial_{*1} \cong \mathrm{Im}\partial_{*1}$$

である．また完全列であるから，$\mathrm{Ker}\partial_{*1} = \mathrm{Im}\psi_{*1}$，$\mathrm{Im}\partial_{*1} = \mathrm{Ker}\varphi_{*0}$ である．したがって

$$H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

である．また，0 次のホモロジー群は連結成分の個数だけによって決まる (参考文献 [小林, p.70])．$\mathbb{S}^1$ の連結成分は 1 個なので $H_0(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ したがって $\mathbb{S}^1$ のホモロジー群は

$$H_k(\mathbb{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0,1) \\ 0 & (k \neq 0,1) \end{cases}$$

となる．

5.2.2　2 次元球面

球面の北半球を X，南半球を Y としたとき，$\mathbb{S}^2 = X \cup Y$，$\mathbb{S}^1 = X \cap Y$ であり，$X \cong Y \cong \mathbb{B}^2$ である．この分解に対する Mayer-Vietoris 完全列は

$$\begin{gathered} 0 \xrightarrow{\partial_{*3}} H_2(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\varphi_{*2}} H_2(X) \oplus H_2(Y) \xrightarrow{\psi_{*2}} H_2(\mathbb{S}^2) \\ \xrightarrow{\partial_{*2}} H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\varphi_{*1}} H_1(X) \oplus H_1(Y) \xrightarrow{\psi_{*1}} H_1(\mathbb{S}^2) \\ \xrightarrow{\partial_{*1}} H_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\varphi_{*0}} H_0(X) \oplus H_0(Y) \xrightarrow{\psi_{*0}} H_0(\mathbb{S}^2) \to 0 : (\text{完全}) \end{gathered}$$

である．さらに，既知のホモロジー群を代入すると

$$\begin{gathered} 0 \xrightarrow{\psi_{*2}} H_2(\mathbb{S}^2) \xrightarrow{\partial_{*2}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{*1}} 0 \xrightarrow{\psi_{*1}} H_1(\mathbb{S}^2) \\ \xrightarrow{\partial_{*1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{*0}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{*0}} H_0(\mathbb{S}^2) \to 0 : (\text{完全}) \end{gathered}$$

を得る．命題 9 の (4) より，$H_2(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$ である．また，∂_{*1} の部分で準同型定理を用いると

$$H_1(\mathbb{S}^1)/\mathrm{Ker}\partial_{*1} \cong \mathrm{Im}\partial_{*1}$$

である．また完全列であることより $\mathrm{Ker}\partial_{*1} = \mathrm{Im}\psi_{*1} = 0$，$\mathrm{Im}\partial_{*1} = \mathrm{Ker}\varphi_{*0} = 0$ であるから，$H_1(\mathbb{S}^1) \cong 0$ を得る．また ψ_{*0} の部分で準同型定理を用いると

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\psi_{*0} \cong \mathrm{Im}\psi_{*0}$$

であり，ψ_{*0} は全射写像であるから $\mathrm{Ker}\psi_{*0} = \mathrm{Im}\varphi_{*0} \cong \mathbb{Z}$ である．したがって

$$H_0(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

である．また，$\varphi_{*0}\colon (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \ni (a,b) \to a - b \in \mathbb{Z}$ において準同型定理を用いると，
$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathrm{Ker}\varphi_{*0} \cong \mathrm{Im}\varphi_{*0}$，$\mathrm{Ker}\varphi_{*0} = \{(a,a) | a \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$，写像の作り方から $\mathrm{Im}\varphi_{*0} \cong \mathbb{Z}$ である．よって，$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \quad (\therefore H_0(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z})$．したがって，$\mathbb{S}^2$ のホモロジー群は

$$H_k(\mathbb{S}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, 2) \\ 0 & (k \neq 0, 2) \end{cases}$$

となる．

5.2.3　n 次元球面 $(n \geq 1)$

n 次元球面は

$$\mathbb{S}^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

である．X, Y を

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1,\ x_n \geq 1\}$$
$$Y = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1,\ x_n \leq 1\}$$

としたとき，$\mathbb{S}^n = X \cup Y, X \cap Y = \mathbb{S}^{n-1}$ であり，$X \cong Y \cong \mathbb{B}^n$ である．よって，この分解に対する Mayer-Vietoris 完全列から以下の情報を得る．

$$H_k(\mathbb{S}^n) \cong H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})\ (k \geq 2, n \geq 1)$$

