種数２の閉曲面の正則分割の分類と実現

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科
本村 昂也
学籍番号:15113126
西山研究室

2017 年 2 月 17 日

目次

1 序

種数 2 の閉曲面の正則分割について研究しようと思った動機は，「3 次元の幾何学」を読んだのがきっかけで，取っ手付きのコップとドーナッツ (トーラス) が同相であるという内容に興味を持ったからである．取っ手付きのコップは，取っ手に穴が 1 つの閉曲面で，

ドーナッツも穴が一つ空いた閉曲面である．２つの閉曲面は連続変形で互いに写り合うとき同相というが，コップとドーナッツが同相であることはほぼ明らかである．しかし，外見から同相であるかを判断するのは難しい．本研究では閉曲面の分割を行う．卒業研究を進める上で，大学で学んだことを卒業研究に応用することが多かった．大学では，主に幾何学を学んだが，幾何学は他の学問に比べるとなぜか親近感が湧いた．というのも，幾何学は図やグラフに数式を用いることで理解ができるからであると学んだ．図やグラフに数式を用いることで理解できることは卒業研究に大いに役に立った．本研究では閉曲面の分割の図を多く扱う．数式を用いることでその図を理解できる．この理解ができるところに楽しさを感じられた．ぜひ，図やグラフに数式を用いることで理解できる楽しさを知っていただきたい．

2　導入

多角形をいくつか貼り合わせて曲面を作ることを考える．貼り合わせのルールは，

頂点や辺同士がぴったり重なる
貼り合わせた後の各辺にはちょうど２つの多角形が隣り合う

とする．このルールによって，貼り合わせた後の各頂点の周りには，この頂点を共有するいくつかの多角形が集まる．このようにして貼り合わせてできた曲面は，多角形で分割されていると言っても良い．多角形が伸縮自在の素材でできていると考え，尖っている部分や折り目をならして，各点の近傍は円，すなわち平面上の単位円の内部と同じにできる．つまり，２次元多様体になる．例えば，正３角形を４枚貼り合わせて正４面体ができる．ここでは，中身はなく表面のみを考えていることに注意する．

一般には，閉曲面とは有界で境界のない，閉じた曲面のことだが，その正則分割とは同じ辺数をもつ多角形 (p 角形) を各頂点で同じ枚数 (k 角形) で張り合わせる分割をさす．例えば，球面の正則分割は本質的には正多面体の分類と同じであり，それは 5 種類しかないことが知られている．しかし，一般の閉曲面における正則分割の研究は調べてみると，まだあまりなされていないようである．球面やトーラスと同相な多面体は一般的に知られているので，本論文では，種数 2 の閉曲面の正則分割の分類と実現を研究した．

正則分割の分類では，閉曲面のオイラー標数が役に立つ．閉曲面の分割に表れる頂点の個数の合計 v ，辺の本数の合計 e ，面の枚数 f の交代和がオイラー標数に等しいことを利用して，可能な (v, e, f) の組み合わせを決定した (必要条件)．この (v, e, f) に対して正則分割が実現できること (十分条件) を次に考えた．

正則分割の実現を考えるときの手段としては，

1. 実際に種数 2 の閉曲面の絵を描き表面を正則分割する
2. 閉曲面の展開図を考える
3. 展開図をさらに分割して考える
4. 正則分割できた多面体の双対を利用する

ことなどがあげられる．正則分割の実現は 1. 絵を描く方法から考え，次に 2. 展開図，そして 3. 展開図の分割とすすみ，4. 双対多面体を最後に考えた．

3 同相写像

閉曲面の分割を考えるときに，連続変形して写り合うような分割同士は同じだと思いたい．そこで，まず「同相」という関係を正確に定義しよう．そのためには，連続写像の概念が必要である．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を実数 n 個の組の全体として定義する．つまり，

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\,(1 \leqq i \leqq n)\} \tag{1}$$

である．連続写像は，本来，位相空間に対して定義されるものではあるが，ここでは簡単のために $\mathbb{R}^n$ の部分集合同士の写像に対して定義しておく．

定義 1 (連続写像)**.** D を $\mathbb{R}^n$ の部分集合として，写像 $f : D \to \mathbb{R}^m$ を考える．f が点 $a \in D$ において連続であるとは，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{2}$$

が成り立つことである．

注意 2. 式 (2) を ε-δ 論法で書き換えると次のようになる [3, p.55].

> 「$\forall \varepsilon > 0$ に対し，$\exists \delta > 0$ が存在して $|x - a| < \delta (x \in D)$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ.」

連続写像を用いて $\mathbb{R}^n$ の 2 つの部分集合 X, Y が同相であることを次のように定義する．

定義 3 (同相)**.** $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X, Y が同相であるとは，連続写像 $f : X \to Y$ が存在して次の (1), (2) を満たす時に言う．

(1) f は全単射，つまり逆写像 $f^{-1}: Y \to X$ を持つ．

(2) 逆写像 $f^{-1}: Y \to X$ が連続である．

注意 4. : 直感的に言えば，同相とは X を連続的に変形して、Y とぴったり重なるということである．つまり両者は連続変形すれば "ほぼ同じ" と思える．例えば，境界を持たない円盤 $\mathbb{D}^2$ は平面 $\mathbb{R}^2$ は同相である．

4 閉曲面とオイラー標数

閉曲面の分割を考えると，分割の仕方は任意ではなく，ある種の条件を満たす必要がある．この条件を導くための鍵となるのがオイラー標数である．まず，閉曲面を定義する．

定義 5 (閉曲面)**.** $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクトな曲面を**閉曲面**と言う．

以下では**向きづけできる閉曲面**を考える．定義 5 で用いられている言葉を詳しく説明すると，部分集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ がコンパクトとは，有界閉集合であることと同値である．また，D が曲面であるとは， D の任意の点の近傍が平面と同相であることである．

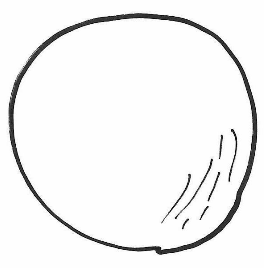
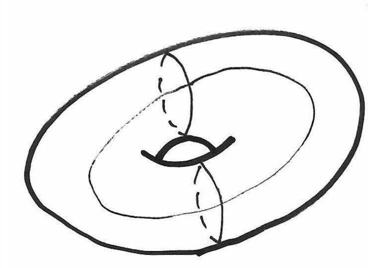
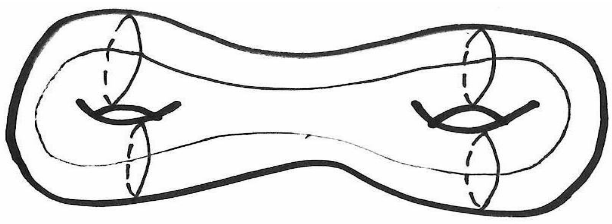
次にオイラー標数について説明する．オイラー標数は位相空間に対して決まっている位相不変量である．その定義は少し複雑なので，[5, p.164] を参照してほしい．閉曲面のオイラー標数は分割を用いて計算できる．それを述べたのが次の定理である．

定理 6. 多角形で分割された閉曲面 Σ に対し，オイラー標数 $\chi(\Sigma)$ は頂点の個数 v と辺の個数 e と面の個数 f の交代和で計算できる．

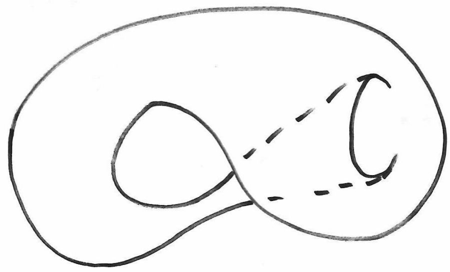
$$\chi(\Sigma) = v - e + f \qquad \begin{cases} v = \text{頂点の個数の合計} \\ e = \text{辺の本数の合計} \\ f = \text{面の枚数の合計} \end{cases} \tag{3}$$

閉曲面の位相不変量には穴の数 (種数と呼ぶ) があるがこれを g と書く．例えば，球面では $g = 0$，トーラスでは $g = 1$，2 つ穴の浮き輪では $g = 2$ である．(下図).

$g = 0$ $\qquad$ $g = 1$ $\qquad$ $g = 2$

種数は位相空間にたいする位相不変量の一つである．向きづけ可能な閉曲面は種数が同じなら同相であることが知られている．これを**閉曲面の分類定理**という．[6, p.95]



クラインの壷 (上図) は向きづけ不可能な閉曲面の例である [6, p.30].

