円円対応とメビウス変換

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科
学籍番号:15112048　沢登 正
指導教員 西山 享

2017 年 2 月 17 日

目次

1 序 2

2 リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ と立体射影 3

3 一次分数変換とメビウス変換 5

3.1 一次分数変換 5

3.2 反転とメビウス変換 6

3.3 一次分数変換群とメビウス変換群 8

4 円円対応 10

5 円円対応の定理の逆 (準備) 13

5.1 円円対応の定理の逆の前に 13

5.2 円円対応の定理の逆について知られていること 15

6 円円対応の定理の逆の証明 15

7 まとめと将来の展望 17

1　序

私が本研究に興味を持ったきっかけは, 輪講の授業で使用していた, 深谷賢治先生の「双曲幾何」に記載されていた円円対応の定理について, この逆は成り立つと記載されていた。しかし, その証明は記されておらず, なぜ逆が成り立つのか疑問を抱いたからである。

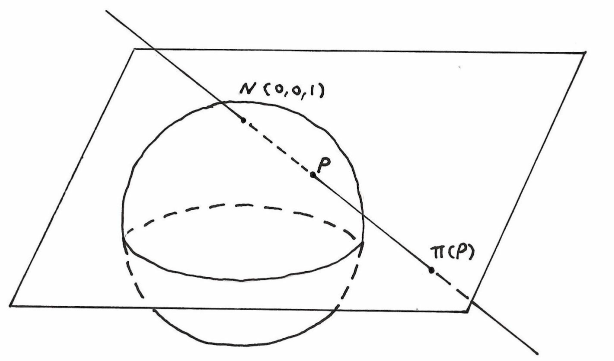
円円対応とは, メビウス変換によって, リーマン球面上のどんな円もリーマン球面上の円に写すことができるという事実を指す。円円対応の定理を紹介するために, まず §2 でリーマン球面と立体射影について説明する。立体射影を用いることで, ガウス平面に ∞ を付け加えたものと, リーマン球面を同一視することができた。 §3 では一次分数変換とメビウス変換について解説する。一次分数変換を紹介する上で, 一次分数変換の合成は行列の積に対応することがわかった。また, メビウス変換はいくつかの反転の合成からなり, 偶数回の反転の合成は一次分数変換になる。つまり, 一次分数変換はメビウス変換の一種だということがわかった。§4 では円円対応の定理について説明する。 §5, §6 では, 円円対応の定理の逆について考察した。結果として, 円円対応の定理の逆の証明を, ガウス平面の初等幾何学の問題に帰着することができたが, 完全な証明には至らなかった。

本研究を行うにあたり, 与えられた定理だけを理解するのではなく, その定理には逆が成り立つのかどうかといった, 違った観点からの考え方が重要だと知った。また, 一見難しそうな問題もいろいろな角度から捉えることで簡単な問題に帰着することができる場合があることも知ることができた。与えられたものをただ鵜呑みにするのではなく, 新たな視点から物事を考える力, 難しい問題に立ち止まっても諦めるのではなく, 違った視点から物事を考える力を今後の将来に役立てていきたい。

2 リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ と立体射影

ガウス平面 (複素平面) を $\mathbb{C}$ で表す。この時 $\mathbb{C}$ だけでなく, 無限遠方の点を付け加えて, 閉曲面のように考えると便利であり, このように $\mathbb{C}$ に無限遠点を付け加えたものをリーマン球面と呼ぶ。リーマン球面を数学的に定義するために, まず立体射影について説明しよう。

ガウス平面 $\mathbb{C}$ を $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ と書いて, 3 次元空間 (xyz 空間) 内の xy 平面とみなす。また原点を中心とする半径 1 の球面 S^2 を考える。球面 S^2 上の点 $(0,0,1)$ を N と書く。球面 S^2 上の N 以外の任意の点 P と N とを直線で結ぶ。



直線 NP は xy 平面, つまり $\mathbb{C}$ とただ 1 点で交わる。この点を $\Pi(P) \in \mathbb{C}$ とする。こうして, S^2 から N を除いた集合 $S^2 \setminus N$ からガウス平面 $\mathbb{C}$ への写像

$$\Pi : S^2 \setminus N \to \mathbb{C}$$

が定義された。写像 $\Pi : S^2 \setminus N \to \mathbb{C}$ を **立体射影**と呼ぶ。$\Pi(N) = \infty$ とおくことで, Π を S^2 から $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への写像とみなすことが出来る。以後, Π で S^2 と $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を同一視し, リーマン球面を次のように定義する。