であり，

$$H_k(\mathbb{S}^n) = 0 \quad (k \geq n+1)$$

が分かる．また

$$H_1(\mathbb{S}^1) \cong H_2(\mathbb{S}^2) \cong \cdots \cong H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z} \quad (k = n)$$

であるから

$$H_k(\mathbb{S}^n) \cong \cdots \cong H_1(\mathbb{S}^{n-k+1}) \quad (n-k+1 \geq 2)$$

である．したがって，n 次元球面のホモロジー群は

$$H_k(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, n) \\ 0 & (k \neq 0, n) \end{cases}$$

となる．

5.3　トーラス体 V のホモロジー群

トーラス体 V はトーラス面の中身がつまったものであり，$V \cong \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$ である．$\varphi : \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$，$\varphi_0 = id_{(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)}$，$\varphi_1 : \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$，$\varphi_1|_{\mathbb{S}^1} = id_{\mathbb{S}}$ と写像を定めたとき $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$を $\mathbb{S}^1$ に変位レトラクトできる [小林, p.29]．したがって，トーラス体 $\mathrm{V} \cong \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$ のホモロジーは，$H_k(\mathbb{S}^1)$ と同型になり，

$$H_k(\mathrm{V}) = H_k(\mathbb{S}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1) \end{cases}$$

となることが分かる．

5.4 トーラス面 $\mathbb{T}^2$ のホモロジー群

$\mathbb{T}^2$ を横にして置いて図 2 のように左半分のように（赤く色付けされている表面）を X，右半分（青く色付けされている表面）を Y とする．このとき $\mathbb{T}^2 = X \cup Y$ で，$X \cap Y$ は 2 つの円筒（蓋も底もない）の和であるが，これは円環 $\mathbb{A} = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ と同相である．さらに $\mathbb{A}$ は $\mathbb{S}^1$ に変位レトラクトできるので（参考文献 [小林, p.29]）

$$H_k(\mathbb{A}) = H_k(\mathbb{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1) \end{cases}$$

となることが分かる．

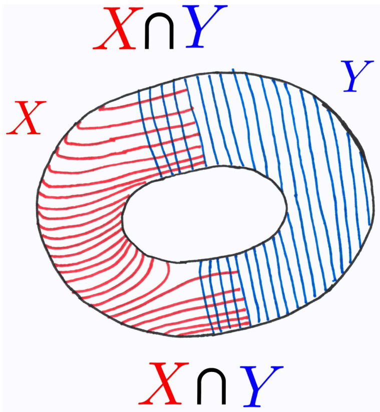

図 2: トーラス面

この分解に対する MV 完全列は

$$0 \xrightarrow{\psi_{*2}} H_2(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\partial_{*2}} H_1(F) \xrightarrow{\varphi_{*1}} H_1(X) \oplus H_1(Y) \xrightarrow{\psi_{*1}} H_1(\mathbb{T}^2)$$

$$\xrightarrow{\partial_{*1}} H_0(F) \xrightarrow{\varphi_{*0}} H_0(X) \oplus H_0(Y) \xrightarrow{\psi_{*0}} H_0(\mathbb{T}^2) \to 0 : \text{（完全）}$$

となるが，これに上で得られた既知のホモロジー群を代入すると

$$0 \xrightarrow{\psi_{*2}} H_2(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\partial_{*2}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{*1}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{*1}} H_1(\mathbb{T}^2)$$

$$\xrightarrow{\partial_{*1}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{*0}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{*0}} H_0(\mathbb{T}^2) \to 0 : \text{（完全）}$$

を得る．また，∂_{*2} の部分に準同型定理を用いると，$H_2(\mathbb{T}^2)/\mathrm{Ker}\partial_{*2} \cong \mathrm{Im}\partial_{*2}$ が得られる．また，完全列であることから，$\mathrm{Ker}\partial_{*2} = \mathrm{Im}\psi_{*2} = 0$，$\mathrm{Im}\partial_{*2} = \mathrm{Ker}\varphi_{*1}$ を得る．一方

$$\varphi_{*1} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \ni (a,b) \mapsto (a-b, a-b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

