

双曲平面内における 等辺等角双曲多角形の公式

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科
学籍番号:15113016 伊東 拓哉
指導教員 西山 享

2017年2月17日

概要

非ユークリッド幾何学の1つに「双曲幾何」という幾何学がある。特に、平面(曲面)上の双曲幾何を考えると「双曲平面」と呼ばれており、この論文では双曲平面を考える。双曲平面を実現するために、複素平面内の単位円板 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 上の、双曲距離を入れて双曲平面モデルを考える。このモデルを単位円板モデルと呼ぶ。 \mathbb{D} 上における双曲距離や双曲直線、角度などを定義し、双曲平面内の単位円板モデルを構築した際、単位円板モデルにおける直線(双曲直線)は、単位円に直交する円の部分弧となる。また、角度はユークリッド幾何における角度と同じになる。有限個の双曲線分に囲まれた図形のことを「双曲多角形」と呼び、本研究では特徴的な双曲多角形の公式や性質について考えた。「対辺の長さが等しい双曲4角形の性質」命題 33 や、「等辺直角 n 角形(全ての辺の長さが等しく、全ての内角が直角である n 角形)の一意性」命題 35 を示すために、ランバートの4角形(3つの内角が直角である双曲4角形)が大変役に立つことが分かった。証明は自分自身による工夫で得られたものである。次に、その一般化として、「等辺等角双曲 n 角形(全ての辺の長さ、内角が等しい双曲 n 角形)の公式」定理 38 を考えた。等辺等角双曲 n 角形の公式を証明する際、自ら考えた図形である「2直角双曲4角形(2つの内角が直角である4角形)の公式」定理 36, 定理 37 を導くことで、等辺等角双曲 n 角形の公式を証明できた。さらに、直角5角形について考え、定理 40, 定理 41 を導いた。この論文では、等辺等角双曲 n 角形の公式を求めることを最大の目的とし、公式を証明するために考えたアイデアや、その他の図形を紹介する。

目次

1	序論	3
1.1	研究の背景	3
1.2	研究の主結果	3
1.3	本論文の構成	3
2	双曲幾何	4
2.1	双曲平面上の直線	4
2.2	双曲平面上の角度	10
2.3	$PSU(1, 1)$ の正体	11
2.4	双曲平面のその他のモデル	12
3	双曲多角形	14
3.1	双曲多角形の定義	14
3.2	双曲多角形の面積	15
4	双曲3角形	15
4.1	双曲3角形の内角と面積	16
4.2	双曲3角形の正弦定理・余弦定理	18
5	ランバートの4角形と等辺直角双曲 n 角形	22
5.1	双曲4角形	22
5.2	ランバートの4角形	23
5.3	等辺直角双曲 n 角形	26
6	2直角双曲4角形と等辺等角双曲 n 角形	27
6.1	ランバートの4角形の一般化	27
6.2	等辺等角双曲 n 角形	30
7	直角双曲5角形	32
7.1	4直角双曲5角形	32
7.2	3直角双曲5角形	33

1 序論

1.1 研究の背景

私が本研究をしようと思った動機は、双曲幾何を学び、内容に興味を持ったからである。双曲幾何は、私自身がこれまで常識だと思っていたものが通用せず、0から学ぶ楽しさがあった。例えば、ユークリッド幾何学における直線は「真っ直ぐ」だが、双曲平面における直線は「円の部分弧」である。これまで常識だと思っていたユークリッド幾何学以外の世界が双曲幾何にはあり、その目新しさに興味を持った。特に、双曲平面では3角形の内角の和が180度未満であることや、全ての内角が直角である5角形が存在するなど、ユークリッド幾何学では存在しない図形を知り、その性質に強い関心を抱いた。この論文を書くにあたって、[谷口・奥村]、[深谷]は非常に役に立った。[谷口・奥村]、[深谷]の著者には大変感謝している。また、この論文の定義や定理の引用は[谷口・奥村]、[深谷]からしている。

1.2 研究の主結果

「対辺の長さが等しい双曲4角形の性質」命題33や、「等辺直角 n 角形(全ての辺の長さが等しく、全ての内角が直角である n 角形)の一意性」命題35を示すために、ランバートの4角形(3つの内角が直角である双曲4角形)が大変役に立つことが分かった。証明は自分自身による工夫で得られたものである。次に、その一般化として、「等辺等角双曲 n 角形(全ての辺の長さ、内角が等しい双曲 n 角形)の公式」定理38を考えた。等辺等角双曲 n 角形の公式を証明する際、自ら考えた図形である「2直角双曲4角形(2つの内角が直角である4角形)の公式」定理36、定理37を導くことで、等辺等角双曲 n 角形の公式を証明できた。さらに、直角5角形について考え、定理40、定理41を導いた。

1.3 本論文の構成

§2では、双曲平面を実現するために、双曲幾何における直線や角度を定義する。また、双曲平面を実現するモデルをいくつか紹介する。§3では、双曲平面における多角形の定義や合同、面積を定義する。§4では、図形の基本となる双曲3角形について考える。双曲3角形の面積や正弦定理・余弦定理の証明、ユークリッド幾何における3角形との違いについて考える。§5では、直角多角形を考える際に重要となるランバートの4角形を紹介

介し，ランバートの4角形を用いて等辺直角 n 角形の公式を導く．§6では，自ら考えた図形である2種類の2直角双曲4角形について考え，2直角双曲4角形を用いて等辺等角 n 角形の公式を導く．§7では，ランバートの4角形や2直角双曲4角形を用いて，双曲5角形について考え，4直角双曲5角形(4つの内角が直角である5角形)と，3直角双曲5角形(3つの内角が直角である5角形)の公式を紹介する．最後に，§8で，研究結果のまとめと，今後の課題について述べる．

2 双曲幾何

双曲幾何とは，ユークリッド幾何学と異なる距離をもつ幾何学の1つである．特に平面(曲面)上の幾何学を考えるとときに双曲平面と呼ぶが，この論文では以下(ほとんどの場合に)双曲平面のみを考える．まず，双曲平面における距離や直線，角度などについて述べる．

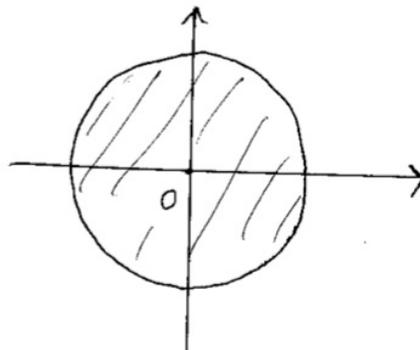
2.1 双曲平面上の直線

双曲平面を実現するには色々なモデルが考えられているが，それについては §2.4 で紹介する．この論文では複素平面内の単位円板 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 上に双曲距離を入れて双曲平面のモデルを考えるので，以下では単位円板モデルについて解説する．また，混乱を避けるために，以降では双曲平面における直線を「双曲直線」，ユークリッド幾何における直線を「ユークリッド直線」と呼ぶことにする．

定義 1 (単位円板)．単位円板 \mathbb{D} は， \mathbb{C} 上の単位円の内部であり，

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

で表される．



以降, \mathbb{D} 上における双曲距離や双曲直線, 角度などを定義し, 双曲平面内の単位円板モデルを構築する.

2.1.1 双曲距離の定義

距離を考えるためには計量が必要なので, まずは \mathbb{D} 上の線素を定義する.

定義 2 (双曲計量・線素). \mathbb{D} 上の双曲計量 (線素) $d\lambda$ を各点 $z \in \mathbb{D}$ において

$$d\lambda_z = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

により定義する.

次に線素を用いて双曲距離を次のように定義する.

定義 3 (双曲距離). \mathbb{D} 上の区分的に滑らかな曲線 C の, 双曲計量に関する長さ $L_\lambda(C)$ は, C が

$$z = z(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

とパラメータ表示されているとして

$$L_\lambda(C) = \int_0^1 d\lambda_{z(t)} = \int_0^1 \frac{2|z'(t)|dt}{1-|z(t)|^2}$$

により定義する. 次に, \mathbb{D} 上の 2 点 v, w の双曲距離 $\lambda(v, w)$ を

$$\lambda(v, w) := \inf_C L_\lambda(C)$$

により定義する. ただし, C は v, w を結ぶ区分的に滑らかな曲線全体を動く.

2.1.2 等長変換

双曲直線を考える際に, 双曲距離を保つ変換 (等長変換) が必要となるため, ここで紹介する. 単位円板上で双曲距離を保つ変換を次のように定義する.