定義 1 (リーマン球面)**. リーマン球面** とは, 複素数全体 $\mathbb{C}$ と ∞ (無限遠点) を合わせた集合, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ のことである。今後はリーマン球面を $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と表記して, しばしば S^2 と $\widehat{\mathbb{C}}$ を同一視する。この時 N と対応するのは ∞ である。以下 N と ∞ は同じ記号で表す。また, $S^2 \setminus N$ には複素平面が対応している。

まず, 立体射影を数式で表そう。S^2 上の点 $N(= \infty)$ と xy 平面上の点 $z \in \mathbb{C}$ を結ぶ

線分を $t:(1-t)$ に内分する点を w とすると

$$w=(1-t)(0,0,1)+t(x,y,0)=(xt,yt,1-t)$$

である。これが単位球面 S^2 上にあるとすると

$$\begin{aligned}&(xt)^2+(yt)^2+(1-t)^2=1, \qquad \{(x^2+y^2+1)t-2\}t=0\\ &\Longrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{2}{x^2+y^2+1}=\dfrac{2}{r^2+1}\\ t=0\end{cases}\end{aligned}$$

$t=\frac{2}{r^2+1}$ の時は N と z を結ぶ直線と $S^2\setminus N$ の交点 w に対応し, $t=0$ の時は点 N に対応する。よって $z=x+iy=re^{i\theta}$ と書いて

$$w=\left(\frac{2x}{r^2+1},\frac{2y}{r^2+1},\frac{r^2-1}{r^2+1}\right)=\left(\frac{2r\cos\theta}{r^2+1},\frac{2r\sin\theta}{r^2+1},\frac{r^2-1}{r^2+1}\right)$$

とおくと, $\Pi(w)=z$ となる。同様にして $w=(a,b,c)$ とすると,

$$\begin{aligned}c&=\frac{r^2-1}{r^2+1}=1-\frac{2}{r^2+1} \qquad \text{より} \qquad \frac{2}{r^2+1}=1-c\\ r^2&=\frac{2}{1-c}-1=\frac{1+c}{1-c} \qquad \text{よって} \qquad r=\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}\end{aligned}$$

である。また,

$$a=\frac{2x}{r^2+1}=(1-c)x \qquad \text{より} \qquad x=\frac{a}{1-c},\ \ y=\frac{b}{1-c}$$

である。これより $\Pi(w)=z=\frac{1}{1-c}(a+ib)$ で与えられることがわかる。これをまとめると

命題 2. 立体射影により, $\Pi(w)=z$ と写っていれば, w と z の関係は次のように与えられる。

$$\begin{cases} w=\dfrac{1}{x^2+y^2+1}(2x,2y,x^2+y^2-1) & (z=x+iy)\\[2ex] \quad =\dfrac{1}{r^2+1}(2r\cos\theta,2r\sin\theta,r^2-1) & (z=re^{i\theta})\\[2ex] z=\dfrac{1}{1-c}(a+ib) & (w=(a,b,c))\end{cases} \tag{1}$$

今後, 球面 $S^2(=\widehat{\mathbb{C}})$ 上の円を R 円, $\mathbb{C}$ 上の円と直線を, それぞれ G 円, G 直線と表記して区別する。リーマン球面や複素平面 $\mathbb{C}$ 上の円や直線はユークリッド幾何学の円や直線と同じである。また L を R 円とすると,

$$
\begin{aligned}
N \notin L &\implies \Pi(L) : \text{G 円} \\
N \in L &\implies \Pi(L) : \text{G 直線}
\end{aligned}
$$

である。([深谷, p 11, 補題 1.15] を参照)

3 一次分数変換とメビウス変換

3.1 一次分数変換

写像 $\varPhi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が一次分数変換であるとは, $ad - bc \neq 0$ であるような複素数 a, b, c, d が存在して $\varPhi$ が次のように一次式の商として表されることを指す。

$$
\varPhi(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & z \neq \infty,\, cz+d \neq 0 \\ \infty & \begin{cases} z \neq \infty,\, cz+d = 0 \\ z = \infty,\, a \neq 0,\, c = 0 \end{cases} \\ \dfrac{a}{c} & z = \infty,\, a, c \neq 0 \end{cases}
$$

ガウス平面では分母が 0 の時は定義できないが, $\widehat{\mathbb{C}}$ の ∞ を用いることでリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上では上記のように表すことができる。このために ∞ を導入した。