であることから，$\mathrm{Ker}\,\varphi_{*1} = \{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ である．したがって，$H_2(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}$ である．また，ψ_{*1} の部分に準同型定理を用いると，$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\psi_{*1} \cong \mathrm{Im}\psi_{*1}$ が得られる．∂_{*1} が零写像であることから，ψ_{*1} は全射写像なので，$\mathrm{Im}\psi_{*1} \cong H_1(\mathbb{T}^2)$ である．$\mathrm{Ker}\psi_{*1} = \mathrm{Im}\varphi_{*1} = (0,0) = 0$ であるから，$H_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である．また，$\mathbb{T}^2$ の連結成分は 1 個なので，$H_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}$ となる．したがって，$\mathbb{T}^2$ のホモロジーは

$$H_k(\mathbb{T}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, 2) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (k = 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1, 2) \end{cases}$$

となる．

5.5 射影平面のホモロジー群

射影平面 $\mathbb{P}^2$ は，円板 $\mathbb{B}^2$ の境界 $\partial\mathbb{B}^2$ とメビウスの帯 M の境界 ∂M を貼り合わせてできる（参考文献 [大田, p.56]）.
円板 $\mathbb{B}^2$ を X，メビウスの帯 M を Y としたとき，貼り合わせ方から
$\mathbb{P}^2 = X \cup Y$，$\mathbb{S}^1 \cong X \cap Y$ である．$Y \cong M$ は $\mathbb{S}^1$ に変位レトラクトできるので（参考文献 [小林, p.29]）

$$H_k(M) = H_k(\mathbb{S}^1) \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1) \end{cases}$$

この分解に対する MV 完全列は

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{\psi_{*2}} H_2(X \cup Y) \\ &\xrightarrow{\partial_{*2}} H_1(X \cap Y) \xrightarrow{\varphi_{*1}} H_1(X) \oplus H_1(Y) \xrightarrow{\psi_{*1}} H_1(X \cup Y) \\ &\xrightarrow{\partial_{*1}} H_0(X \cap Y) \xrightarrow{\varphi_{*0}} H_0(X) \oplus H_0(Y) \xrightarrow{\psi_{*0}} H_0(X \cup Y) \to 0 : \text{（完全）} \end{aligned}$$

である．これに既知のホモロジー群を代入すると

$$
\begin{aligned}
0 &\xrightarrow{\psi_{*2}} H_2(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\partial_{*2}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{*1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{*1}} H_1(\mathbb{P}^2) \\
&\xrightarrow{\partial_{*1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{*0}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{*0}} H_0(\mathbb{P}^2) \to 0 : （完全）
\end{aligned}
$$

を得る．また，∂_{*2} の部分で準同型定理を用いると，$H_2(\mathbb{P}^2)/\mathrm{Ker}\partial_{*2} \cong \mathrm{Im}\partial_{*2}$ を得る．また，完全列であることから，$\mathrm{Ker}\partial_{*2} = \mathrm{Im}\psi_{*2} = 0$，$\mathrm{Im}\partial_{*2} = \mathrm{Ker}\varphi_{*1} = 0$ であるから，$H_2(\mathbb{T}^2) \cong 0$ である．同様に，ψ_{*1} の部分で準同型定理を用いると，$\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\psi_{*1} \cong \mathrm{Im}\psi_{*1}$ を得る．一方

$$\varphi_{*1} : \mathbb{Z} \ni a \mapsto 2a \in \mathbb{Z}$$

であることから，$\mathrm{Ker}\psi_{*1} = \mathrm{Im}\varphi_{*1} = 2\mathbb{Z}$ を得る．∂_{*1} が零写像であることから ψ_{*1} は全射写像なので，$\mathrm{Im}\psi_{*1} \cong H_1(\mathbb{P}^2)$
したがって $H_1(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．
また，$\mathbb{P}^2$ の連結成分は 1 個なので，$H_1(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}$ である．したがって $\mathbb{P}^2$ のホモロジーは

$$H_k(\mathbb{P}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \quad (k=0) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (k=1) \\ 0 \quad (k \neq 0,1) \end{cases}$$

となる．

6　レンズ空間とそのホモロジー群

3 次元多様体の 1 つであるレンズ空間のホモロジー群を計算する．そのためにまずレンズ空間の定義をする．

6.1　レンズ空間の定義

$\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ を 2 つのトーラス体とする．図 3 のような 2 つの円周 ℓ, m に対して，ℓ をロンギチュード，m をメリディアンという．

いま，$p,\ q$ を互いに素な正の整数とし，α をロンギチュード方向に p 回，メリディアン方向に q 回ひねって巻いた 1 点に可縮でない (1 点に変位レトラクトできない)$\partial\mathrm{V}_1$ 上の単純閉曲線とする．β をメリディアン方向に