オイラー標数はこの g を用いても計算できる，

定理 7. [5, p.164] 種数 g と閉曲面 Σ_g のオイラー標数 $\chi(\Sigma_g)$ の間には，

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g \tag{4}$$

が成り立つ．

以下では，オイラー標数のこの 2 通りの表示を有効に用いて閉曲面の分割について考えよう．

5　閉曲面 Σ_g の正則分割

種数が g の閉曲面は同相を除いて 1 つしかないので，それを Σ_g と書く．まずは，閉曲面 Σ_g の正則分割を定義しよう．

定義 8 (正則分割)**.** 閉曲面 Σ_g の正則分割とは，閉曲面 Σ_g が同じ辺の数持つ n 枚の p 角形が 各頂点でちょうど k 枚ずつ貼り合わされているような分割である．

次に，分割の同相も定義しよう．これは 2 つの分割が**同じ**だと思えるかという問題を数学的に定式化したものである，

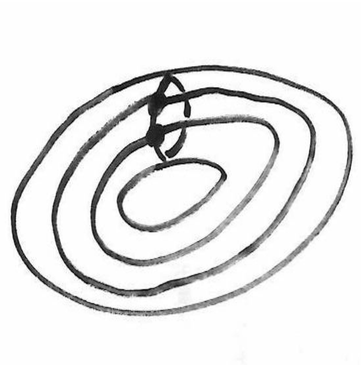
定義 9 (分割同相)**.** 閉曲面 Σ の分割 C を考え，その頂点の集合を V_1， 辺の集合を E_1 とする．また，閉曲面 Σ' の分割 C' を考え，その頂点の集合を V_2 ，辺の集合を E_2 とする．このとき C と C' が分割同相であるとは，連続写像 $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ が存在して次の (1), (2) を満たす時に言う．

(1) f が同相写像

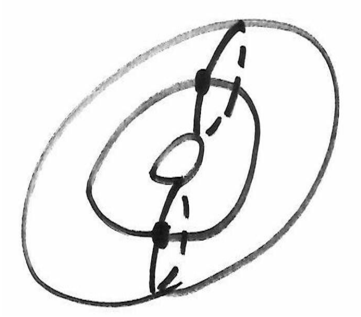
(2) $f : V_1 \to V_2$ および $f : E_1 \to E_2$ が全単射

分割同相の簡単な例を考えると下図の B と C は分割同相であるが，A と B は分割同相でない．

A



B



C

以下，閉曲面 Σ_g の正則分割を考えるときには，分割同相であれば同じ分割であると考えることにする．

定理 10. 種数 g の閉曲面 Σ_g の正則分割を考える．p 角形を各頂点 k 枚ずつ貼り合わせて n 枚用いるとき，

$$n(2p - kp + 2k) = 4k(1 - g) \tag{5}$$

が成り立つ．

Proof. 面の合計 f は

$$f = n$$

辺の合計 e は

$$e = \frac{pn}{2}$$

頂点の合計 v は

$$v = \frac{pn}{k}$$

となる．定理 6 より $\frac{pn}{k} - \frac{pn}{2} + n = \chi(\Sigma_g)$ また，定理 7 より $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ である．この 2 式を用いると，

$$\frac{pn}{k} - \frac{pn}{2} + n = \chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$$

が得られる．これを変形すると，

$$n(2p - kp + 2k) = 4k(1 - g)$$

となる．□

6　種数 $g = 0$ の閉曲面 Σ_0 (球面) の正則分割

定理 11. 種数 $g = 0$ のとき，p 角形を n 枚貼り合わせて閉曲面 Σ_0 を構成する．各頂点には k 枚集まっているとする時，$(p, k) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$ で正則分割できる．

Proof. 定理 7, 6 より，

$$\frac{pn}{k} - \frac{pn}{2} + n = \chi(\Sigma_0) = 2 \tag{6}$$

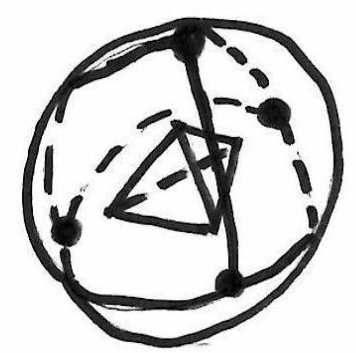
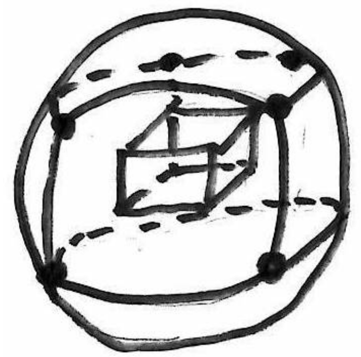
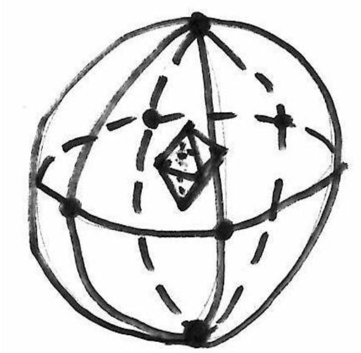
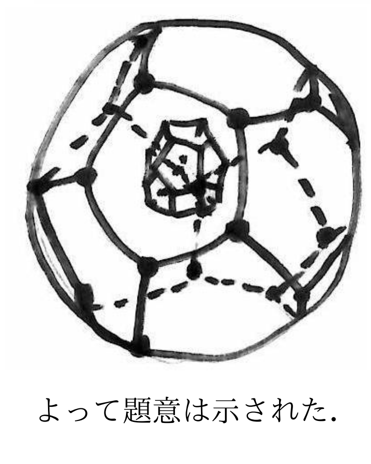
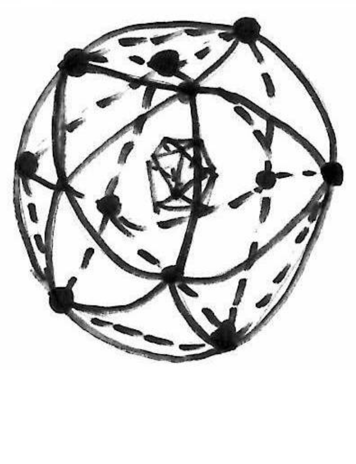
式 (6) を変形すると，

$$\left(\frac{2}{k}\right) \geqq \frac{1}{k} + \frac{1}{p} = \frac{2}{pn} + \frac{1}{2} \geqq \frac{1}{2} \tag{7}$$

式 (7) から (p, k, n) の組み合わせを考えると，

$$(p, k, n) = (3, 3, 4),\ (3, 4, 8),\ (3, 5, 20),\ (4, 3, 8),\ (5, 3, 12) \tag{8}$$

となる．この組み合わせから実現可能か考える．

よって題意は示された．　□

つまり，球面に同相な多面体は正四面体，正六面体，正十二面体，正八面体，正二十面体の 5 種類あることがわかる．言い換えると，球面には 5 通りの多角形による正則分割がある．これは一般的によく知られている．

7 種数 $g = 1$ の閉曲面 Σ_1 (トーラス) の正則分割

定理 12. 種数 $g = 1$ の閉曲面 Σ_1 を一般的にトーラスという．p 角形を n 枚貼り合わて閉曲面 Σ_1 を構成する．各頂点には k 枚集まっているとするとき，$(p, k) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$ で閉曲面 Σ_1 を正則分割できる．

Proof. 定理 7, 6 より，

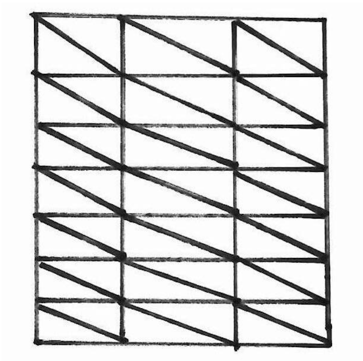
$$\frac{pn}{k} - \frac{pn}{2} + n = \chi(\Sigma_1) = 0 \tag{9}$$

$$n\{(k-2)(p-2) - 4\} = 0 \tag{10}$$

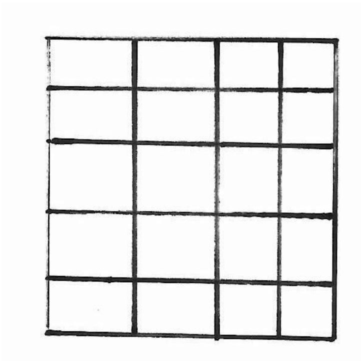
$$(k-2)(p-2) = 4 \tag{11}$$

式 (11) よりトーラスの正則分割が n に依存しないことがわかる．よって，(p, k) の組み合わせを考えると $(p, k) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$ となる．トーラスは長方形から筒を作り両端を合わせるとできるので，展開図は長方形である．展開図の表面に多角形を描くことで実際に正則分割が実現可能か容易に判断できる．