補題 3. 一次分数変換と一次分数変換の合成は一次分数変換である。

Proof. 計算によって示す。 $\varPhi_i(z) = \dfrac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \quad (i = 1, 2)$ と表しておくと,

$$
\begin{aligned}
\varPhi_1(\varPhi_2(z)) &= \frac{a_1 \varPhi_2(z) + b_1}{c_1 \varPhi_2(z) + d_1} = \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} \\
&= \frac{a_1(a_2 z + b_2) + b_1(c_2 z + d_2)}{c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

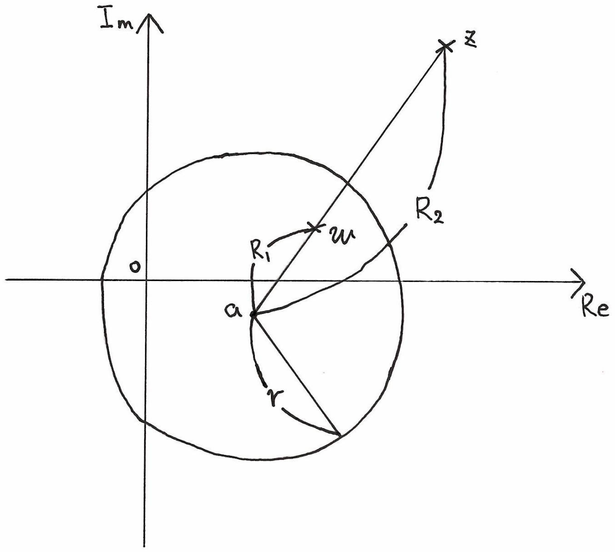
これはまた一次分数変換である。 □

行列 $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$ と書くと, $\varPhi_1 \circ \varPhi_2$ に対応するのは行列の積 $A_1 \cdot A_2$ になっていることに注意する。

3.2　反転とメビウス変換

次にメビウス変換を導入するために反転について説明する。

$\mathbb{C}$ 上の任意の点 z と, 中心が a, 半径 r の円 L を考える。a を始点として z を通る半直線上に点 w をとる。 a から w の距離を R_1, a から z の距離を R_2 とする。この時 $R_1 \cdot R_2 = r^2$ となる点 w をその円 L に関する **反転** という。



中心 a, 半径 r の円 L に関する反転を $g_{a,r}(z) = w$ または $g_L(z) = w$ と書く。ここで $g_L(a) = \infty$, $g_L(\infty) = a$ と定めると, **反転写像** $g_L : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ が矛盾なく定義できる。

反転を数式によって表そう。

命題 4. 中心 a , 半径 r の円に関する反転は

$$g(z) = \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a \qquad (z \in \mathbb{C})$$

で与えられる。(但し, $z \neq a$ とする。)

Proof. $w = g(z)$ として, $|w - a| = R_1$, $|z - a| = R_2$ とおくと, $R_1 \cdot R_2 = r^2$ より

$R_1 = \frac{r^2}{R_2}$ である。よって w は

$$
\begin{aligned}
w - a &= \frac{R_1}{R_2}(z-a) = \frac{r^2}{|z-a|^2}(z-a) = \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{a}} \\
w &= \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{a}} + a
\end{aligned} \tag{3}
$$

と表すことができる。 □

例 5. 単位円に関する反転 (鏡映) は $a = 0,\ r = 1$ なので $f(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ である。

反転を用いてメビウス変換を次のように定義する。

定義 6 (メビウス変換)**.** いくつかの反転の合成をメビウス変換という。

反転と一次分数変換は密接に関係しており, それは次のようにまとめられる。

命題 7. 反転と反転の合成は一次分数変換である。したがって, 偶数個の反転の合成は一次分数変換である。

Proof. g を (3) 式の反転として, 同様に中心 b , 半径 s の円に関する反転

$$
h(z) = \frac{s^2}{\overline{z}-\overline{b}} + b
$$

を考える。反転と反転の合成を $f = g \circ h$ とすると計算により,

$$
f(z) = g \circ h(z) = g(h(z)) = \frac{r^2}{\overline{h(z)}-\overline{a}} + a
$$

となる。ここで

$$
(\text{分母}) = \frac{s^2}{z-a} + \overline{b} - \overline{a} = \frac{s^2 + z\overline{b} - |b|^2 - z\overline{a} + \overline{a}b}{z-b}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{r^2(z-a)}{s^2 + z\overline{b} - |b|^2 - z\overline{a} + \overline{a}b} + a \\
&= \frac{(r^2 + a\overline{b} - |a|^2)z + (-ar^2 + as^2 - a|b|^2 + |a|^2 b}{(\overline{b}-\overline{a})z + (s^2 - |b|^2 + \overline{a}b)} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}
\end{aligned}
$$