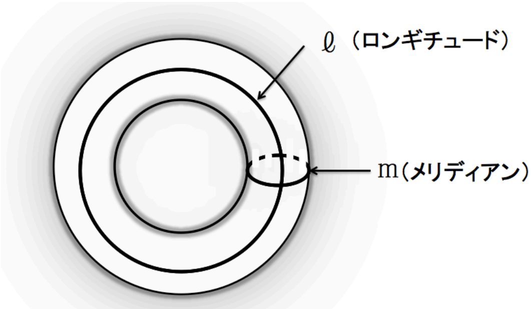

図 3: トーラス体

1 回巻いた 1 点に可縮でない $\partial \mathrm{V}_2$ 上の単純閉曲線とする．V_1, V_2 の表面を，β を α に沿って貼り合わせてできた 3 次元多様体をレンズ空間 $L(p,q)$ という．代表的なレンズ空間の例としては $L(1,0)$ の 3 次元球面がある．

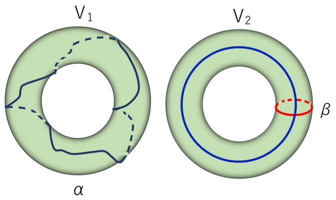

図 4:

6.2　レンズ空間のホモロジー群

トーラス体 V_1 を X，V_2 を Y としたとき，レンズ空間の作り方から $L(p,q) \cong X \cup Y, \quad \mathbb{T}^2 \cong X \cap Y$ であるため，

$$X \cong \mathrm{V}_1, \quad Y \cong \mathrm{V}_2$$

である．この分解に対する Mayer-Vietoris 完全列は

$$\begin{aligned} 0 \ &\xrightarrow{\psi_{*3}} \ H_3(L) \\ &\xrightarrow{\partial_{*3}} \ H_2(X \cap Y) \xrightarrow{\varphi_{*2}} H_2(X) \oplus H_2(Y) \xrightarrow{\psi_{*2}} H_2(L) \\ &\xrightarrow{\partial_{*2}} \ H_1(X \cap Y) \xrightarrow{\varphi_{*1}} H_1(X) \oplus H_1(Y) \xrightarrow{\psi_{*1}} H_1(L) \\ &\xrightarrow{\partial_{*1}} \ H_0(X \cap Y) \xrightarrow{\varphi_{*0}} H_0(X) \oplus H_0(Y) \xrightarrow{\psi_{*0}} H_0(L) \to 0 : \text{（完全）} \end{aligned}$$

である．これに既知のホモロジー群を代入すると

$$\begin{aligned}0 \quad &\xrightarrow{\psi_{*3}} \quad H_3(L) \xrightarrow{\partial_{*3}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{*2}} 0 \xrightarrow{\psi_{*2}} H_2(L)\\ &\xrightarrow{\partial_{*2}} \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{*1}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{*1}} H_1(L)\\ &\xrightarrow{\partial_{*1}} \quad \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{*0}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{*0}} H_0(L) \to 0 : (\text{完全})\end{aligned}$$

を得る．ここで，命題 9 の (4) より，$H_3(L) \cong \mathbb{Z}$ である．また，

$$\varphi_{*1} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \ni (a, b) \mapsto (a, ax + bp) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

より φ_{*1} は全射である．このことから，∂_{*2} が零写像であることを得る．よって ψ_{*2} は全射である．ψ_{*2} の部分で準同型定理を用いると

$$0 \cong \mathrm{Im}\, \psi_{*2} \cong H_2(L)$$

であるから $H_2(L) \cong 0$ を得る．また，

$$\varphi_{*0} : \mathbb{Z} \ni c \mapsto (c, c) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

より $\mathrm{Im}\partial_{*1} = 0$ であることから ∂_{*1} は 0 写像であることを得る．よって ψ_{*1} は全射写像である．ψ_{*1} が全射であることに注意して，その部分で準同型定理を用いると

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathrm{Ker}\psi_{*1} \cong H_1(L)$$

を得る．また完全列であるから $\mathrm{Ker}\psi_{*1} = \mathrm{Im}\varphi_{*1}$ である．よって

$$H_1(L) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathrm{Im}\varphi_{*1}$$

である．また，φ_{*1} の写像の作り方から

$$\varphi_{*1} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \ni (a, b) \mapsto \{(a, b), (ax + bp, ay + bq) \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

である．トーラス体 V 上ではメリディアン方向に可縮であるから，

$$\varphi_{*1} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \ni (a, b) \mapsto \{(a, ax + bp) \mid x \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