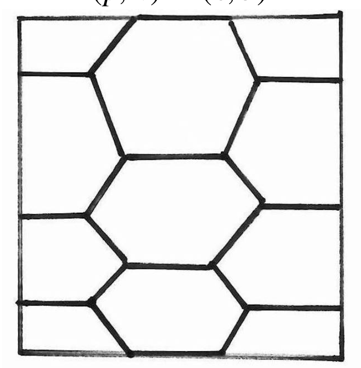
$(p, k) = (3, 6)$



$(p, k) = (4, 4)$



$(p, k) = (6, 3)$



よって題意は示された． □

つまり，トーラス (閉曲面 Σ_1) の正則分割は 3 種類しか存在しない [3, p.8]．しかし，この正則分割は上のパターンを繰り返すことにより，無限に存在することに注意する．

8　種数 $g = 2$ の閉曲面 Σ_2 の正則分割の組み合わせ分類

定理 13. 種数 $g = 2$ の閉曲面 Σ_2 を n 枚の p 角形で正則分割し，各頂点には k 枚ずつの多角形が貼り合わされているとする．このとき，正則分割に対する (p, k, n) の組み合わせは 25 通りあって，それは表 (12) , (13) にあげるもので尽くされる．

p	3						4				5		
k	7	8	9	10	12	18	5	6	8	12	4	5	10
n	28	16	12	10	8	6	10	6	4	3	8	4	2
v	12	6	4	3	2	1	8	4	2	1	10	4	1
e	42	24	18	15	12	9	20	12	8	6	20	10	5

(12)

p	6		7	8			9	10		12		18
k	4	6	3	3	4	8	3	3	5	3	4	3
n	4	2	12	6	2	1	4	3	1	2	1	1
v	6	2	28	16	4	1	12	10	2	8	3	6
e	12	6	42	24	8	4	18	15	5	12	6	9

(13)

$p \geqq 19, p = 11, 13, 14, 15, 16, 17$ については p 角形を用いた正則分割は存在しない，

補題 14. 正則分割が可能ならば $3 \leqq p \leqq 18$ である．

Proof. 仮定より $3 \leqq p$ である．式 (2), (3) より，

$$\frac{pn}{k} - \frac{pn}{2} + n = \chi(\Sigma_2) = -2 \tag{14}$$

$$(k-2)(pn-2n-4) = 4(n+2) \tag{15}$$

式 (14) を変形して 式 (15) の条件式が得られた．ここで， p について考える．式 (15) を変形すると，

$$p = \frac{2k(n+2)}{n(k-2)} \tag{16}$$

$$p = 2\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{k-2} + \frac{4}{n(k-2)}\right) \tag{17}$$

仮定より $k \geqq 3$，$n \geqq 1$ なので，右辺の分数は

$$\frac{2}{n} \leqq 2$$

$$\frac{2}{k-2} \leqq 2$$

$$\frac{4}{n(k-2)} \leqq 4$$

となるので，式 (17) は

$$p \leqq 18 \tag{18}$$

となる．よって，仮定より p の条件式は，

$$3 \leqq p \leqq 18 \tag{19}$$

となる． □

3 $\leqq p \leqq$ 18 のときの (p, k, n, v, e) の組み合わせを考える．

Proof. 次に表中の各 p について考える．基本は具体的な p の値を式 (15) に代入して，それを因数分解することで考える．例えば $p = 3$ のとき
式 (15) は，

$$(k-6)(n-4) = 24 \tag{20}$$

$$v = \frac{pn}{k} \tag{21}$$

$$e = \frac{pn}{2} \tag{22}$$

式 (20) より $(k-6), (n-4)$ は 24 の約数であるから，対応する (p, k, n, v, e) の組み合わせを式 (21),(22) を用いて考えると，

p	3							
k	7	8	9	10	12	14	18	30
n	28	16	12	10	8	7	6	5
v	12	6	4	3	2	3/2	1	1/2
e	42	24	18	15	12	21/2	9	5/2

(23)

となる．ここで注目してほしいのが， $k = 14, 30$ のときである．この場合には v, e が分数となり正則分割は不可能である．つまり，(p, k, n, v, e) の組み合わせによっては除外するものがあることに注意する．$p \geqq 3$ ときの式 (15) に p の値をそれぞれ代入し式 (20) に相

当する因数分解した式を以下に挙げる．

$$
\begin{array}{|c|c|}
\hline
p & \text{式 (20) に相当する式} \\
\hline
3 & (k-6)(n-4)=24 \\
\hline
4 & (k-4)(n-2)=8 \\
\hline
5 & 3kn-10n-4k=0 \\
\hline
6 & (k-3)(n-1)=3 \\
\hline
7 & 5kn-14n-4k=0 \\
\hline
8 & 3kn-8n-2k=0 \\
\hline
9 & 7kn-18n-4k=0 \\
\hline
10 & 2kn-5n-k=0 \\
\hline
11 & 9kn-22n-4k=0 \\
\hline
12 & 5kn-12n-2k=0 \\
\hline
13 & 11kn-26n-24k=0 \\
\hline
14 & 3kn-7n-k=0 \\
\hline
15 & 3kn-8n-2k=0 \\
\hline
16 & 13kn-30n-4k=0 \\
\hline
17 & 7kn-16n-4k=0 \\
\hline
18 & 4kn-9n-k=0 \\
\hline
\end{array}
\tag{24}
$$

8.1　因数分解できる式から組み合わせを求める

$p=4$ のとき式 (15) は，

$$(k-4)(n-2)=8 \tag{25}$$

式 (25) より $(k-4),(n-2)$ は k,n が整数なので，8 の約数とわかる．8 の約数は有限個なので，(p,k,n,v,e) の組み合わせを考えると，

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
p & 4 & & & \\
\hline
k & 5 & 6 & 8 & 12 \\
\hline
n & 10 & 6 & 4 & 3 \\
\hline
v & 8 & 4 & 2 & 1 \\
\hline
e & 20 & 12 & 8 & 6 \\
\hline
\end{array}
\tag{26}
$$

となる．

$p=6$ のとき式 (15) は，

$$(k-3)(n-1)=3 \tag{27}$$

式 (27) より $(k-3),(n-1)$ は k,n が整数なので，3 の約数とわかる．3 の約数は有限個な

ので，(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

p	6	
k	4	6
n	4	2
v	6	2
e	12	6

(28)

となる．

8.2 n, k の範囲から組み合わせを求める

$p = 5$ のとき式 (15) は，

$$3kn - 10n - 4k = 0 \tag{29}$$

式 (29) は因数分解し，整数の約数から k, n を見つけ出す方法は使えない．なので，k, n について整理すると，

$$k = \frac{10n}{3n - 4} \tag{30}$$

$$n = \frac{4k}{3k - 10} \tag{31}$$

となる．k, n は整数なので $k \geqq \frac{10}{3}, n \geqq \frac{4}{3}$ となり，式 (30) は n に関しての減少関数なので，$n = 2$ のときに k は最大値を取るので，

$$10 \geqq k \geqq \frac{10}{3} \tag{32}$$

とわかる．また，式 (31) も k に関しての減少関数なので，$k = 4$ のときに n は最大値を取るので，

$$8 \geqq n \geqq \frac{4}{3} \tag{33}$$

とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

p	5									
k	4	70/17	30/7	50/11	5	6	7	8	9	10
n	8	7	6	5	4	3	28/11	16/7	36/17	2
v	10	×	×	×	4	5/2	×	×	×	1
e	20	×	×	×	10	15/2	×	×	×	5

(34)

となる．よって分数を含む組み合わせを除外すると，

p	5		
k	4	6	10
n	8	4	2
v	10	4	1
e	20	10	5

(35)

となる．

p=7 のとき式 (15) は，

$$5kn - 14n - 4k = 0 \tag{36}$$

式 (36) は k, n について整理すると，

$$k = \frac{14n}{5n - 4} \tag{37}$$

$$n = \frac{4k}{5k - 14} \tag{38}$$

k, n は整数なので $k \geqq \frac{14}{5}, n \geqq \frac{4}{5}$ となり，式 (37) は n に関しての減少関数なので，$n = 1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し，

$$14 \geqq k \geqq \frac{14}{5} \tag{39}$$

とわかる．また，式 (38) も k に関しての減少関数なので，$k = 3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し，

$$12 \geqq n \geqq \frac{4}{5} \tag{40}$$

とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

p	7											
k	3	154/51	70/23	126/41	23/9	98/31	34/13	10/3	14/3	42/11	4	14/3
n	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	8/3	2
v	28	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
e	42	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

(41)

p											
k	14/3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n	2	20/11	3/2	4/3	16/13	36/31	10/9	44/41	24/23	26/19	1
v	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
e	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

(42)

となる．よって分数を含む組み合わせを除外すると，

p	7
k	3
n	12
v	28
e	42

(43)