と計算できる。これは確かに一次分数変換である。 □

これから, 奇数個の反転の合成は一次分数変換と唯一つの反転の合成で書けることがわかる。ここで $k(z)=\frac{1}{z}$ とし, $g(z)$ を任意の反転とすると $k\circ g=f$ は一次分数変換である。よって

$$g=k^{-1}\circ f=k\circ f$$

だが, 例えば 3 個の反転 g_1,g_2,g_3 の合成は $g_1=k\circ f_1,\ f_2=g_2\circ g_3$ とおくと

$$g_1\circ g_2\circ g_3=g_1\circ f_2=k\circ f_1\circ f_2=k\circ f_3 \qquad (f_3=f_1\circ f_2\text{とおいた。})$$

つまり, 唯一つの反転は $\frac{1}{z}$ だけでよいことがわかる。

3.3 一次分数変換群とメビウス変換群

これから一次分数変換群とメビウス変換群について説明する。その前に, そもそも群とは何かを始めに定義する。

定義 8 (群)**.** 集合 G と G の 2 つの元 g_1,g_2 に対して, 積と呼ばれる元 $g_1,g_2\in G$ が決まっていく, 組 $(G,\cdot)$ が次の公理を満たす時, **群** という。

1 結合法則 : $g\cdot(g_2\cdot g_3)=(g_1\cdot g_2)\cdot g_3 \quad (g_1,g_2,g_3\in G)$ が成り立つ。
2 単位元の存在 : $e\in G$ が存在し, $g\cdot e=e\cdot g=g \quad (g\in G)$ が成り立つ。
3 逆元の存在 : $g\in G$ に対して, $g^{-1}\in G$ が存在し, $g\cdot g^{-1}=g^{-1}\cdot g=e$ が成り立つ。

可逆な 2×2 複素行列全体の集合に通常の行列の積を考えたものを $GL(2;\mathbb{C})$ と書き, **一般線形群** と呼ぶ。このうち, 行列式が 1 のものを $SL(2;\mathbb{C})$ と書いて **特殊線形群** と呼ぶ。つまり

$$\begin{aligned} SL(2;\mathbb{C}) &= \{g\in GL(2;\mathbb{C}) \mid \mathrm{det}g=1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; ad-bc=1,\quad a,b,c,d\in\mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

である。また $PSL(2;\mathbb{C})$ を一次分数変換全体に写像の合成で積を考えた群を表し, **一次分数変換群** と呼ぶ。

定義 9 (準同型写像)**.** G,H を群とする。写像 $f:G\to H$ が準同型写像であるとは, $f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)$ が任意の $g_1,g_2\in G$ に対して成立することを指す。

写像 $\psi:SL(2;\mathbb{C})\to PSL(2;\mathbb{C})$ を次のように定義する。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{C})$ に対して ψ_A は $z \in \mathbb{C}$ を $\dfrac{az+b}{cz+d}$ に写す一次分数変換を表す。つまり

$$\psi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

である。$SL(2;\mathbb{C})$ と $PSL(2;\mathbb{C})$ の関係を示すために, 次の 2 つの補題を考える。

補題 10. 写像 $\psi : SL(2;\mathbb{C}) \to PSL(2;\mathbb{C})$ は準同型写像である。

Proof. $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ とおくと (2) より $\psi_{A_1} \circ \psi_{A_2} = \psi_{A_1 \cdot A_2}$ となって, 確かに ψ_A は準同型になる。 □

つまり, 行列の積が一次分数変換の合成に対応する。

補題 11. 写像 $\psi : SL(2;\mathbb{C}) \to PSL(2;\mathbb{C})$ は

(1) 全射である。

(2) $A, B \in SL(2;\mathbb{C})$ に対して, $\psi(A) = \psi(B)$ ならば, $A = B$ または $A = -B$ である。

Proof. まず (1) を証明する。 任意の一次分数変換

$$\Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0)$$

を考える。 Φ に対して

$$s = \sqrt{ad-bc},\ a' = \frac{a}{s},\ b' = \frac{b}{s},\ c' = \frac{c}{s},\ d' = \frac{d}{s}$$

とおく。すると, $\Phi(z) = \dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}$ であって, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{C})$ である。よって, 任意の $\Phi \in PSL(2;\mathbb{C})$ に対し, ある $A' \in SL(2;\mathbb{C})$ が存在して,

$$\psi_{A'}(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'} = \frac{az+b}{cz+d} = \Phi(z)$$