となる．よって

$$H_1(L) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\{(a, ax + bp) \mid x \in \mathbb{Z}\} \tag{6,1}$$

を得る．一方で，準同型 f を考える

$$f : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \ni (x, y) \mapsto [y - xb] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

写像の作り方から f は全射である．また

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\, f &= \{(x, y) \mid y - xb = kp \ (k \in \mathbb{Z})\} \\ &\equiv \{(x, xb + kp) \mid k, x \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

である．f の準同型定理より

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\{(a + bp, bq) \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \tag{6,2}$$

を得る．（$6, 1$），（$6, 2$）より

$$H_1(L) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

である．また，

$$\varphi_{*0} : (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \ni (a, b) \mapsto a - b \in \mathbb{Z}$$

の部分で準同型定理を用いると，

$$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathrm{Ker}\varphi_{*0} \cong \mathrm{Im}\varphi_{*0}$$

である．また，

$$\mathrm{Ker}\varphi_{*0} = \{(a, a) | a \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

である．また，写像の作り方から

$$\mathrm{Im}\varphi_{*0} \cong \mathbb{Z}$$

したがって，$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ である．よって，$H_0(L) \cong \mathbb{Z}$ 以上より，レンズ空間 $L(p, q)$ のホモロジー群は

$$H_k(L) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \quad (k = 0, 3) \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad (k = 1) \\ 0 \quad (k \neq 0, 1, 3) \end{cases}$$

となる．

定理 17 ([Br]，[Bn] [森元, p.61])．二つのレンズ空間 $L(p, q)$ と $L'(p', q')$（ただし $0 \geq p, 0 \geq p'$）が同相であるための必要十分条件は，$p = p'$ であり，$q \equiv \pm q' \mod p$ または $qq' \equiv \pm 1 \mod p$ が成り立つことである．

定理 17 は（参考文献 [森元, p.61]) から引用した．この定理から $L(5, 1)$ と $L(5, 2)$ はホモロジーが等しいが同位相でないことがわかる．このことから，コンパクトな 3 次元多様体をホモロジー群で分類することができないことが分かる．

7　まとめ

7.1　研究結果のまとめ

表にまとめた多様体のホモロジー群は全て異なっているので，これらは全て同相でない．

	$\mathbb{B}^n$	$\mathbb{S}^n$	$\mathbb{A}$	$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{T}^n$(種数 n)	$\mathbb{P}^2$
H_0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
H_1	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^{2n}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
H_2	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0
H_3	0	0	0	0	0	0
H_n	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0

また，レンズ空間のホモロジー群は

$$H_k(L) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \quad (k = 0, 3) \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad (k = 1) \\ 0 \quad (k \neq 0, 1, 3) \end{cases}$$

となる．2 つのレンズ空間 $L(p_1, q_1), L(p_2, q_2)$ は $p_1 \neq p_2$ なら同相でない．また，定理 17 から，2 つのレンズ空間 $L(p_1, q_1), L(p_2, q_2)$ が $p_1 = p_2$ のときホモロジー群は等しい．しかし，同相でないレンズ空間が存在することが分かった．2 つのレンズ空間 $L(5, 1)$ と $L(5, 2)$ はホモロジー群は等しいが，同相でない．

7.2　研究発表会での質問内容

- レンズ空間の代表例
  $\rightarrow$ $L(1, 0)$ の 3 次球面 $\mathbb{S}^3$.
- ホモロジー群で多様体を分類しきれるのか
  $\rightarrow$ 定理 17 よりホモロジー群が等しいが同相でない多様体が存在する．
- レンズ空間の 1 次ホモロジーがなぜ p に依存して q に依存しないか
  $\rightarrow$ トーラス体のメリディアン方向は可縮であるから q に依存しない.

8　謝辞

最後に，本研究を行うにあたり西山享教授に大変お世話になりました．良い卒業論文を作成するために多忙の中何度も添削をしていただきとても感謝しています．また，卒業研究発表会でご助言頂いた，中山教授，増田准教授，松田助教授に感謝いたします．最後に一年間共に過ごした西山研究室の皆様に感謝します．

参考文献

[小林] 小林 一章，曲面と結び目のトポロジー，朝倉書店，1992/3/20

[大田] 大田 春外，楽しもう射影平面 目で見る組合せトポロジーと射影幾何学，日本評論社，2016/7/20

[森元] 森元 勘治，3 次元多様体入門，培風館，1996/6/28