となる．

$p=8$ のとき式 (15) は，

$$3kn-8n-2k=0 \tag{44}$$

(44) は k,n について整理すると，

$$n=\frac{2k}{3k-8} \tag{45}$$

$$k=\frac{8n}{3n-2} \tag{46}$$

となる．k,n は整数なので $k \geqq \frac{8}{3}, n \geqq \frac{2}{3}$ となり，式 (46) は n に関しての減少関数なので，$n=1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し，

$$8 \geqq k \geqq \frac{8}{3} \tag{47}$$

とわかる．また，式 (45) も k に関しての減少関数なので，$k=3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し，

$$6 \geqq n \geqq \frac{2}{3} \tag{48}$$

とわかる．(p,k,n,v,e) の組み合わせを考えると，

p	8								
k	3	40/13	16/5	24/7	4	5	6	7	8
n	6	5	4	3	2	10/7	6/5	14/13	1
v	16	×	×	×	2	×	×	×	1
e	24	×	×	×	8	×	×	×	4

(49)

となる．よって分数を含む組み合わせを除外すると，

p	8		
k	3	4	8
n	6	2	1
v	16	4	1
e	24	8	4

(50)

となる．

$p=9$ のとき式 (15) は,

$$7kn-18n-4k=0 \tag{51}$$

(51) は $k=,n=$ の形に変形すると,

$$n=\frac{4k}{7k-18} \tag{52}$$

$$k=\frac{18n}{7n-4} \tag{53}$$

となる．k,n は整数なので $k \geqq \frac{18}{7}, n \geqq \frac{4}{7}$ となり，式 (53) は n に関しての減少関数なので，$n=1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し,

$$6 \geqq k \geqq \frac{18}{7} \tag{54}$$

とわかる．また，式 (52) も k に関しての減少関数なので，$k=3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し,

$$4 \geqq n \geqq \frac{4}{7} \tag{55}$$

とわかる．(p,k,n,v,e) の組み合わせを考えると,

p	9					
k	3	54/17	4	28/5	5	6
n	4	3	2	8/5	20/17	1
v	12	×	×	1	×	3/2
e	18	×	×	5	×	9/2

(56)

となる．よって分数を含む組み合わせを除外すると,

p	9
k	3
n	4
v	12
e	18

(57)

となる．

$p=10$ のとき式 (15) は,

$$2kn-5n-k=0 \tag{58}$$

式 (58) は k,n について整理すると,

$$n=\frac{k}{2k-5} \tag{59}$$

$$k = \frac{5n}{2n-1} \tag{60}$$

となる．k, n は整数なので $k \geqq \frac{5}{2}, n \geqq \frac{1}{2}$ となり，式 (60) は n に関しての減少関数なので，$n = 1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し，

$$5 \geqq k \geqq \frac{5}{2} \tag{61}$$

とわかる．また，式 (59) も k に関しての減少関数なので，$k = 3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し，

$$3 \geqq n \geqq \frac{1}{2} \tag{62}$$

とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

p	10			
k	3	10/3	4	5
n	3	2	4/3	1
v	10	×	×	×
e	15	×	×	×

(63)

となる．よって分数を含む組み合わせを除外すると，

p	10	
k	3	5
n	3	1
v	10	2
e	15	5

(64)

となる．

$p = 11$ のとき式 (15) は，

$$9kn - 22n - 4k = 0 \tag{65}$$

(65) は k, n について整理すると，

$$n = \frac{4k}{9k-22} \tag{66}$$

$$k = \frac{22n}{9n-4} \tag{67}$$

となる．k, n は整数なので $k \geqq \frac{22}{9}, n \geqq \frac{4}{9}$ となり，式 (67) は n に関しての減少関数なので，$n = 1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{22}{5} \geqq k \geqq \frac{22}{9} \tag{68}$$

とわかる．また，式 (66) も k に関しての減少関数なので，$k = 3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{12}{5} \geqq n \geqq \frac{4}{9} \tag{69}$$

とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

p	11			
k	3	44/14	4	22/5
n	12/5	2	8/7	1
v	×	×	×	×
e	×	×	×	×

(70)

となる．よって分数を含む組み合わせのみで実現不可能である，

$p = 12$ のとき式 (15) は，

$$5kn - 12n - 2k = 0 \tag{71}$$

(71) は k, n について整理すると，

$$n = \frac{2k}{5k - 12} \tag{72}$$

$$k = \frac{12n}{5n - 2} \tag{73}$$

となる．k, n は整数なので $k \geqq \frac{12}{5}, n \geqq \frac{2}{5}$ となり，式 (73) は n に関しての減少関数なので，$n = 1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し，

$$4 \geqq k \geqq \frac{12}{5} \tag{74}$$

とわかる．また，式 (72) も k に関しての減少関数なので，$k = 3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し，

$$2 \geqq n \geqq \frac{2}{5} \tag{75}$$

とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

p	12	
k	3	4
n	2	1
v	8	3
e	12	6

(76)

となる．

$p = 13$ のとき式 (15) は，

$$11kn - 26n - 4k = 0 \tag{77}$$

式 (77) は k, n について整理すると，

$$n = \frac{4k}{11k - 26} \tag{78}$$

$$k = \frac{26n}{11n - 4} \tag{79}$$

となる．k, n は整数なので $k \geqq \frac{26}{11}, n \geqq \frac{4}{11}$ となり，式 (79) は n に関しての減少関数なので，$n = 1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{26}{7} \geqq k \geqq \frac{26}{11} \tag{80}$$

とわかる．また，式 (78) も k に関しての減少関数なので，$k = 3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{12}{7} \geqq n \geqq \frac{4}{11} \tag{81}$$

とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

p	13	
k	3	26/7
n	12/7	1
v	×	×
e	×	×

(82)

となる．よって分数を含む組み合わせのみで実現不可能である．

$p = 14$ のとき式 (15) は，

$$3kn - 7n - k = 0 \tag{83}$$

式 (83) は k, n について整理すると，

$$n = \frac{k}{3k - 7} \tag{84}$$

$$k = \frac{7n}{3n - 1} \tag{85}$$

となる．k, n は整数なので $k \geqq \frac{7}{3}, n \geqq \frac{1}{3}$ となり，式 (85) は n に関しての減少関数なので，$n = 1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{7}{2} \geqq k \geqq \frac{7}{3} \tag{86}$$

とわかる．また，式 (84) も k に関しての減少関数なので，$k = 3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{3}{2} \geqq n \geqq \frac{1}{3} \tag{87}$$

とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

p	14	
k	3	7/2
n	3/2	1
v	×	×
e	×	×

(88)

となる．よって分数を含む組み合わせのみで実現不可能である．

$p = 15$ のとき式 (15) は，

$$13kn - 30n - 4k = 0 \tag{89}$$

式 (89) は k, n について整理すると，

$$n = \frac{4k}{13k - 30} \tag{90}$$

$$k = \frac{30n}{13n - 4} \tag{91}$$

となる．k, n は整数なので $k \geqq \frac{30}{13}, n \geqq \frac{4}{13}$ となり，式 (91) は n に関しての減少関数なので，$n = 1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{10}{3} \geqq k \geqq \frac{30}{13} \tag{92}$$

とわかる．また，式 (90) も k に関しての減少関数なので，$k = 3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{4}{3} \geqq n \geqq \frac{4}{13} \tag{93}$$

とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

p	15	
k	3	10/3
n	4/3	1
v	×	×
e	×	×

(94)

となる．よって分数を含む組み合わせのみで実現不可能である．

$p = 16$ のとき式 (15) は，

$$7kn - 16n - 4k = 0 \tag{95}$$

式 (95) は k, n について整理すると，

$$n = \frac{4k}{7k - 16} \tag{96}$$

$$k = \frac{16n}{7n - 4} \tag{97}$$

k, n は整数なので $k \geqq \frac{16}{7}, n \geqq \frac{4}{7}$ となり，式 (97) は n に関しての減少関数なので，$n = 1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{16}{3} \geqq k \geqq \frac{16}{7} \tag{98}$$

とわかる．また，式 (96) も k に関しての減少関数なので，$k = 3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{12}{5} \geqq n \geqq \frac{4}{7} \tag{99}$$

とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

p	16	
k	3	16/3
n	12/5	1
v	×	×
e	×	×

(100)

となる．よって分数を含む組み合わせのみで実現不可能である．

$p = 17$ のとき式 (15) は，

$$15kn - 34n - 4k = 0 \tag{101}$$

式 (101) は k, n について整理すると，

$$n = \frac{4k}{15k - 34} \tag{102}$$

$$k = \frac{34n}{15n - 4} \tag{103}$$

となる．k, n は整数なので $k \geqq \frac{34}{15}, n \geqq \frac{4}{15}$ となり，式 (103) は n に関しての減少関数なので，$n = 1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{34}{11} \geqq k \geqq \frac{34}{15} \tag{104}$$

とわかる．また，式 (102) も k に関しての減少関数なので，$k = 3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し，

$$\frac{12}{11} \geqq n \geqq \frac{4}{15} \tag{105}$$

とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline p & 17 & \\ \hline k & 3 & 34/11 \\ \hline n & 12/11 & 1 \\ \hline v & \times & \times \\ \hline e & \times & \times \\ \hline \end{array} \tag{106}$$