が成り立つ。よって, 写像 ψ は全射である。

次に (2) を証明する。 $\psi(A) = \psi(B)$ とすると

$$\psi(A^{-1}B) = \psi(A^{-1})\psi(B) = \psi(A^{-1})\psi(A) = id \quad (\text{恒等写像})$$

である。ここで $A^{-1}B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{C})$ $(p,q,r,s \in \mathbb{C},)$ とすると, 任意の z に対して $z = \dfrac{pz+q}{rz+s}$ が成り立つ。分母を払って計算すると

$$\begin{aligned} rz^2 + sz &= pz + q \\ rz^2 + (s-p)z - q &= 0 \end{aligned}$$

よって, $r = q = 0,\ s = p$ である。また, $sp - rq = 1$ より $sp = 1$, つまり $s = p = 1$ または $s = p = -1$ である。よって $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ または $A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, すなわち $A^{-1}B = \pm I$ である。両辺に左から A を掛けると,

$$AA^{-1}B = \pm A, \text{したがって } B = \pm A$$

よって, $A = B$ または $A = -B$ である。 □

補題 (11) より, $PSL(2;\mathbb{C})$ は $SL(2;\mathbb{C})$ で A と $-A$ を同一視したものである。つまり

$$PSL(2;\mathbb{C}) = SL(2;\mathbb{C})/\{\pm 1\}$$

であり, 必ず $PSL(2;\mathbb{C})$ の元に対応する $SL(2;\mathbb{C})$ の元が存在する。

メビウス変換全体のなす群を G^+ , 一次分数変換群を $G = PSL(2;\mathbb{C})$ とすると, 両者の関係は $G \subset G^+$ である。残りの $G^+ \setminus G$ は一次分数変換と 1 つの反転 ($\frac{1}{\overline{z}}$ だけでよい) の合成である。さらに, $\frac{1}{z}$ との合成を考えることで,

$$G^+ \setminus G = \{f(\overline{z}) \mid f \in G\} \tag{4}$$

と表すことができる。

4 円円対応

複素平面上の円をメビウス変換によって写すと, その像はまた円になる。これを **円円対応** と呼ぶ。これをリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ の場合に拡張して証明しよう。

定理 12 (円円対応)**.** Φ をメビウス変換 ($\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$) とし, L を $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の R 円とする。L の Φ による像 $\Phi(L)$ も R 円である。

Proof. まず Φ が一次分数変換であるときに示す。 A を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{C})$ として $\Phi_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ とおく。証明のアイディアは A を基本的な行列の積で表して考えることである。そのために, 次の補題をまず示す。

補題 13. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を可逆 2×2 行列とし, $a\neq 0$ とする。この時

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ o & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

となるような $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ が存在する。

Proof. (5) の右辺の掛け算を行うと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \beta\delta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \beta\delta \\ \alpha\beta & \alpha\beta\delta+\gamma \end{pmatrix}$$

よって, $\beta = a, \alpha = \frac{c}{\beta}, \delta = \frac{b}{\beta}, \gamma = d-\alpha\beta\delta$ ととればよい。 □

補題 (13) で $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{C})$ ならば, 明らかに

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{C})$$

であるから, (5) 式の両辺を比較すると, $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{C})$ であって $\beta\gamma = 1$ である。

定理の証明に戻る。 $\Phi = \varphi(A)$ とすると, $a\neq 0$ ならば (5) 式より

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。 補題 (11) より

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

とした。$a=0$ ならば $A \in SL(2;\mathbb{C})$ であるから, $bc=-1$ であって,

$$\varphi(A)=\varphi\begin{pmatrix}0 & b\\ c & d\end{pmatrix}=\varphi\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix}-ci & -di\\ 0 & -bi\end{pmatrix}$$
$$=\varphi\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix}-ci & 0\\ 0 & -bi\end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix}1 & \frac{d}{c}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