定義 4 (等長変換). (向きを保つ) 等長変換とは, 単位円板 \mathbb{D} から自身への同相写像 F で,

$$\lambda(F(v), F(w)) = \lambda(v, w) \quad (v, w \in \mathbb{D})$$

が成り立つものを指す. また, 向きを保つ等長変換全体のなす群を $\text{Isom}^+(\mathbb{D}, \lambda)$ と表す.

[谷口・奥村] では, 向きを保つ変換を, 裏表を保つ変換と書いてある. 等長変換の例として, 写像 T を次のように定義し, 実際に双曲距離を保つ変換であるか確かめる.

定義 5. 定数 $\alpha \in \mathbb{C}$ と $\theta \in \mathbb{R}$ に対して写像 $T = T_{\theta, \alpha} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ を

$$T_{\theta, \alpha}(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad (\theta \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1)$$

とし, T 全体のなす群を

$$PSU(1, 1) = \{T_{\theta, \alpha} \mid \theta \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1\}$$

により定義する. $PSU(1, 1)$ が群になることは, [谷口・奥村, 定理 3.14] に書いてある.

次に, 1 次分数変換を次のように定義する.

定義 6. 1 次分数変換 $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定義される変換である. ただし, 上の定義において $z = -\frac{d}{c}$ のときは ∞ を導入して, リーマン球面上で考える必要があるが, ここでは深く立ち入らない. 詳しくは, [深谷, §1.1] を参照してほしい.

$PSU(1, 1)$ の元は 1 次分数変換である. $T_{\theta, \alpha}$ を単位円板上で考えるときには, ∞ を考える必要はない. また, 1 次分数変換については簡単な計算により, 次の補題が成り立つことが分かる.

補題 7. 1 次分数変換

$$\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C})$$

は, 複素微分可能であり, 導関数は

$$\Phi'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

である.

補題 7 を用いると, 次の命題を得る.

命題 8. $PSU(1, 1)$ の元 T に対し,

$$\frac{|T'(z)|}{1 - |T(z)|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

が成り立つ.

(証明). $|T'(z)|$ を計算する. 補題 7 より

$$|T'(z)| = \left| \frac{e^{i\theta}(1-|\alpha|^2)}{(1-\bar{\alpha}z)^2} \right| = \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2}$$

となる. よって,

$$1 - |T(z)|^2 = \frac{|1-\bar{\alpha}z|^2 - |z-\alpha|^2}{|1-\bar{\alpha}z|^2} = \frac{(1-|z|^2)(1-|\alpha|^2)}{|1-\bar{\alpha}z|^2} = (1-|z|^2)|T'(z)|,$$

$$\therefore \frac{|T'(z)|}{1-|T(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}.$$

が成り立つ. □

系 9. $PSU(1,1)$ の元 T に対し,

$$d\lambda_{T(z)} = \frac{2|T'(z)|}{1-|T(z)|^2} |dz| = \frac{2}{1-|z|^2} |dz| = d\lambda_z$$

が成り立つ.

系 9 より, 次の定理を得る.

定理 10. $PSU(1,1)$ の元は, \mathbb{D} からそれ自身への等長変換である. $PSU(1,1)$ の元 T に対し,

$$\lambda(T(v), T(w)) = \lambda(v, w) \quad (v, w \in \mathbb{D})$$

が成り立つ. つまり, T は, 双曲距離 $\lambda(v, w)$ を変えない.

定理 10 は, $\text{Isom}^+(\mathbb{D}, \lambda) \supseteq PSU(1,1)$ であることを示しているが, 実はその逆も成り立つ. (定理 20 参照)

2.1.3 直線の定義

ここでは, 双曲直線を考える. 長さが双曲距離と等しい曲線 (測地線) を次のように定義する.

定義 11 (測地線). \mathbb{D} 上において $l: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ を, 始点が $P = l(a)$ で, 終点が $Q = l(b)$ となるような曲線とするとき, l が測地線であるとは, l の長さが P と Q の双曲距離 $\lambda(P, Q)$ に等しいことを指す.

定理 12 (測地線の一意性). \mathbb{D} 上の 2 点 P, Q に対して, P, Q を結ぶ測地線 l がただ 1 つ存在する.

(証明). まず, $P = O$ (原点) の場合を示す.

始点が O で, 終点が $T(Q) = r_0 e^{i\theta}$ となる ユークリッド線分を $l : [0, r_0] \rightarrow \mathbb{D}$ とし, $l(t) = te^{i\theta}$ ($r_0, \theta \in \mathbb{R}$) で表すと, l の長さは

$$L_\lambda(l) = \int_0^{r_0} \frac{2|l'|dt}{1-|l(t)|^2} = \int_0^{r_0} \frac{2dt}{1-t^2} = \int_0^{r_0} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \log \frac{1+r_0}{1-r_0}$$

である.

次に, ユークリッド線分 l が求めるただ1つの測地線であることを示す. 始点が O で, 終点が $T(Q) = r_0 e^{i\theta}$ となる任意の曲線を $m : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ とし, $m(t) = R(t)e^{i\Theta(t)}$ で表すと,

$$|m'| = \left| \frac{dm}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2}$$

である. また,

$$|R'| = \left| \frac{dR}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dR}{dt} \right)^2}$$

であるから, 不等式

$$L_\lambda(m) = \int_a^b \frac{2|m'|dt}{1-R(t)^2} \geq \int_a^b \frac{2|R'|dt}{1-R(t)^2}$$

が成り立つ. $R(a) = 0, R(b) = r_0$ であった. $R(t)$ が単調増加ならば, 変数変換によって

$$\int_a^b \frac{2|R'|dt}{1-|R(t)|^2} = \int_a^b \frac{2dt}{1-t^2} = \int_0^{r_0} \frac{2dr}{1-r^2}$$

$R(t)$ が単調増加でない場合にも, 不等式は変数変換によって

$$\int_a^b \frac{2|R'|dt}{1-R(t)^2} \geq \int_0^{r_0} \frac{2dr}{1-r^2}$$

が成り立つ. よって,

$$L_\lambda(m) \geq \int_0^{r_0} \frac{2dr}{1-r^2} = L_\lambda(l)$$

上式より, ユークリッド線分 l は測地線である. 等号が成立するのは, $\frac{d\Theta}{dt} = 0$, つまり曲線 m の偏角が一定のときであるから, $m = l$ となり, 測地線は一意に定まった. また, 偏角が一定なので, 原点 O を通る測地線は, ユークリッド線分である.

一般の場合は, $PSU(1, 1)$ の元 T を $T(P) = O$ となるように選ぶと, T は等長変換なので, P と Q を結ぶ曲線 l の長さが $L_\lambda(l) = \lambda(P, Q)$ で与えられることと, $T(P) = O$ と

$T(Q)$ を結ぶ曲線 $T(I)$ の長さが $L_\lambda(T(I)) = \lambda(T(P), T(Q)) = \lambda(P, Q)$ で与えられることは同値である。つまり、 P と Q を結ぶ曲線 I が測地線であることと、 $T(P) = O$ と $T(Q)$ を結ぶ $T(I)$ が測地線であることは同値である。 \square

定理 12 の証明内で、次のことも示されたのでまとめておく。次の補題は、後で必要になる。

補題 13. 原点 O と $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ ($r > 0, \theta \in \mathbb{R}$) の間の双曲距離は

$$\lambda(0, z) = \log \frac{1+r}{1-r}$$

で与えられる。特に、原点からの双曲距離が $a(> 0)$ 、偏角が θ である点 $z \in \mathbb{D}$ は

$$z = \frac{e^a - 1}{e^a + 1} e^{i\theta} = \frac{e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}}{e^{\frac{a}{2}} + e^{-\frac{a}{2}}} e^{i\theta} = \tanh\left(\frac{a}{2}\right) e^{i\theta}$$

で与えられる。

定理 14 (双曲直線). \mathbb{D} 上の 2 点 z_1, z_2 を結ぶ測地線は、 z_1, z_2 を通り単位円に直交する円 (またはユークリッド直線) の、 z_1, z_2 を結ぶ単位円板内の部分弧である。

単位円に直交するユークリッド直線は、半径が無限である円と考える。つまり、原点を通る直線は測地線である。定理 14 を証明するために、一次分数変換の重要な性質である「円円対応」の定理を紹介する。

定理 15 (円円対応). Φ を 1 次分数変換、 S を複素平面内の円またはユークリッド直線とすると、 S の Φ による像 $\Phi(S)$ も円またはユークリッド直線である。