となる．よって分数を含む組み合わせのみで実現不可能である．

$p = 18$ のとき式 (15) は，

$$4kn - 9n - k = 0 \tag{107}$$

式 (107) は k, n について整理すると，

$$n = \frac{k}{4k - 9} \tag{108}$$

$$k = \frac{9n}{4n - 1} \tag{109}$$

となる．k, n は整数なので $k \geqq \frac{9}{4}, n \geqq \frac{1}{4}$ となり，式 (109) は n に関しての減少関数なので，$n = 1$ のときに k は最大値を取るのでを代入し，

$$3 \geqq k \geqq \frac{9}{4} \tag{110}$$

とわかる．また，式 (108) も k に関しての減少関数なので，$k = 3$ のときに n は最大値を取るのでを代入し，

$$3 \geqq n \geqq \frac{9}{4} \tag{111}$$

とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせを考えると，

$$\begin{array}{|c|c|} \hline p & 18 \\ \hline k & 3 \\ \hline n & 1 \\ \hline v & 6 \\ \hline e & 9 \\ \hline \end{array} \tag{112}$$

となる．

8.3　$3 \leqq p \leqq 18$ のとき

以上より，(p, k, n, v, e) の組み合わせは以下の 25 通りになる

p	3						4				5		
k	7	8	9	10	12	18	5	6	8	12	4	5	10
n	28	16	12	10	8	6	10	6	4	3	8	4	2
v	12	6	4	3	2	1	8	4	2	1	10	4	1
e	42	24	18	15	12	9	20	12	8	6	20	10	5

(113)

p	6		7	8			9	10		12		18
k	4	6	3	3	4	8	3	3	5	3	4	3
n	4	2	12	6	2	1	4	3	1	2	1	1
v	6	2	28	16	4	1	12	10	2	8	3	6
e	12	6	42	24	8	4	18	15	5	12	6	9

(114)

$p \geqq 19, p = 11, 13, 14, 15, 16, 17$ については p 角形を用いた正則分割は存在しない，

よって題意は示された． □

9　種数 2 の閉曲面 Σ_2 の正則分割の実現

正則分割の実現を考える．このとき，4 つの方法を用いる．

1. 実際に種数 2 の閉曲面の絵を描き表面を正則分割する
2. 閉曲面の展開図を考える
3. 展開図を分割して考える
4. 正則分割できた多面体の双対を考える

ここで，双対について定義しておく，

定義 15 (双対)**.** 多面体 X から多面体 Y を作る． X の各面内に Y の頂点を 1 つとり， Y の頂点同士を X の辺で 1 ずつ交わるように結んでできた多面体を双対多面体という．

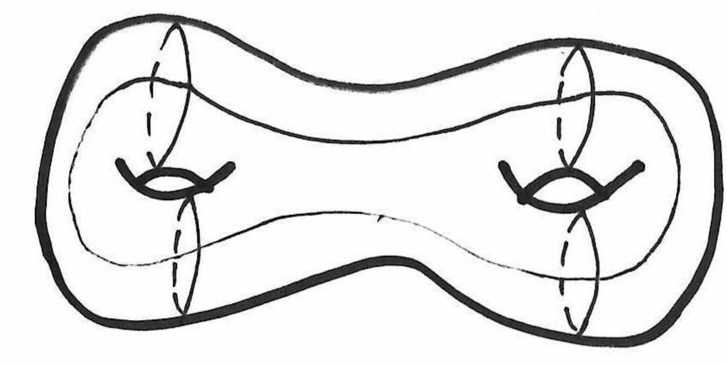
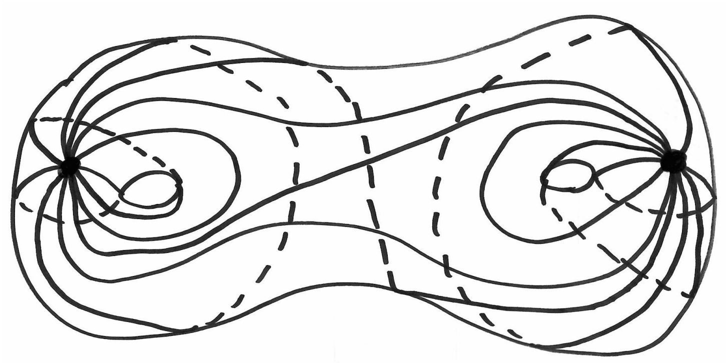
それぞれの方法で種数 2 の閉曲面 Σ_2 の正則分割の実現を考える．

9.1　実際に種数 2 の閉曲面の絵を描き表面を正則分割する

手順は，

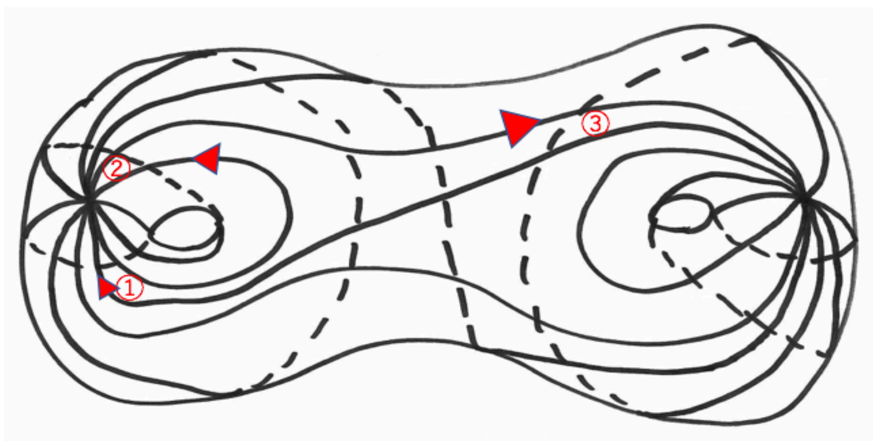
1. 種数 2 の閉曲面の絵を描く
2. 閉曲面の表面を正則分割する絵を描く

とする．$(p, k, n, v, e) = (3, 12, 8, 2, 12)$ を具体例として考えると，


1.

2.

となる．

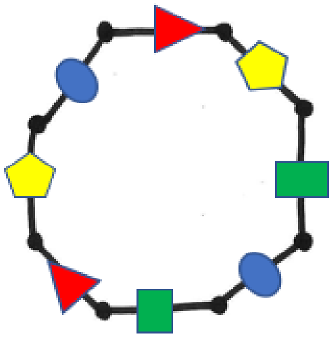
注意 16. しかし一眼では 図 2 が 8 角形で分割されているわからないので，下図のようにある頂点を始点とし一方方向に辺を辿り実際に多角形が成立しているか確認する．



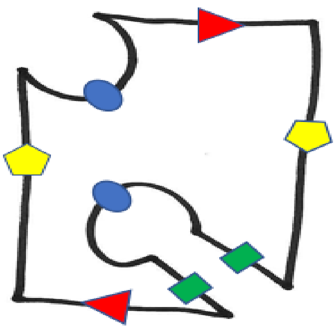
9.2 閉曲面 Σ_2 の展開図を考える

種数 2 の閉曲面 Σ_2 の展開図から (p, k, n, v, e) を考える．例として $(p, k, n, v, e) = (8, 8, 1, 1, 4)$ を考えるが，8 角形 1 枚から種数 2 の閉曲面 Σ_2 が構成されるのは数学者の界

隈ではよく知られている．まず，8 角形を用意し下図のように各頂点に記号をつける．

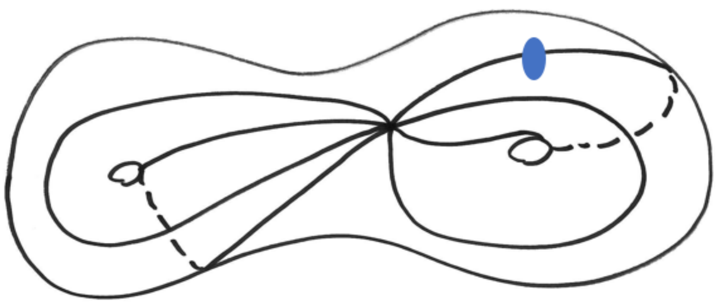


そして，同じ記号が記された辺同士を貼り合わせる．手順としては下図のように行うとわかりやすい．



1.

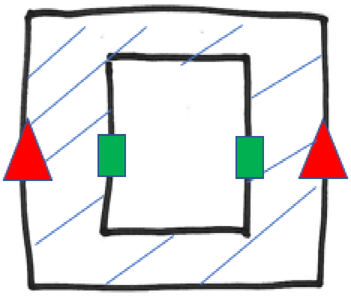
2.



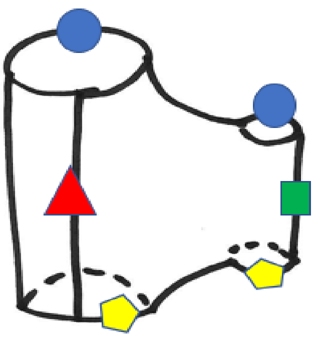
3.