である。よって,

$$\Phi=\varphi\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

の 3 つの場合を考えれば十分である。ガウス平面では平行移動, 回転変換, 相似変換は円を円に, 直線を直線に写すことに注意する。

(i) $g=\begin{pmatrix}1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の時,

$$\Phi_g(z)=\frac{1\cdot z+\mu}{0+1}=z+\mu$$

である。これは <u>平行移動</u> なので, 円を円に, 直線を直線に写す。

(ii) $g=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$ の時,

$$\Phi_g(z)=\frac{\lambda z+0}{0+\lambda^{-1}}=\lambda^2 z$$

である。これは <u>原点を中心とした回転</u> と, <u>原点を中心とした相似変換</u> の合成であるから, 円を円に, 直線を直線に写す。

(iii) $g=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$ の時,

$$\Phi_g(z)=\frac{1}{z}$$

である。ここで, $z=re^{i\theta}$ とすると

$$\Phi_g(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

である。この点を $v\in\widehat{\mathbb{C}}$ とすると

$$v=\left(\frac{2\frac{1}{r}\cos(-\theta)}{(\frac{1}{r})^2+1},\frac{2\frac{1}{r}\sin(-\theta)}{(\frac{1}{r})^2+1},\frac{(\frac{1}{r})^2-1}{(\frac{1}{r})^2+1}\right)$$
$$=\left(\frac{2r\cos\theta}{1+r^2},\frac{-2r\sin\theta}{1+r^2},\frac{1-r^2}{1+r^2}\right) \tag{6}$$

リーマン球面では立体射影の計算における (1) 式と (6) 式を比較して, $\varPhi_g(z)$ は空間内の x 軸を軸とする 180°回転 を表している。よって R 円を R 円に写す。

メビウス変換では (4) 式より, さらに複素共役 $\overline{z}$ との合成を考えればよい。ガウス平面において $\overline{z}$ は円を円に, 直線を直線に写すのは明らかである。リーマン球面では, 実軸 (経線) を含む平面に関する面対称移動になる。

よって, 行列の積は写像の合成に対応しているので行列に対応する写像の一つずつが円を円に写しているので写像の合成でも円を円に写す。 □

定理より, 一次分数変換とメビウス変換は円円対応をしていることがわかった。

5 円円対応の定理の逆 (準備)

5.1 円円対応の定理の逆の前に

ここまでで, 円円対応の定理を示してきた。ここからは円円対応の定理の逆について考察する。その準備として次の問題を考える。

問題 14. 一次分数変換で R 円を単位円に写すことができるか。

この問題の答えは肯定的である。これを以下で説明しよう。

前段階として, R 円をガウス平面 $\mathbb{C}$ の G 円と G 直線に分けて考える。まず, ガウス平面において任意の円 L を単位円 S^1 に写すには次の合成を考えれば良い。

(1) 相似変換 (原点を中心とした r 倍の相似), $g_r(z) = rz \ \ (r \in \mathbb{R}_{>0})$
(2) 回転変換 (原点を中心とした角 θ の回転), $h_\theta(z) = e^{i\theta}z \ \ (\theta \in \mathbb{R})$
(3) 平行移動, $k_\alpha(z) = z + \alpha \ \ (\alpha \in \mathbb{C})$

それには, ガウス平面の任意の円 L の中心を原点に 平行移動 し, 半径が 1 になるように原点を中心に r 倍 相似変換 を行えば単位円 S^1 に写すことができることに注意する。ここで, 回転変換は使わなかったが, 相似変換, 回転変換, 平行移動の合成を **アフィン変換** といい

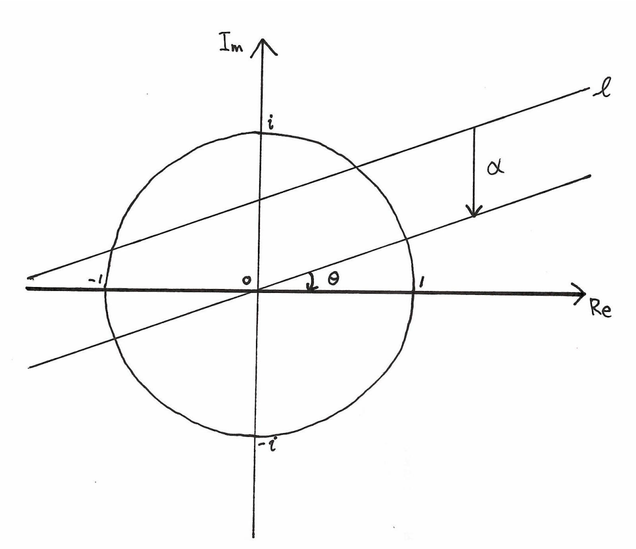
$$f(z) = az + b \qquad (a \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{C})$$