証明は [深谷, 定理 1.45] を参照してほしい。定理 15 を用いて、定理 14 を証明する。

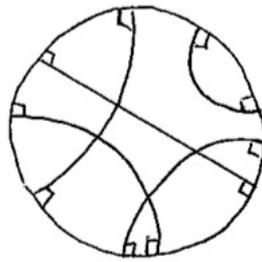
(定理 14 の証明). $PSU(1, 1)$ の元 T によって、 z_1, z_2 を $T(z_1) = O$ (原点), $T(z_2)$ に写して考える。2 点 $O, T(z_2)$ を結ぶ任意の曲線 C は、定理 12 の証明内で示したように

$$L_\lambda(C) = \int_0^1 \frac{2|z'(t)|dt}{1-z(t)^2} \geq \int_0^{|T(z_2)|} \frac{2dr}{1-r^2} = L_\lambda(I)$$

となる。ここで、 I は 2 点 $O, T(z_2)$ を結ぶユークリッド線分である。等号が成立するのは、 $z(t)$ の偏角が一定で、かつ $r(t) = |z(t)|$ が単調増加であるときであるため、 $C = I$ となる。写像 T の逆写像 T^{-1} も 1 次分数変換であるため、定理 15 より、ユークリッド線分 I は T^{-1} によって、2 点 z_1, z_2 を結ぶ円 S (の部分弧) に写される。また、 T^{-1} は、角度を保

つ写像 (詳しくは定理 18 参照) であるため, 円 S は, 単位円と直交する. よって測地線は, 2 点 z_1, z_2 を通り単位円に直交する円の, z_1, z_2 を結ぶ単位円板内の部分弧となる. \square

以下, \mathbb{D} における直線とは, 単位円に直交する円の単位円板内の部分弧, つまり測地線とする. この部分弧をユークリッド幾何の直線と区別するために, 「双曲直線」と呼ぶ. 下図のような部分弧が双曲直線である.



2.2 双曲平面上の角度

ここでは, 双曲平面における角度を定義する. 角度は, 直線の間角であり, ユークリッド幾何における角度ははっきりしているが, 双曲平面における直線は円弧であるため, 角度を正確に定義する必要がある. そこで, 双曲平面における 2 直線の間角は, その接線を用いて考えることにする. その場合, 双曲計量を用いた双曲平面における角度と, ユークリッド幾何における角度は, 同じになることが知られている. ([深谷, 注意 2.57])

定義 16. \mathbb{D} 上の点 P および, P からの連続な 2 曲線 C_1, C_2 が, それぞれ複素数 z_0 および, パラメータ表示 $z_1(t), z_2(t) (0 \leq t \leq 1)$ で表され, $z_1(0) = z_2(0) = z_0$ とする. このとき, $\lim_{t \rightarrow 0} \arg(z_j(t) - z_0) \quad (j = 1, 2)$ が存在すれば,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \arg \left(\frac{z_2(t) - z_0}{z_1(t) - z_0} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \arg \left(\frac{z_2(t) - z_0}{t - 0} \frac{t - 0}{z_1(t) - z_0} \right) \\ &= \arg \left(\frac{z_2'(t)}{z_1'(t)} \right) \end{aligned}$$

により P での C_1, C_2 のなす角を定義する. これは, P における 2 本の接線のなす角である.

2.2.1 等角写像

次に、角度を保つ変換 (等角写像) について考える. 単位円板上で角度を保つ変換を次のように定義する.

定義 17 (等角写像). 写像 $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が等角写像であるとは, 1 点 P で交わる連続な 2 曲線 C_1, C_2 に対して, P での C_1, C_2 のなす角が, $F(P)$ での $F(C_1), F(C_2)$ のなす角に等しいことを指す.

定理 18 ([谷口・奥村, 定理 3.4]). 1 点 z_0 で複素微分可能な関数 (正則関数) $f(z)$ は, $f'(z_0) \neq 0$ ならば, z_0 で角度を保つ.

(証明). 2 曲線 C_1, C_2 が P でなす角を θ とする. このとき複素微分可能であるから, $f'(z_0) \neq 0$ ならば, 各 $j (= 1, 2)$ に対し

$$\lim_{t \rightarrow 0} \arg \left(\frac{f(z_j(t)) - f(z_0)}{z_j(t) - z_0} \right) = \arg f'(z_0)$$

これを整理して

$$\lim_{t \rightarrow 0} \arg(f(z_j(t)) - f(z_0)) = \lim_{t \rightarrow 0} \arg(z_j(t) - z_0) + \arg f'(z_0)$$

が成り立つ. よって,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \arg \left(\frac{f(z_2(t)) - f(z_0)}{f(z_1(t)) - f(z_0)} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \arg \left(\frac{z_2(t) - z_0}{z_1(t) - z_0} \right)$$

が成り立つ. □

2.3 $PSU(1, 1)$ の正体

これまで直線や角度の定義とともに, $PSU(1, 1)$ についても考えてきた. 命題 10 と定理 7 をまとめると, 次の系が示される.

系 19 ([谷口・奥村, 系 2]). $PSU(1, 1)$ の元は, 合同変換 (双曲距離と角度を保つ変換) である.

また, 命題 10 より $\text{Isom}^+(\mathbb{D}, \lambda) \supseteq PSU(1, 1)$ であったが, そこで逆も成り立つことに注意が必要である. 証明は [谷口・奥村, 定理 5.5] を参照してほしい.

定理 20. $\text{Isom}^+(\mathbb{D}, \lambda)$ は $PSU(1, 1)$ と一致する. すなわち,

$$\text{Isom}^+(\mathbb{D}, \lambda) = PSU(1, 1)$$

が成り立つ.

合同変換は, 後に出てくる双曲多角形の合同 (定義 23) で用いる.

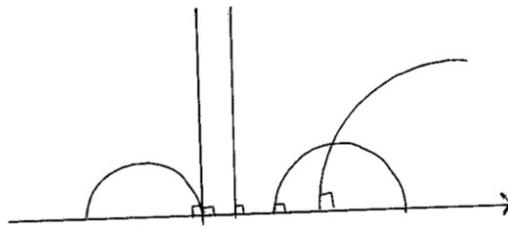
2.4 双曲平面のその他のモデル

双曲平面のモデルは, 単位円板モデル以外にもいくつかある. 特に, 単位円板モデルと上半平面モデルは互いに等長的, 等角的であることなどが知られており, これまで単位円板モデルで導いた定理は, 他のモデルでも同様に導くことができる. また, ここで紹介するモデルは, [谷口・奥村, §5.4] を参考にした.

2.4.1 上半平面モデル

上半平面 \mathbb{H} は, 次のように定義される.

定義 21 (上半平面モデル). $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$



\mathbb{H} 上の 2 点 $i, iy (y > 1)$ の双曲距離は

$$\lambda(i, iy) = \int_1^y \frac{dt}{t} = \log y$$

で与えられる.

上半平面モデルを単位円板モデルにする変換 $S: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ は,

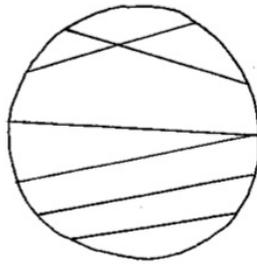
$$S(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

で表され, S は双曲距離を保つ変換である. 詳しくは, [谷口・奥村, §5.4.1] を参照してほしい. 上半平面モデルにおける直線は, 実軸に直交した円の部分弧, または虚軸に平行なユークリッド直線である. 上半平面モデルにおける角度は, ユークリッド幾何の角度と同

じである。 §3 以降では、単位円板モデル以外に、上半平面モデルにおける定義や定理をいくつか用いる。

2.4.2 クライン (射影) モデル

クライン (射影) モデルは、単位円板モデル、上半平面モデルとは異なり、「直線」はユークリッド直線のように見え、「角度」はユークリッド幾何学と異なるように見えるモデルである。



単位円板モデルをクラインモデルへ写る変換を $p(z) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ と書くと

$$p(z) = \frac{2z}{1 + |z|^2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

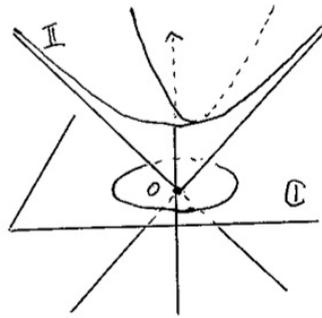
で与えられる。クラインモデルは、この論文では使用しないが、双曲距離は、 $p(z)$ が等長変換になるように入れる。

2.4.3 双曲面モデル

3次元空間 (x, y, t) 内で単位円板を $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とみなすとき

$$P_{-1} : (x, y) \mapsto \left(\frac{2x}{1 - x^2 - y^2}, \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}, \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2} \right)$$