9.3　展開図を分割して考える

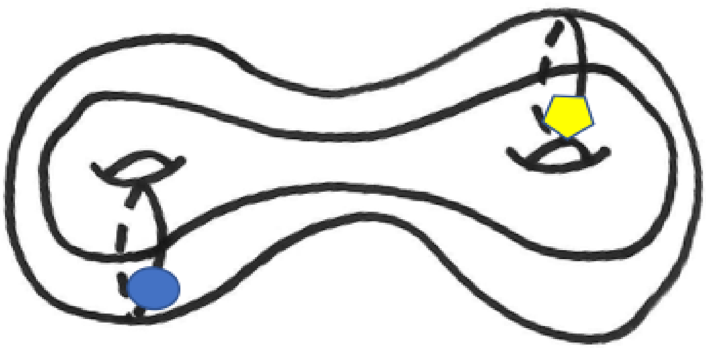
9.2 のように種数 2 の閉曲面 Σ_2 の展開図を考える．真ん中に穴の空いた図形から種数 2 の閉曲面 Σ_2 を作成できるのが下図の手順からわかる．各辺に記された記号が同じ辺を貼り合わせる．



1.

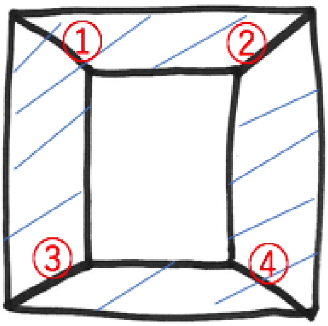


2.

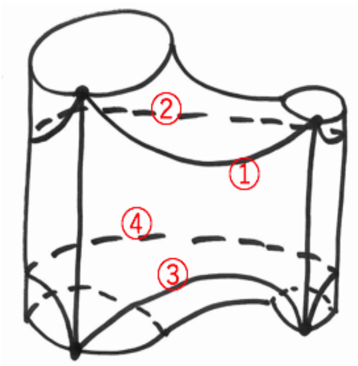


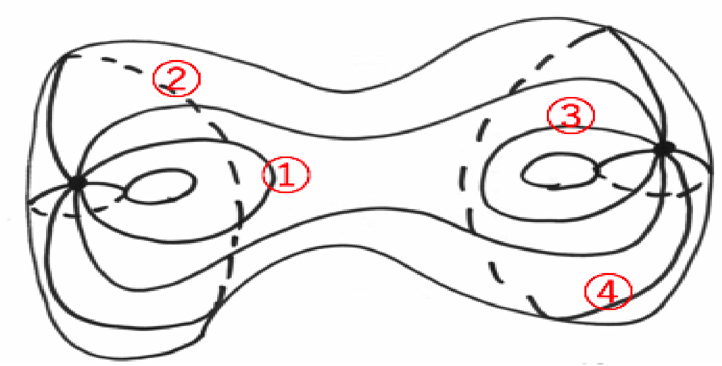
3.

以上より，1 が種数 2 の閉曲面 Σ_2 の展開図がわかる．ここから 1 に分割線を引く

1. 

そして，先と同様の手順で 1 を貼り合わせていくと，

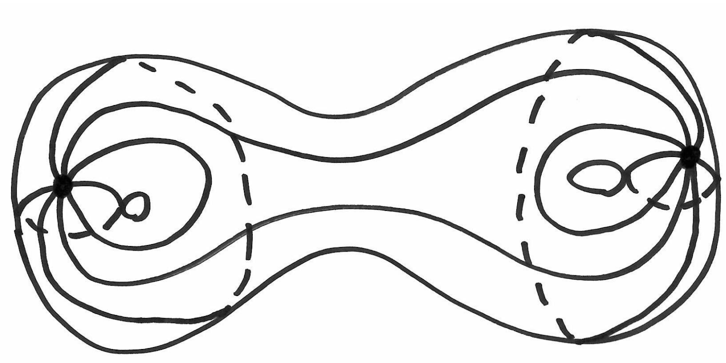
1. 

2. 

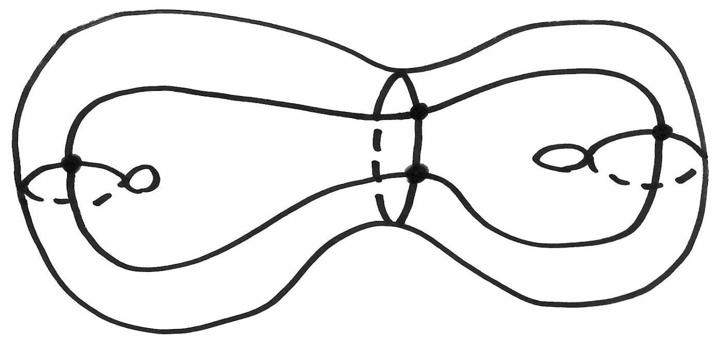
となり，$(p, k, n, v, e) = (4, 8, 4, 2, 8)$ が実現した．

9.4　正則分割できた多面体の双対を考える

定義 15 より，9.1, 9.2, 9.3 で実現した正則分割から双対多面体を考える．例として $(p, k, n, v, e) = (4, 8, 4, 2, 8)$ の正則分割の実現を考えると，



となる．この正則分割の双対は $(p, k, n, v, e) = (8, 4, 2, 4, 8)$ なので，定義 15 に従い考えると，



とわかる．(p, k, n, v, e) の組み合わせの双対に対応するものは片方が実現すれば必ず実現可能なのは自明である．双対多面体の組み合わせは以下のようになる，

p	3	7	3	8	3	9	3	10	3	12	3	18
k	7	3	8	3	9	3	10	3	12	3	18	3
n	28	12	16	6	12	4	10	3	8	2	6	1
v	12	28	6	16	4	12	3	10	2	8	1	6
e	42	42	24	24	18	18	15	15	12	12	9	9

(115)

p	4	5	4	6	4	8	4	12	5	10	5	6	8
k	5	4	6	4	8	4	12	4	10	5	5	6	8
n	10	8	6	4	4	2	3	1	2	1	4	2	1
v	8	10	4	6	2	4	1	3	1	2	4	2	1
e	20	20	12	12	8	8	6	6	5	5	10	6	4

(116)

となり，

p	5	6	8
k	5	6	8
n	4	2	1
v	4	2	1
e	10	6	4

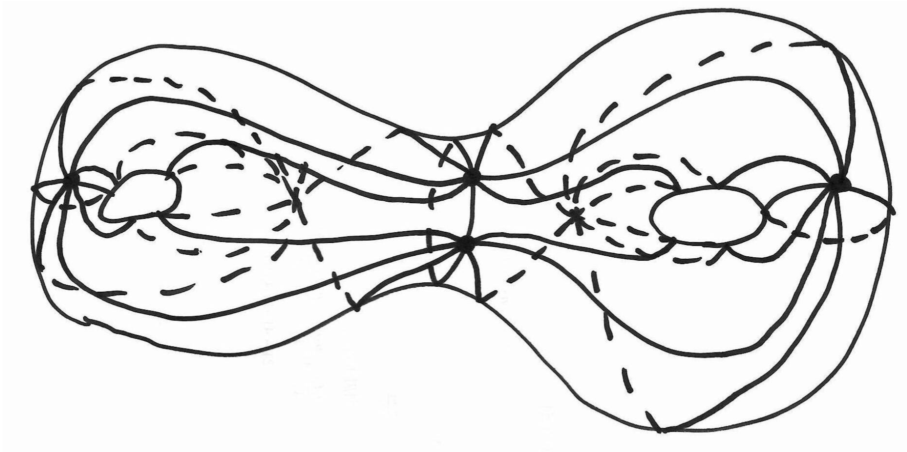
(117)

は自己双対多面体である.

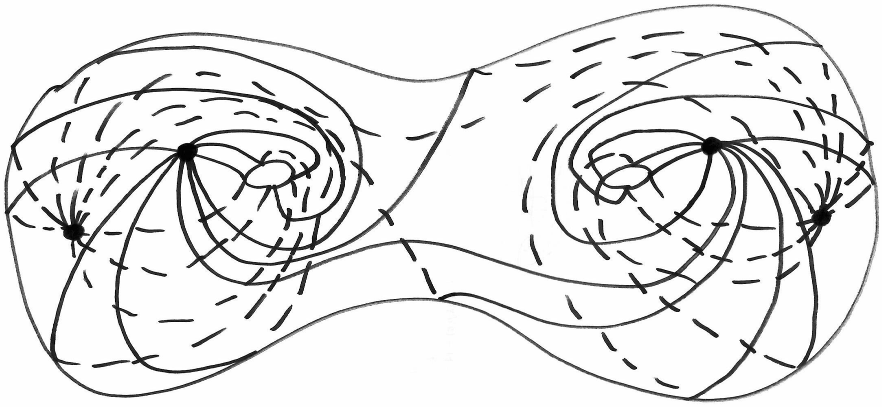
9.5 実現できた多面体

実際に実現できた (p, k, n, v, e) を図に描くと次のようになる.