の形で書ける。これは一次分数変換の一種である。

次にガウス平面において任意の直線 ℓ を単位円 S^1 に写すには, 一次分数変換

$$\varPhi_1 : \text{実軸} \to S^1 : \text{単位円} \tag{7}$$

となるようなものが存在すれば, $\varPhi_1,\ h_\theta,\ k_\alpha$ の合成で表すことができる。$\varPhi_1$ の構成は後回しにして, まずこれを説明する。ガウス平面上の任意の直線 ℓ は, 原点を通るように平行移動し, 実軸と重なるように原点を中心に角 θ の回転変換を行い, 一次分数変換 $\varPhi_1$ を行えば単位円に写すことができる。つまり, $\varPhi_1,\ h_\theta,\ k_\alpha$ の合成で表すことができる。



もちろん, これは一次分数変換である。

そこで, (7) を満たすような $\varPhi_1$ をどのように構成するか説明する。$\varPhi_1(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(z \in \mathbb{R})$ について, 3 点を通る円は一つに決まるので, 実軸上の具体的な点で考えてみる。実軸上の 3 点, 1, 0, -1 がそれぞれ単位円周上の 3 点, 1, i, -1 に写るとする。

$$
\begin{cases}
\varPhi_1(1) = 1 & \text{より} \quad a+b=c+d \\
\varPhi_1(0) = i & \text{より} \quad b=di \\
\varPhi_1(-1) = -1 & \text{より} \quad -a+b=-c+d
\end{cases}
$$

3 式より $b=c=ai,\ d=a$ である。よって

$$
\varPhi_1(z) = \frac{az+ai}{aiz+a} = \frac{z+i}{iz+1}
$$

である。絶対値をとると

$$
|\varPhi_1(z)| = \left|\frac{z+i}{iz+1}\right| = \frac{\sqrt{z^2+1^2}}{\sqrt{1^2+z^2}} = 1 \quad (\varPhi_1(z) \in S^1)
$$

このことから, 実軸を単位円に写す一次分数変換 $\varPhi_1$ が存在することがわかった。

したがって, ガウス平面 $\mathbb{C}$ の G 円と G 直線が一次分数変換で単位円に写すことができたので, R 円でも写すことができる。

5.2 円円対応の定理の逆について知られていること

ここで, すでに知られているいくつかの定理について紹介する。 以下の定理は [AMS 368] から引用した。 $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ とおく。

定理 15 (J.Aczel and M.A.McKieran, 1957). $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を円を円全体に写す写像と仮定する。この時, f がメビウス変換であることと, f が全単射であることは同値である。

定理 16 (Zeev Nehari, 1952). $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を円を円全体に写す写像と仮定する。この時, f がメビウス変換であることと, f が定数でない有理型関数であることは同値である。

定理 17 (E.Artin, 1957). $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を直線を直線に写す全単射写像と仮定する。そして, f による任意の 2 本の平行な直線の像もまた平行な直線と仮定する。この時, f はアフィン変換である。

定理 18 (A.F.Beardon and D.Minda, 2002). $f : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ がメビウス変換であることと, f が局所的に球を保存する写像であることは同値である。

定理 19 (Jason Jeffers, 2000). f を $\widehat{\mathbb{R}}^n$ 上の直線を直線に写す全単射写像と仮定する。この時, f はメビウス変換である。

定理 20 (Alexander Chubarev and Iosif Pinelis, 1999). ある正の整数 $r < n$ に対して, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が全射であって, かつ f が任意の r 次元超平面をあろ r 次元超平面へ写す写像と仮定する。この時, f はあアフィン変換である。

6 円円対応の定理の逆の証明

さて, ここから本題の円円対応の定理の逆について考察する。円円対応の定理の逆を定理としてまとめると次の通りである。

定理 21 (円円対応の定理の逆). $\varPhi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ を全単射と仮定する。この時, $\varPhi$ が $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の R 円を $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の R 円に写すならば, $\varPhi$ はメビウス変換である。

この定理では, $\varPhi$ の微分可能性や連続性が仮定されていないことに注意する。それは §5.2 で紹介した諸定理でも同様であった。これは, 岩尾慎介先生にも指摘していただいた。岩尾先生に感謝している。

Proof. 証明のアイディアはガウス平面上の初等幾何が使えるような特別な写像に帰着させることである。そのため, 次の 3 つの命題 (主張) を考える。

命題 22. 複素平面上の任意の点, $p \in \mathbb{C}$ を ∞ に写す一次分数変換 F_p が存在する。

命題 23. R 円を R 円に写す全単射 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ で $f(\infty) = \infty$ となるものはメビウス変換である。

命題 24. R 円を R 円に写す全単射 $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ はメビウス変換である。

まず命題 (22) を示し, それから (命題 (22) と命題 (23) が成り立つ) $\Longrightarrow$ (命題 (24) が成り立つ) ことを示そう。これが示されれば, あとは命題 (23) を示せばよい。