のような写像を考える。ここで、 t 成分は、無限に開いた曲面である回転双曲面の上半分 $\mathbb{I} = \{(x, y, t) \mid x^2 + y^2 - t^2 = -1, t > 0\}$ を考えた。単位円板を今まで通り $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とみなす。



このとき，単位円板モデルでの双曲直線が，回転双曲面 (の上半分) 上では，原点を通る平面での切り口になっている．このようなモデルを双曲面モデルと呼ぶ．双曲面モデルも，この論文では使用しない．計量は，ローレンツ計量を用いて考える．([谷口・奥村, §5.4.3])

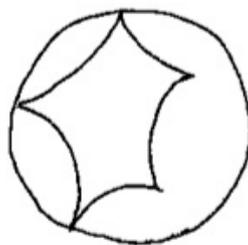
3 双曲多角形

この章では，双曲平面における多角形を定義する．上半平面モデルで考えている定義や定理がこれ以降出てくるが，2.4 で述べた通り，上半平面モデルで導かれる定理は，他の双曲平面モデルにも使えるので全く問題ない．

3.1 双曲多角形の定義

ここでは，双曲平面における多角形と，多角形の合同について定義する．

定義 22. 有限個の双曲線分に囲まれた図形のことを「双曲多角形」，下図のように無限遠 (双曲平面の境界，つまり単位円周) に頂点をもつ双曲多角形のことを「無限多角形」と呼ぶ．また，双曲線分の各交点のなす角を双曲多角形の「内角」と呼ぶ．



無限多角形は頂点が双曲平面の境界上にあり，辺の長さが ∞ になるので，本来の意味での多角形とは言えないが，双曲平面上では有限の面積をもち，定理 26 で双曲 3 角形の

面積を証明する際に用いる。双曲平面の境界と双曲直線は直交するため、境界上にある頂点の内角は0と考えるのが自然である。

定義 23. 2つの双曲多角形 P_1, P_2 が「合同」であるとは、等長変換 T が存在し、 $T(P_1) = P_2$ となることである。

定理 19 より、 $PSU(1, 1)$ の元は合同変換 (双曲距離と角度を保つ変換) である。合同変換によって写された図形は位置が変わるだけで、対応する辺の長さや内角は変わらないため、写された図形は元の図形と合同である。つまり、2つの双曲多角形 P_1, P_2 の対応する辺の長さ、内角がそれぞれ等しいならば、 P_1, P_2 は合同である。

3.2 双曲多角形的面積

ここでは、双曲多角形的面積を定義する。

定義 24. 双曲多角形 P の面積 $\text{Area}(P)$ は、次の条件を全て満たすものとする。

1. $\text{Area}(P)$ は正の実数である。
2. 2つの双曲多角形 P_1 と P_2 が一辺のみを共有するとする。このとき、和集合 $P_1 \cup P_2$ は双曲多角形となり、その面積は $\text{Area}(P_1 \cup P_2) = \text{Area}(P_1) + \text{Area}(P_2)$ となる。
3. 2つの双曲多角形 P_1 と P_2 が合同であれば、 $\text{Area}(P_1) = \text{Area}(P_2)$ となる。

これらの条件を満たす面積 $\text{Area}(P)$ は、全体を定数倍することを除き、ただ1通りしかないことが知られている。面積の計算は、 \mathbb{D} ではなく、 \mathbb{H} で行ったほうが便利なので、上半平面 \mathbb{H} における面積の積分表示を与えておく。詳しくは [深谷, 補題 4.4] を参照してほしい。

定理 25. \mathbb{H} 上の双曲多角形 P の面積 $\text{Area}(P)$ は

$$\text{Area}(P) = \int_P \frac{dx dy}{y^2}$$

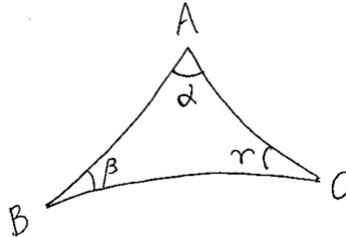
で与えられる。

4 双曲3角形

ここでは、全ての図形、特に双曲多角形の基本となる双曲3角形の辺の長さや内角、面積の公式などを紹介する。

4.1 双曲3角形の内角と面積

定理 26 ([深谷, 定理 4.5]). 双曲3角形 $\triangle ABC$ の内角を, それぞれの角に対応させた α, β, γ とする.

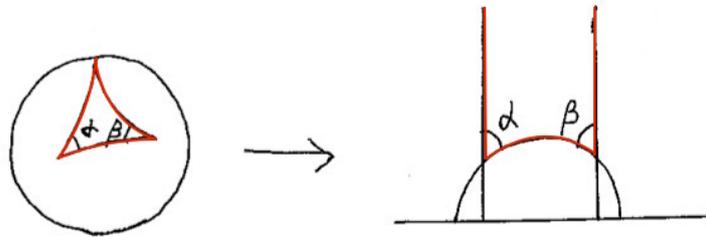


そのとき, 面積は

$$\text{Area}(\triangle ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

で与えられる.

(証明). 初めに, 無限3角形の面積を求める. 単位円板 \mathbb{D} の無限3角形を上半平面 \mathbb{H} に写すと, 下図のようになる.



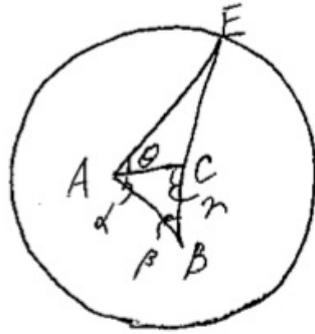
求める面積は, 定理 25 より

$$\begin{aligned} \int_{-\cos \alpha}^{\cos \beta} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy &= \int_{-\cos \alpha}^{\cos \beta} \left(\left[-\frac{1}{y} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \right) dx \\ &= \int_{-\cos \alpha}^{\cos \beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned} \quad (1)$$

である. ここで, $\cos t = x$ とおくと, (1) 式は

$$\begin{aligned} \int_{-\cos \alpha}^{\cos \beta} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy &= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin t}{\sin t} dt \\ &= [-t]_{\pi-\alpha}^{\beta} \\ &= \pi - (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

となる. $\triangle ABC$ の面積を計算するには, 辺 BC を一方に無限遠上の点 E までのぼし, 点 A と点 E を通る双曲直線を引く.



すると, $\triangle ABC$ は2つの無限3角形 $\triangle ABE$ と $\triangle ACE$ の差である. よって,

$$\begin{aligned} \text{Area}(\triangle ABC) &= \text{Area}(\triangle ABE) - \text{Area}(\triangle ACE) \\ &= (\pi - \beta - (\alpha + \theta)) - (\pi - \theta - (\pi - \gamma)) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

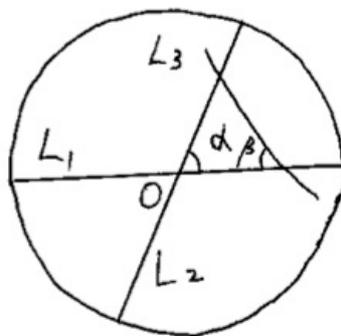
が成り立つ. □

定理 27 ([谷口・奥村, 定理 6.3]). 双曲3角形の内角の和は, つねに π より小さい. さらに, 3つの角 α, β, γ を

$$0 < \alpha + \beta + \gamma < \pi$$

を満たすように任意に与えるとき, これらを3内角にもつ双曲3角形が合同を除いて唯一つ存在する.

(証明). 前半は, 面積が正の実数であることを考えれば明らかである. 後半は単位円板 \mathbb{D} で考える.



原点 O で角度 α で交わる 2 本の双曲直線 L_1, L_2 を固定する. このとき, L_1 は実軸としてよい. 2 本の双曲直線 L_1, L_2 と交わり, L_1 とのなす角が β に保つ双曲直線を L_3 とする. 双曲直線 L_3 を原点 O から単位円まで動かすことを考えると, 原点 O 付近ではほとんどユークリッドの 3 角形となり, もう 1 つの内角はほぼ $\pi - \alpha - \beta$ となる. 単位円付近では, もう 1 つの内角はほぼ 0 となる. その間ではもう 1 つの内角は連続に変化するから, 中間値の定理より, もう 1 つの内角が γ となる双曲直線 L_3 が存在する. \square

定理 27 を用いると, 双曲 n 角形の内角の和は次のように示される. また, この命題の証明は, [谷口・奥村, 演習問題 6] を, 自分自身による工夫で得られたものである. (これ以降の [谷口・奥村, 演習問題 6] などと書かれた命題の証明は全て自分自身による工夫で得られたものである.)