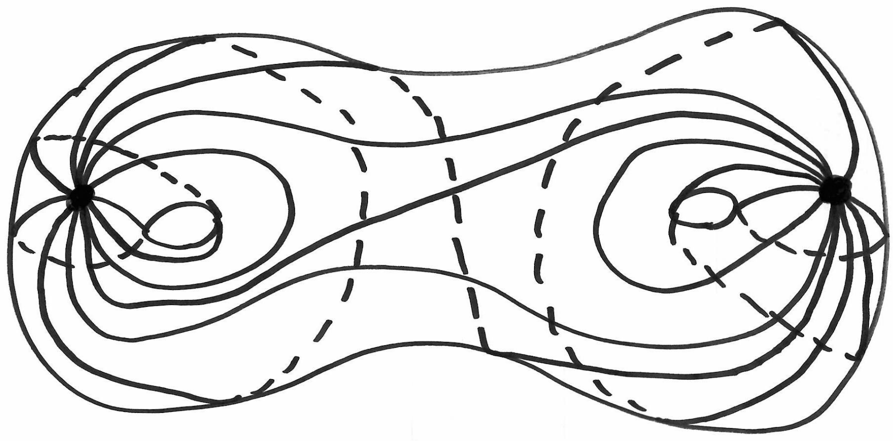
$(p, k, n, v, e) = (3, 8, 16, 6, 24)$



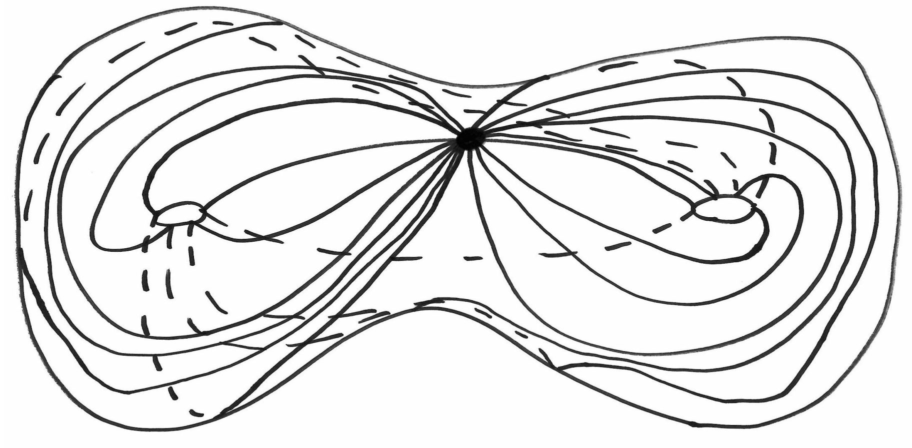
$(p, k, n, v, e) = (3, 9, 12, 4, 18)$



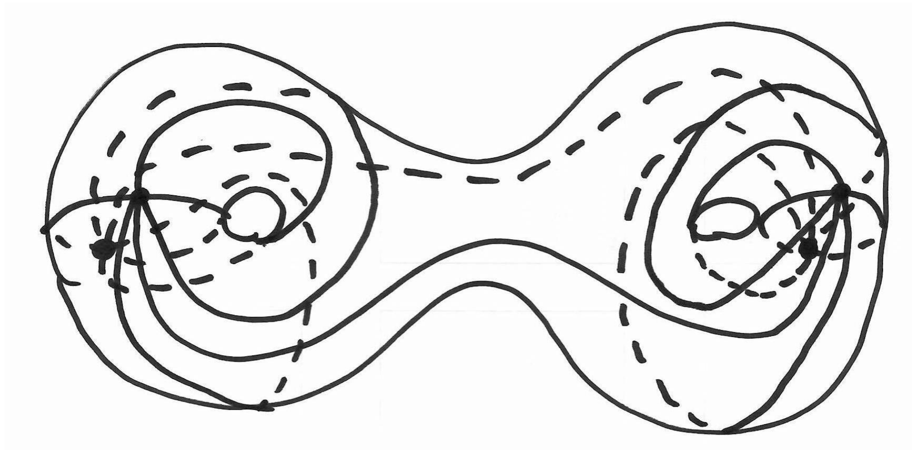
$(p, k, n, v, e) = (3, 12, 8, 2, 12)$



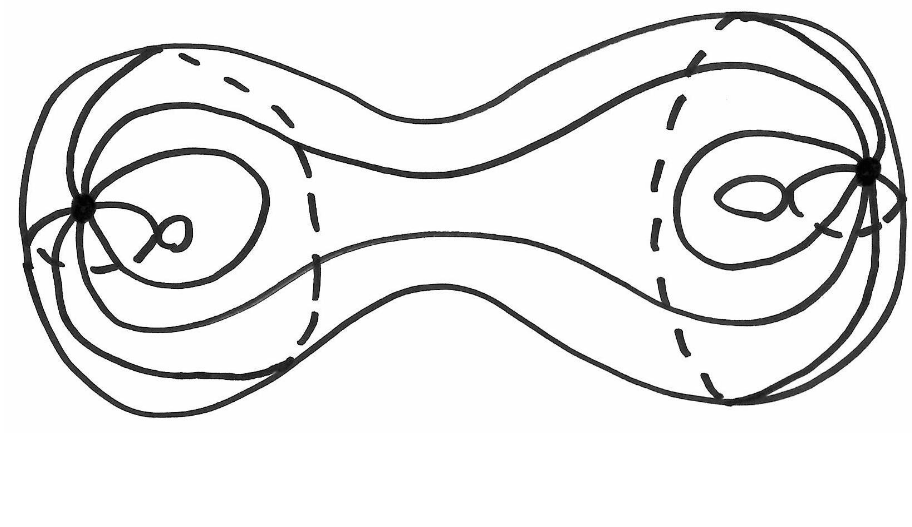
$(p, k, n, v, e) = (3, 18, 6, 1, 9)$



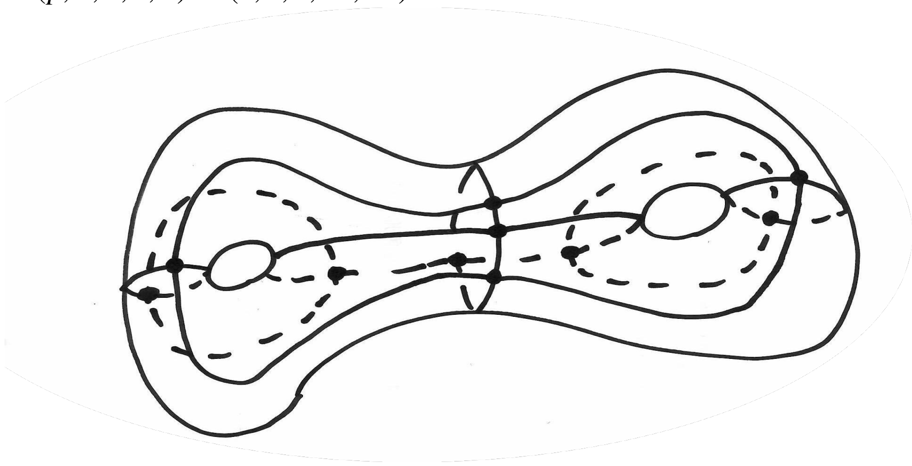
$(p, k, n, v, e) = (4, 6, 6, 4, 12)$



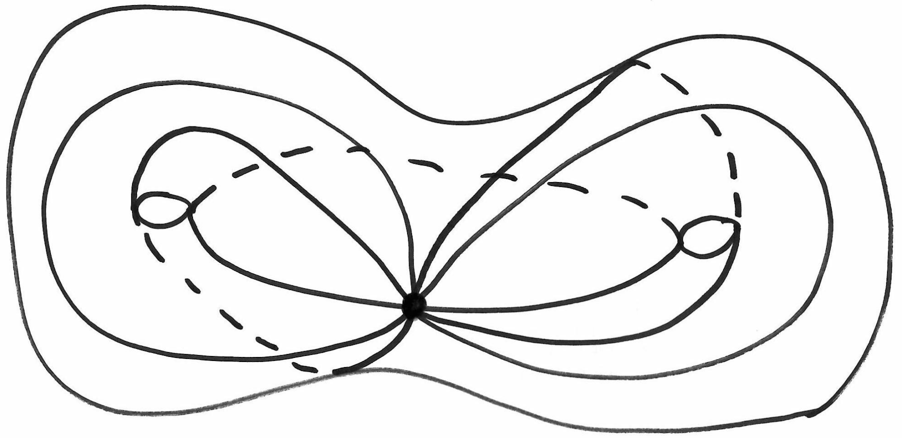
$(p, k, n, v, e) = (4, 8, 4, 2, 8)$



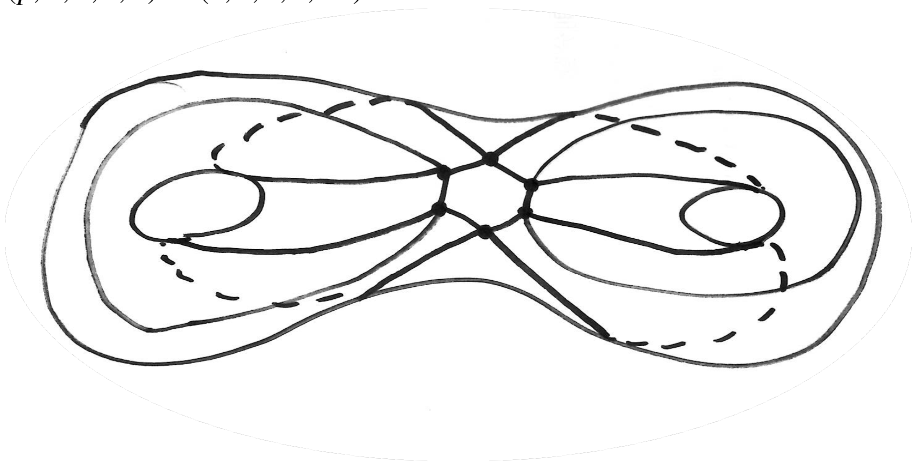
$(p, k, n, v, e) = (5, 4, 8, 10, 20)$



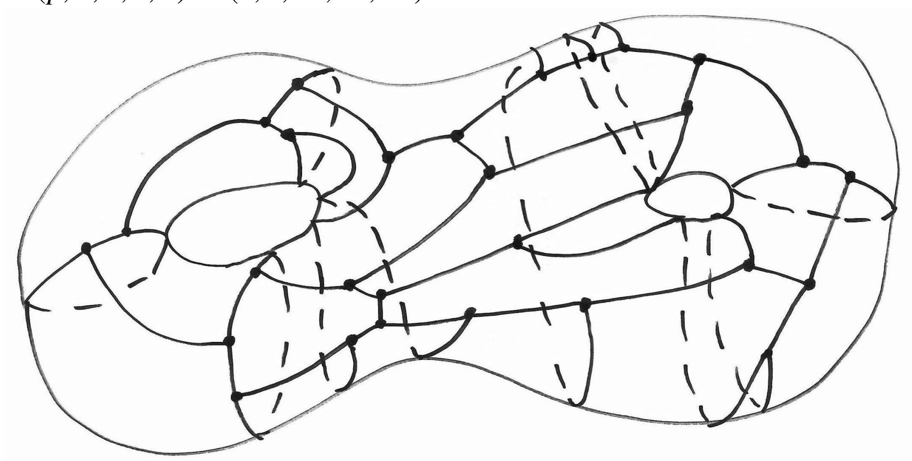
$(p, k, n, v, e) = (5, 10, 2, 1, 5)$



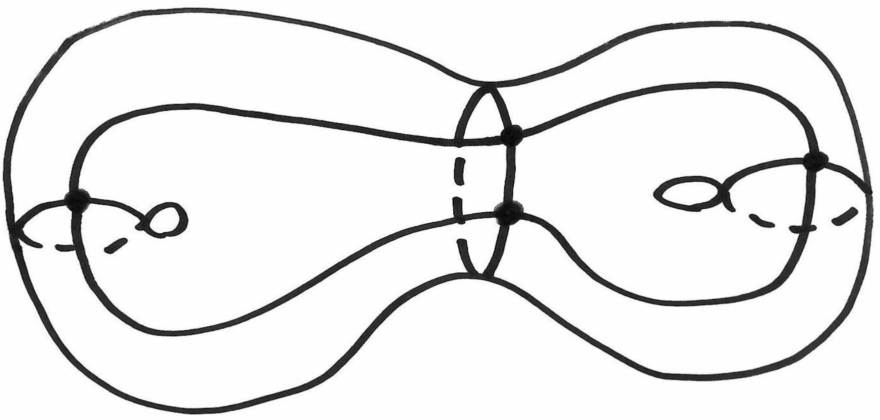
$(p, k, n, v, e) = (6, 4, 4, 6, 12)$



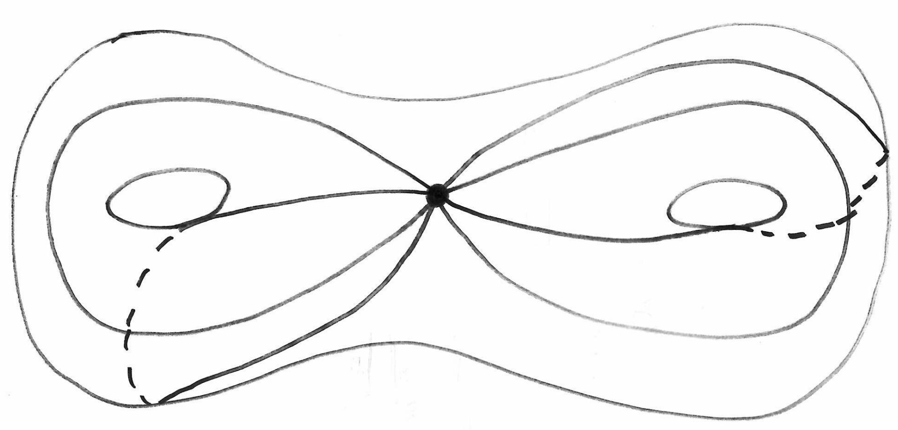
$(p, k, n, v, e) = (7, 3, 12, 28, 42)$



$(p, k, n, v, e) = (8, 4, 2, 4, 8)$



$(p, k, n, v, e) = (8, 8, 1, 1, 4)$



ここに図示はしていないが，双対多面体を考えると以下の表の 19 通りが実現できた．

p	3	7	3	8	3	9	3	12	3	18
k	7	3	8	3	9	3	12	3	18	3
n	28	12	16	6	12	4	8	2	6	1
v	12	28	6	16	4	12	2	8	1	6
e	42	42	24	24	18	18	12	12	9	9

(118)

p	4	5	4	6	4	8	5	10	8
k	5	4	6	4	8	4	10	5	8
n	10	8	6	4	4	2	2	1	1
v	8	10	4	6	2	4	1	2	1