Proof. (命題 (22) の証明) $F_p(p) = \infty$ となるには, 一次分数変換 $F_p(z) = \dfrac{1}{z - p}$ とすればよい。 □

次に命題 (23) を仮定して, 命題 (24) を示す。そこで, $p = g(\infty)$ と置き, $f = F_p \circ g$ を考える。

$$f(\infty) = F_p \circ g(\infty) = F_p(g(\infty)) = \infty$$

g も F_p も R 円を R 円に写すので, f も R 円を R 円に写す。つまり f は命題 (23) の仮定を満たすからメビウス変換である。F_p は一次分数変換なので逆写像 F_p^{-1} が存在する。したがって,

$$g = F_p^{-1} \circ f \tag{8}$$

ここで,

$$F_p(z) = \frac{1}{z - p} \text{ より } F_p^{-1}(z) = \frac{pz + 1}{z}$$

である。これもまた一次分数変換である。f がメビウス変換なら, g は一次分数変換とメビウス変換の合成なのでメビウス変換である。よって, 命題 (24) が示された。

次に命題 (23) をさらにガウス平面 $\mathbb{C}$ 上の写像の性質に帰着させよう。$\widehat{\mathbb{C}}$ の R 円は $\mathbb{C}$ の円, または $\mathbb{C}$ の直線 (∞ を通る R 円) であるから, ∞ で接する 2 つの円は $\mathbb{C}$ 上の平行な 2 本の直線に対応することに注意する。そこで, 次の命題を考えよう。

命題 25. 全単射 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は

(1) 円 (∞ を通らない R 円) を円に写し,
(2) 直線 (∞ を通る R 円) を直線に写し,
(3) 平行な 2 直線 (∞ の 1 点で交わる (接する) 2 つの R 円) を平行な 2 直線に写す。

と仮定する．このとき，f はメビウス変換である。

こうして, リーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の命題 (23) をガウス平面 $\mathbb{C}$ 上の命題 (25) に帰着することができた。

命題 (25) が成り立てば命題 (23) が成り立つことを示そう。命題 (23) の f をとる。f は全単射で $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ だが, ∞ を ∞ に写すので, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ となる。f が命題 (25) の (1), (2), (3) を満たすことを示す。そうすると, f はメビウス変換であることがわかる。

(1) について, f は全単射で $f(\infty) = \infty$ なので ∞ を通らない R 円は f によって ∞ を通らない R 円に写る。よってガウス平面では G 円を G 円に写す。

(2) についても同様で, ∞ を通る R 円は f によって ∞ を通る R 円に写る。よってガウス平面では G 直線を G 直線に写す。

(3) について, f は全単射で $f(\infty) = \infty$ なので ∞ の 1 点でのみ共通部分を持つ 2 つの R 円は, f によって ∞ の 1 点でのみ共通部分を持つ 2 つの R 円に写る。よって, ガウス平面では平行な 2 直線を平行な 2 直線に写す。

したがって, 命題 (23) の f は命題 (25) の (1), (2), (3) を満たすことが示せた。つまり, 命題 (25) が成り立てば命題 (23) が成り立つ。

命題 (23) が証明できれば, 円円対応の逆が成り立つことがこれでわかり, あとはガウス平面の初等幾何学の問題に命題が帰着された。しかし, 今回は時間が足りず命題 (25) の証明をすることができなかった。残念ではあるが, 本研究はここでいったん終える。 $\square$

7 まとめと将来の展望

円円対応の定理の逆の証明を終えることができず非常に残念である。命題 (25) が示せれば命題 (23) が示され, 命題 (24) が示される。つまり円円対応の定理の逆が示せたことになるので, 今後の研究課題にしたい。また, 円円対応の逆の証明に入る前にいくつか定理を紹介したが, 与えられているものをただ使うのではなく, なぜそのように言えるのかを理解するために, こちらの証明にも挑戦したい。

本論文の執筆にあたり西山教授には, 多忙である中, 何度も添削をしていただきとても感謝しています。私が研究テーマを広げる際に困っている時も様々なヒントを与えてくださり, より良い研究へと導いてくれました。終始面倒を見ていただいた西山教授をはじめ, 研究室の仲間や関わった全ての方々に感謝しています。

参考文献

[深谷] 深谷賢治，双曲幾何，岩波書店，2004

[AMS 368] BAOKUI LI and YUEFEI WANG, Fundmental theorem of geometry without the surjective assumption，trans.AMS 368(2016)