命題 28 ([谷口・奥村, 演習問題 6]). 双曲 n 角形の内角を $\theta_1, \dots, \theta_n$ とするとき

$$\theta_1 + \dots + \theta_n < (n-2)\pi$$

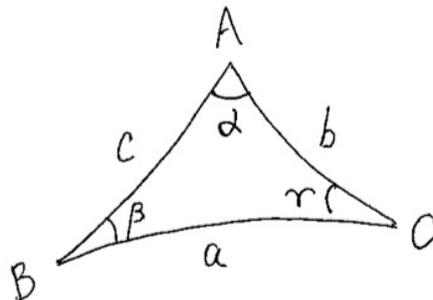
を満たす.

(証明). 双曲 n 角形を $(n-2)$ 個の双曲 3 角形に分けると, それぞれの双曲 3 角形の内角の和が π 未満なので, 双曲 n 角形の内角の和は $(n-2)\pi$ 未満となる. \square

4.2 双曲 3 角形の正弦定理・余弦定理

双曲 3 角形にも, ユークリッド幾何学の 3 角形における正弦定理・余弦定理に対応する定理が存在する.

定理 29 ([谷口・奥村, 定理 6.4, 6.6]). 双曲 3 角形 $\triangle ABC$ の 3 辺の長さを a, b, c , 頂点 A, B, C の内角をそれぞれ α, β, γ とするとき, 次の公式が成り立つ.



1. 正弦定理

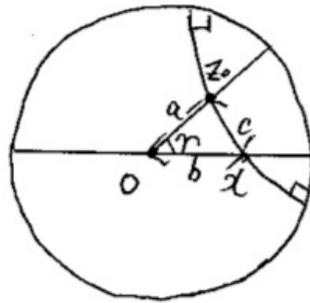
$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma} \quad (2)$$

2. 余弦定理

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma \quad (3)$$

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \quad (4)$$

(証明). まず, 余弦定理 (3) から示す. 2 頂点を実軸上にとり, γ, α に対応する頂点が表す複素数をそれぞれ $0, x (> 0)$ とする. また, β に対応する頂点が表す複素数を z_0 とおく.



原点から x, z_0 までの双曲距離はそれぞれ b, a なので, 補題 13 より,

$$x = \tanh\left(\frac{b}{2}\right) \quad (5)$$

$$z_0 = \tanh\left(\frac{a}{2}\right) e^{i\gamma} \quad (6)$$

である. また, $PSU(1,1)$ の元 T を

$$T(z) = \frac{z - x}{1 - \bar{x}z} = \frac{z - x}{1 - xz}$$

で定める. すると, $T(x) = 0$ であるから,

$$c = \lambda(x, z_0) = \lambda(T(x), T(z_0)) = \lambda(0, T(z_0)) \quad (7)$$

が成り立つ. したがって, 補題 13 より

$$T(z_0) = \tanh\left(\frac{c}{2}\right) e^{i\theta} \quad (8)$$

と書ける．また，双曲線関数の公式より

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{c}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) &= 1 \\ \frac{1}{\tanh^2\left(\frac{c}{2}\right)} - 1 &= \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{c}{2}\right)} \\ \sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) &= \frac{\tanh^2\left(\frac{c}{2}\right)}{1 - \tanh^2\left(\frac{c}{2}\right)} \end{aligned} \quad (9)$$

が成り立つ．2倍角の公式と(9)を用いて

$$\cosh c = 2 \sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) + 1 = \frac{2 \tanh^2\left(\frac{c}{2}\right)}{1 - \tanh^2\left(\frac{c}{2}\right)} + 1$$

また，(8)を用いると上式は

$$\cosh c = \frac{2|T(z_0)|^2}{1 - |T(z_0)|^2} + 1 \quad (10)$$

さらに，

$$\frac{|T(z_0)|^2}{1 - |T(z_0)|^2} = \frac{|T(z_0) - 0|^2}{(1 - |T(z_0)|^2)(1 - 0^2)} = \frac{|z_0 - x|^2}{(1 - |z_0|^2)(1 - |x|^2)}$$

と計算できるため，(10)は

$$\begin{aligned} \cosh c &= \frac{2|z_0 - x|^2}{(1 - |z_0|^2)(1 - |x|^2)} + 1 \\ &= \frac{(1 + |z_0|^2)(1 + |x|^2) - 4\operatorname{Re}(xz_0)}{(1 - |z_0|^2)(1 - |x|^2)} \end{aligned} \quad (11)$$

である．(11)の右辺の分母と分子に $\cosh^2\left(\frac{b}{2}\right)\cosh^2\left(\frac{a}{2}\right)$ をかけ，(5), (6)を代入して計算すると

$$\begin{aligned} \cosh c &= \left(\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{a}{2}\right)\right) \left(\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right) + \cosh^2\left(\frac{b}{2}\right)\right) \\ &\quad - 4 \sinh\left(\frac{a}{2}\right) \sinh\left(\frac{b}{2}\right) \cosh\left(\frac{a}{2}\right) \cosh\left(\frac{b}{2}\right) \cos \gamma \\ &= \frac{1}{4}(\cosh a - 1 + \cosh a + 1)(\cosh b - 1 + \cosh b + 1) \\ &\quad - \sqrt{(\cosh a - 1)(\cosh b - 1)(\cosh a + 1)(\cosh b + 1)} \cos \gamma \\ &= \cosh a \cosh b - \sqrt{\sinh^2 a \sinh^2 b} \cos \gamma \\ &= \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma \end{aligned}$$

であるから，余弦定理 (3) が成り立つ．

次に，正弦定理 (2) を示す．式 (3) より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sinh c}{\sin \gamma}\right)^2 &= \frac{\sinh^2 c}{1 - \left(\frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b}\right)^2} \\ &= \frac{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}{1 - (\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c) + 2 \cosh a \cosh b \cosh c} \end{aligned} \quad (12)$$

であり，(12) の右辺は a, b, c に関して対称であるため， $\left(\frac{\sinh a}{\sin \alpha}\right)^2, \left(\frac{\sinh b}{\sin \beta}\right)^2$ でも全く同じ式が成り立つ．よって，正弦定理 (2) が成り立つ．

最後に，余弦定理 (4) は，(12) を用いて

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 - (\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c) + 2 \cosh a \cosh b \cosh c}}{\sinh b \sinh c} \quad (13)$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{1 - (\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c) + 2 \cosh a \cosh b \cosh c}}{\sinh a \sinh c} \quad (14)$$

また，余弦定理 (3) は

$$\cos \alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c} \quad (15)$$

$$\cos \beta = \frac{\cosh c \cosh a - \cosh b}{\sinh c \sinh a} \quad (16)$$

$$\cos \gamma = \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b} \quad (17)$$

の形に書ける．(13), (14), (15), (16), (17) を余弦定理 (4) の右辺に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} &= \frac{(\cosh b \cosh c - \cosh a)(\cosh c \cosh a - \cosh b)}{1 - (\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c) + 2 \cosh a \cosh b \cosh c} \\ &\quad + \frac{(\cosh^2 c - 1)(\cosh a \cosh b - \cosh c)}{1 - (\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c) + 2 \cosh a \cosh b \cosh c} \\ &= \cosh c \end{aligned}$$

となり，余弦定理 (4) が得られる． \square

余弦定理 (4) より，双曲 3 角形では，3 つの内角が決まると 3 辺の長さが決まることが分かる．これはユークリッド幾何学の 3 角形では見られない顕著な性質である．

最後に，双曲 3 角形の合同条件を考える．定義 23 と定理 29 より，以下の 4 つが合同条件として挙げられる．

系 30 ([谷口・奥村, 系.1]). 双曲 3 角形の合同条件には, 次のものがある.

1. 3 辺相等
2. 2 辺挟角相等
3. 2 角挟角相等
4. 3 角相等

ユークリッド幾何学の 3 角形とは異なり, 双曲 3 角形は, 3 つの内角から 3 辺の長さが決まるため, 3 角相等の場合でも合同となる.

5 ランバートの 4 角形と等辺直角双曲 n 角形

この章では直角双曲多角形を考える上で重要な道具となるランバートの 4 角形と, それに関する公式を紹介し, 等辺直角双曲 n 角形の一意性を示す.

5.1 双曲 4 角形

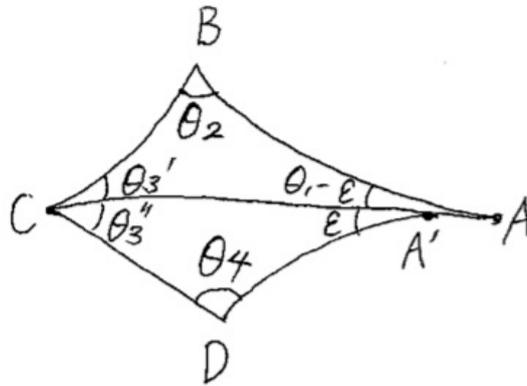
まず初めに, 一般的な双曲 4 角形を考える.