e	20	20	12	12	8	8	5	5	4

(119)

実現できていないのは次の 6 通りである．

p	3	10	4	12	5	6
k	10	3	12	4	5	5
n	10	3	3	1	4	2
v	3	10	1	3	4	5
e	15	15	6	6	10	6

(120)

10 まとめ

本研究では，種数 2 の閉曲面の正則分割が 25 通りあるとわかり，その実現は 19 通り実現できた．目標は，種数 2 の閉曲面の正則分割の実現を 25 通りすべて見つけることであったが，それができなかったのは残念である．正則分割の実現を考える際に，種数 2 の閉曲面の絵を描き表面を正則分割する方法で多くが実現した．ポイントは，多角形が自分自身の辺や頂点と貼り合う可能性があることである．しかし，1 通りの実現が見つかっても，次の候補には発展しにくかった．そこで，閉曲面の展開図を考える方法と展開図の分割を考える方法が大いに役に立った．閉曲面の展開図が見つかると，その展開図の分割を考えることで 1 通りの実現から 1 〜 3 通りの実現が見つかった．そして，実現した正則分割の双対を考えることからさらに見つかった．見つからなかった実現は双対の関係と自己双対の関係を含む 6 通りであるので，双対多面体は片方の正則分割の実現を見つけられれば，必然的に双対の関係にある正則文化の実現が見つかる．この 6 通りの実現を将来考えていきたい．

発展した話題としては卒業研究で実現した正則分割と分割同相である別の正則分割があるかどうかという問題が考えられる．また，種数を増やして一般的に考えることも課題と

してあげられる．分割の同相については松田教授のコメントをいただいて，論文がよりよいものになった．松田教授に感謝する．また，西山教授に本論文を作成するにあたり沢山のご指導をご鞭撻をいただいた．西山教授に感謝する．

参考文献

[1] 宮崎興二『多面体百科』第 1 版（丸善出版株式以外社，2016）

[2] 宮崎興二，細矢治夫『多角形百科』第 1 版（丸善出版株式以外社，2015）

[3] 杉浦光夫『数学基礎 2 解析入門 I』第 29 版（東京大学出版会，1980）

[4] 小島定吉『3 次元の幾何学』第 4 版（朝倉書店，2002）

[5] 小島定吉『トポロジー入門』第 1 版（朝倉書店，1998）

[6] 大田春外『楽しもう射影平面 目で見る組み合わせトポロジーと射影幾何学』第 1 版（株式会社日本評論社，2016）

[7] TROELS J0RGENSEN* and MARJATTA NAATANEN，“SURFACES OF GENUS 2 GENERIC FUNDAMENTAL POLYGONS"