命題 31 ([谷口・奥村, 演習問題 6]). $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 < 2\pi$ を満たす任意の 4 つの角に対し, これらを内角にもつ双曲 4 角形が存在する.

(証明). 任意の 4 つの角のうち, 2 つの内角の和が π 未満となる 2 つの内角を θ_1, θ_2 とおき, 残った 2 つの内角を θ_3, θ_4 とおく. θ_3 をうまく $\theta'_3 + \theta''_3$ と分割し

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta'_3 < \pi, \quad \theta''_3 + \theta_4 < \pi$$

となるようにする. また, $\varepsilon \geq 0$ を (十分小さく) とり, 下図のように, $\theta_1 - \varepsilon, \theta_2, \theta'_3$ と $\theta''_3, \theta_4, \varepsilon$ を 3 つの内角にもつ双曲 3 角形の対を考える.



双曲三角形 $\triangle ABC$ の内角を $\theta_1 - \varepsilon, \theta_2, \theta_3'$ とし, $\triangle A'CD$ の内角を $\varepsilon, \theta_3'', \theta_4$ とする, 辺 AC, AC' の長さをそれぞれ AC, AC' とすると, 定理 29 より

$$\cosh AC = \frac{\cos(\theta_1 - \varepsilon) \cos \theta_3' + \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 - \varepsilon) \sin \theta_3'}$$

$$\cosh AC' = \frac{\cos \varepsilon \cos \theta_3'' + \cos \theta_4}{\sin \varepsilon \sin \theta_3''}$$

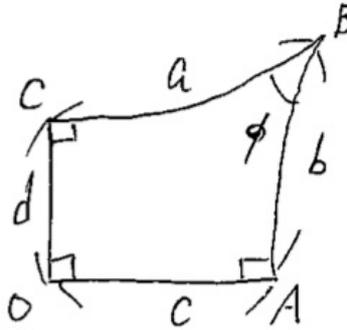
が成り立つ. また, ε の値を 0 から θ_1 に動かすと, $AC = AC'$ となる ε の値が存在する. このとき, $\triangle ABC$ と $\triangle A'CD$ を辺 AC, AC' で貼り合わせた, 内角が $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ の双曲 4 角形 $ABCD$ ができる. □

5.2 ランバートの 4 角形

次に, ランバート*¹の 4 角形について考える. 3 つの内角が直角である双曲 4 角形をランバートの 4 角形と呼ぶ. ランバートの 4 角形は, 直角双曲多角形を考える際に, 重要な図形となる.

定理 32 (ランバートの 4 角形). 下図のように, 4 辺の長さが a, b, c, d で, 頂点 B の内角を $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ とするランバートの 4 角形において, 次の公式が成り立つ.

*¹ Lambert (1728~1777) :ドイツの数学者



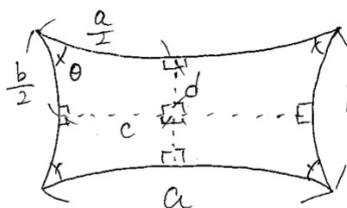
$$\begin{aligned} \cos \phi &= \sinh c \sinh d \\ \cosh c &= \cosh a \sin \phi \\ \cosh d &= \cosh b \sin \phi \end{aligned}$$

証明は, [谷口・奥村, 定理 6.8] を参照してほしい.

また, ランバートの 4 角形を用いると, 次のような等角双曲 4 角形の性質を導ける.

命題 33 ([谷口・奥村, 演習問題 6]). 対辺の長さが等しく, 全ての内角が等しい「等角双曲 4 角形」は, 隣り合う 2 辺の長さにより決定される. 特に, 全ての辺の長さ, 内角が等しい「等辺等角双曲 4 角形」は, 内角の大きさに一意に定まる.

(証明). 双曲 4 角形の隣り合う 2 辺の長さを a, b , 内角を θ とおく. また, 下図のように, 双曲 4 角形を辺の長さが $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, c, d$ である合同な 4 つのランバートの 4 角形に分ける.



定理 32 より

$$\cos \theta = \sinh c \sinh d \tag{18}$$

$$\cosh c = \cosh \frac{a}{2} \sin \theta \tag{19}$$

$$\cosh d = \cosh \frac{b}{2} \sin \theta \tag{20}$$

の形に書ける。(20)より

$$\sin \theta = \frac{\cosh d}{\cosh \frac{b}{2}} \quad (21)$$

である。(18)を2乗し、双曲線関数の公式と(21)を用いて

$$\sinh^2 c \sinh^2 d = \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{\cosh^2 d}{\cosh^2 \frac{b}{2}}.$$

この式より、双曲線関数の公式を用いて

$$\begin{aligned} \sinh^2 c &= \frac{1}{\sinh^2 d} - \frac{1}{\cosh^2 \frac{b}{2} \tanh^2 d} \\ 1 + \sinh^2 c &= 1 + \frac{1}{\sinh^2 d} - \frac{1}{\cosh^2 \frac{b}{2} \tanh^2 d} \\ \cosh^2 c &= 1 + \frac{1}{\sinh^2 d} - \frac{1}{\cosh^2 \frac{b}{2} \tanh^2 d} \end{aligned}$$

と計算できる。よって

$$\cosh^2 c = \frac{1}{\tanh^2 d} - \frac{1}{\cosh^2 \frac{b}{2} \tanh^2 d} = \frac{1}{\tanh^2 d} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 \frac{b}{2}} \right) = \frac{\tanh^2 \frac{b}{2}}{\tanh^2 d} \quad (22)$$

である。また、(19), (20)より

$$\cosh \frac{a}{2} \cosh d = \cosh \frac{b}{2} \cosh c \quad (23)$$

である。(23)の両辺を2乗し、(22)に代入して計算すると

$$\begin{aligned} \cosh^2 \frac{a}{2} \cosh^2 d &= \cosh^2 \frac{b}{2} \left(\frac{\tanh^2 \frac{b}{2}}{\tanh^2 d} \right) = \frac{\sinh^2 \frac{b}{2}}{\tanh^2 d}, \\ \therefore \sinh \frac{b}{2} &= \cosh \frac{a}{2} \sinh d. \end{aligned} \quad (24)$$

また、同様にして

$$\sinh \frac{a}{2} = \cosh \frac{b}{2} \sinh c \quad (25)$$

となることが分かる。(24), (26)より、隣り合う2辺の長さ a, b を定めると c, d が決まり、(20)より、 θ も決まる。よって、等角双曲4角形は、隣り合う2辺の長さ a, b により決定された。等辺等角双曲4角形については、後に説明する命題 38 より、内角の大きさだけで一意に定まることが分かる。□

命題 33 の証明内で、次のことも示された、

系 34. 4 辺の長さが a, b, c, d で、頂点 B の内角を $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ とするランバートの 4 角形において、次の公式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\sinh a &= \cosh b \sinh c \\ \sinh b &= \cosh a \sinh d\end{aligned}$$

定理 32 と系 34 より、辺の長さ a, b, c, d と内角 ϕ の変数うち、2 つを定めれば残りの変数を計算できる。

5.3 等辺直角双曲 n 角形

最後に、等辺直角双曲 n 角形について考える。ランバートの 4 角形を用いると、次のような等辺直角双曲 n 角形の性質を導ける。

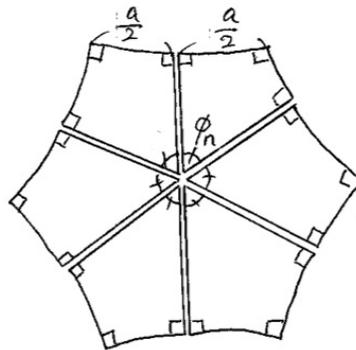
命題 35 ([谷口・奥村, 演習問題 6]). $n \geq 5$ ならば、全ての辺の長さが等しく、全ての内角が $\frac{\pi}{2}$ である等辺直角双曲 n 角形は、合同を除いて唯一つ存在する。このとき、 $\phi_n = \frac{2\pi}{n} \neq \frac{\pi}{2}$ とおくと、一辺の長さは

$$a = \log \left(2 \cos \phi_n + 2 \cos \frac{\phi_n}{2} \sqrt{2 \cos \phi_n + 1} \right)$$

で与えられる。

内角の和を考えると、 $n = 3, 4$ の等辺直角双曲 n 角形は存在しないことが分かる。

(証明). 下図のように、内角 $\phi_n = \frac{2\pi}{n} \neq \frac{\pi}{2}$ である合同なランバートの 4 角形を n 個用意し、貼り合わせる。そのときできる等辺直角双曲 n 角形の一辺の長さを a とおく。



定理 32 より，双曲線関数の公式を用いて

$$\cos \phi_n = \sinh^2 \frac{a}{2} = \frac{\cosh a - 1}{2} \quad (26)$$

と計算できる．(26) を $\cosh a$ について解くと

$$\cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2} = 2 \cos \phi_n + 1 \quad (27)$$

となる．(27) を e^a で整理すると

$$(e^a)^2 - 2(2 \cos \phi_n + 1)e^a + 1 = 0 \quad (28)$$

となり，(28) を解くと

$$\begin{aligned} e^a &= 2 \cos \phi_n + 2\sqrt{\cos^2 \phi_n + \cos \phi_n + 1} \\ a &= \log \left(2 \cos \phi_n + 2 \cos \frac{\phi_n}{2} \sqrt{2 \cos \phi_n + 1} \right) \end{aligned}$$

と計算でき，等辺直角双曲 n 角形の一辺の長さが定まったので，等辺直角双曲 n 角形は合同を除いて唯一つ存在する。□

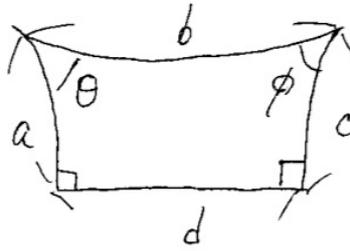
6 2 直角双曲 4 角形と等辺等角双曲 n 角形

この章では，ランバートの 4 角形を一般化した図形である 2 直角双曲 4 角形を考える．等角双曲多角形を考える上で重要な道具となる 2 直角双曲 4 角形と，それに関する公式を紹介し，等辺等角双曲 n 角形の一意性を示す．

6.1 ランバートの 4 角形の一般化

初めに，ランバートの 4 角形の一般化を考える．2 つの内角が直角である双曲 4 角形を「2 直角双曲 4 角形」と呼ぶ．2 直角双曲 4 角形は，等角双曲多角形を考える際に，重要な図形となる．2 直角双曲 4 角形は下図のように，二種類の図形が書けるため，それぞれを「隣接 2 直角双曲 4 角形」，「ねじれ 2 直角双曲 4 角形」と呼ぶ．

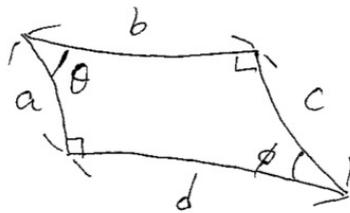
定理 36 (隣接 2 直角双曲 4 角形)．下図のように 4 辺の長さが a, b, c, d で，隣り合う 2 つの内角を $\theta, \phi < \frac{\pi}{2}$ とする隣接 2 直角双曲 4 角形において，次の公式が成り立つ．



$$\cos \theta = \sinh c \sinh d \sin \phi - \cosh d \cos \phi \quad (29)$$

$$\cosh a \sin \theta = \cosh c \sin \phi \quad (30)$$

定理 37 (ねじれ 2 直角双曲 4 角形). 下図のように 4 辺の長さが a, b, c, d で, 向かい合う 2 つの内角を $\theta, \phi < \frac{\pi}{2}$ とするねじれ 2 直角双曲 4 角形において, 次の公式が成り立つ.

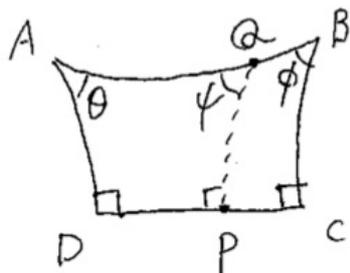


$$\cos \theta = \sinh c \sinh d - \cosh c \cosh d \cos \phi \quad (31)$$

$$\cosh a \sin \theta = \cosh c \sin \phi \quad (32)$$

定理 36, 定理 37 の証明は全く同じ方法を用いるため, ここでは定理 36 のみ証明する.

(証明). 下図のような, 隣接 2 直角双曲 4 角形の対辺に共通垂線を引くことを考える. 辺 DC 上に点 P をとる. P から DC に垂直な双曲直線を引くと, 双曲直線は必ず AB と交わる. 例えば, 垂直な双曲直線が BC と交わる点を R とする. このとき, $\triangle RBC$ の内角の和は, π を超えるので, 不適である. 同様にして考えると, 双曲直線は必ず AB と交わることが分かる. 垂直な双曲直線が AB と交わる点を Q とし, Q でのなす角を ψ とする.



命題 28 より，双曲 4 角形の内角の和は 2π 未満であるため，

$$\psi + (\pi - \psi) < \pi \quad (33)$$

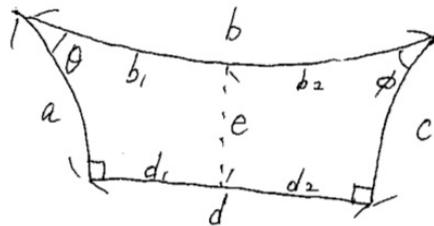
$$\theta + \psi < \pi \quad (34)$$

である．(33),(34) を変形して，不等式

$$\phi < \psi < \pi - \theta$$

を得る．点 P が点 A 付近では $\psi \cong \phi < \frac{\pi}{2}$ ，点 P が点 B 付近では $\psi \cong \pi - \theta > \frac{\pi}{2}$ となるが， ψ の値は辺 AB の間で連続に変化するため，中間値の定理より， $\psi = \frac{\pi}{2}$ となる点 Q が辺 AB 上に存在する．

次に，隣接 2 直角双曲 4 角形の対辺に共通接線を引き，2 つのランバートの 4 角形に分ける．



まず，(29) から示す．定理 32 を用いて

$$\cos \theta = \sinh e \sinh d_1 \quad (35)$$

$$\cos \phi = \sinh e \sinh d_2 \quad (36)$$

$$\cosh e = \cosh a \sin \theta \quad (37)$$

$$\cosh e = \cosh c \sin \phi \quad (38)$$

の形に書ける．(35) より，双曲線関数の加法定理を用いて

$$\cos \theta = \sinh c \sinh(d - d_2) = \sinh e (\sinh d \cosh d_2 - \cosh d \sinh d_2) \quad (39)$$

である．また，(36) を用いて

$$\sinh d_2 = \frac{\cos \phi}{\sinh e} \quad (40)$$

$$\cosh d_2 = \frac{\sqrt{\cos^2 \phi + \sinh^2 e}}{\sinh e} \quad (41)$$

の形に書ける. (39) に (40),(41) を代入すると

$$\cos \theta = \sinh d \sqrt{\cos^2 \phi + \sinh^2 e} - \cosh d \cos \phi \quad (42)$$

と計算できる. また, (38) を用いて

$$\sinh^2 e = \cosh^2 c \sin^2 \phi - 1 \quad (43)$$

の形に書ける. (42) に (43) を代入すると

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sinh d \sqrt{\cos^2 \phi + (\cosh^2 c \sin^2 \phi - 1)} - \cosh d \cos \phi \\ &= \sinh d \sqrt{\sin^2 \phi + \cosh^2 c \sin^2 \phi} - \cosh d \cos \phi \\ &= \sinh d \sin \phi \sqrt{1 + \cosh^2 c} - \cosh d \cos \phi \\ &= \sinh c \sinh d \sin \phi - \cosh d \cos \phi \end{aligned}$$

であるから, (29) が成り立つ.

最後に, (30) は, (37), (38) を用いると

$$\cosh a \sin \theta = \cosh c \sin \phi$$

であるから, (30) が成り立つ. □

2 直角双曲 4 角形の内角 θ は, 隣りあわない二辺の長さ, もう一つの内角 ϕ で計算できる. また, $\theta = \phi$ のとき, 2 直角双曲 4 角形は「サツケリ^{*2}の 4 角形」と呼ばれており, よく知られている.

6.2 等辺等角双曲 n 角形

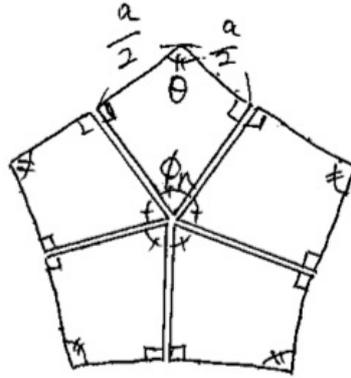
最後に, 等辺等角双曲 n 角形について考える. 命題 35 では, 等辺直角双曲 n 角形の一意性を, ランバートの 4 角形の貼り合わせを用いて証明した. ねじれ 2 直角双曲 4 角形を用いると, 等辺等角双曲 n 角形でも同様の定理を導ける.

定理 38. $n \geq 3$ ならば, 全ての辺の長さが等しく, 全ての内角が $\theta < \frac{\pi}{2}$ である等辺等角双曲 n 角形は, 合同を除いて唯一つ存在する. このとき, $\phi_n = \frac{2\pi}{n} \neq \frac{\pi}{2}$ とおくと, 一辺の長さ a と θ の間には, 次の関係式が成り立つ.

$$a = \log \left(k + \sqrt{k^2 - 1} \right) \quad \left(k = \frac{2 \cos \phi_n + \cos \theta + 1}{1 - \cos \theta} \right)$$

^{*2} Saccheri (1667~1733): イタリアの数学者

(証明). 下図のように, 向かい合う2つの内角が $\theta, \phi_n = \frac{2\pi}{n}$ である合同なねじれ2直角双曲4角形を n 個用意し, 貼り合わせる. そのときできる等辺等角双曲 n 角形の一辺の長さを a とおく.



定理 37 より, 双曲線関数の公式を用いて

$$\begin{aligned} \cos \phi_n &= \sinh^2 \frac{a}{2} - \cosh^2 \frac{a}{2} \cos \theta \\ &= (\cosh^2 \frac{a}{2} - 1) - \cosh^2 \frac{a}{2} \cos \theta \\ &= \cosh^2 \frac{a}{2} (1 - \cos \theta) - 1 \end{aligned} \quad (44)$$

と計算できる. 式 (44) より,

$$\frac{\cos \phi_n + 1}{1 - \cos \theta} = \cosh^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cosh a}{2}$$

を得る. これを, $\cosh a$ について解くと

$$\begin{aligned} \cosh a &= \frac{2(\cos \phi_n + 1)}{1 - \cos \theta} - 1, \\ \frac{e^a + e^{-a}}{2} &= \frac{2 \cos \phi_n + \cos \theta + 1}{1 - \cos \theta} \quad (= k) \end{aligned} \quad (45)$$

となる. (45) の右辺を k とおき, e^a で整理すると

$$(e^a)^2 - 2ke^a + 1 = 0 \quad (46)$$

が得られ, この2次方程式 e^a について解くと

$$\begin{aligned} e^a &= k + \sqrt{k^2 - 1}, \\ \therefore a &= \log \left(k + \sqrt{k^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

と計算できる. θ を決めると, 等辺等角双曲 n 角形の一辺の長さが定まるので, 等辺等角双曲 n 角形は合同を除いて唯一つ存在する. \square

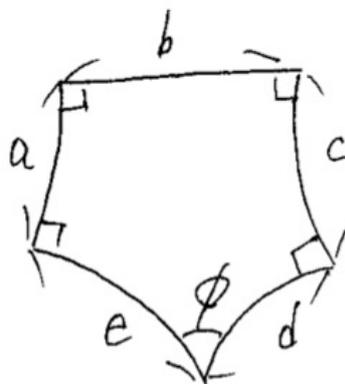
7 直角双曲 5 角形

この章では, ランバートの 4 角形と 2 直角双曲 4 角形を用いて, 直角双曲 5 角形の公式を導く.

7.1 4 直角双曲 5 角形

初めに, ランバートの 4 角形の角を 1 つ増やした図形を紹介する. 4 つの内角が直角である双曲 5 角形を「4 直角双曲 5 角形」と呼ぶ.

定理 39 (4 直角双曲 5 角形). 下図のように, 五辺の長さが a, b, c, d, e で, 長さが d, e の辺の間の内角を ϕ とする 4 直角双曲 5 角形において, 次の公式が成り立つ.



$$\cos \phi = \sinh a \cosh b \sinh c - \cosh a \cosh c$$

特に, $\phi = \frac{\pi}{2}$ である直角双曲 5 角形に対しては

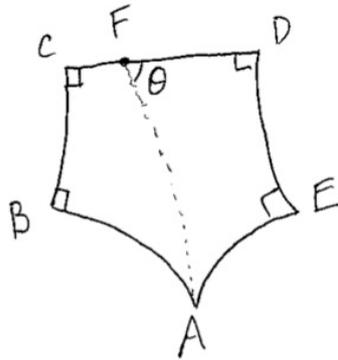
$$\tanh a \cosh b \tanh c = 1$$

$$\sinh a \sinh b = \cosh d$$

が成り立つ.

ここでは証明のアイデアのみ述べる. 証明は [谷口・奥村] 参照.

(証明のアイデア). 下図のように, 内角が ϕ である頂点 A と辺 CD 上の点 F を結ぶ双曲線分を引き, 点 F のなす角を θ とおく.

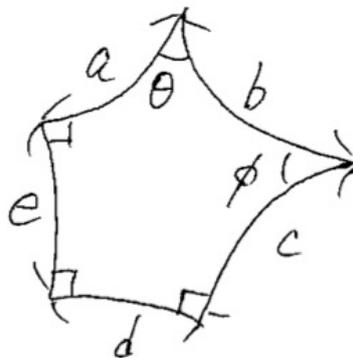


点 F が点 C にあるとき $\theta < \frac{\pi}{2}$, 点 F が点 D にあるとき $\theta > \frac{\pi}{2}$ である. θ の値は辺 CD 間で連続に変化するから, 中間値の定理より, $\theta = \frac{\pi}{2}$ となる点が辺 CD 上にある. そこで, 4 直角双曲 5 角形を 2 つのランバートの 4 角形に分け, ランバートの 4 角形の公式から導く.

7.2 3 直角双曲 5 角形

§6.1 では, ランバートの 4 角形の一般化を考えた. ここでは, 4 直角双曲 5 角形の一般化を考える. 3 つの内角が直角である双曲 5 角形を「3 直角双曲 5 角形」と呼ぶ. 3 直角双曲 5 角形は下図のように, 二種類の図形が描けるため, 「隣接 3 直角双曲 5 角形」, 「ねじれ 3 直角双曲 5 角形」と呼ぶ.

定理 40 (隣接 3 直角双曲 5 角形). 下図のように, 五辺の長さが a, b, c, d, e で, 隣り合う 2 つの内角を $\theta, \phi < \frac{\pi}{2}$ とする隣接 3 直角双曲 5 角形において, 次の公式が成り立つ.



$$\cos \theta = \sinh c \cosh d \sinh e - (\sinh d \sinh e \cos \phi + \cosh e \sin \phi) \cosh c \quad (47)$$

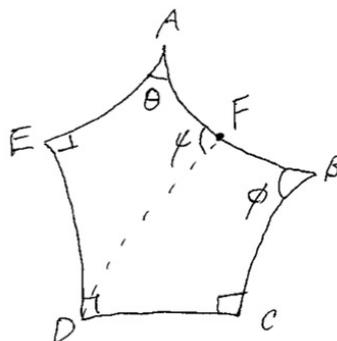
定理 41 (ねじれ 3 直角双曲 5 角形). 下図のように, 五辺の長さが a, b, c, d, e で, 隣り合わない 2 つの内角を $\theta, \phi < \frac{\pi}{2}$ とするねじれ 3 直角双曲 5 角形において, 次の公式が成り立つ.



$$\cos \theta = (\sinh c \cosh d \sinh e - \cosh c \cosh e) \sin \phi - \sinh d \sinh e \cos \phi \quad (48)$$

定理 40, 定理 41 の証明は全く同じ方法を用いるため, ここでは定理 40 のみ証明する.

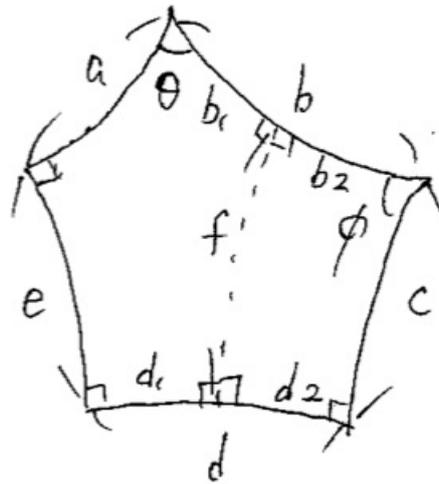
(証明). 隣接 3 直角双曲 5 角形の 1 組の辺に共通垂線を引くことを考える. 下図のように, 頂点 D と辺 AB 上の点 F を結ぶ双曲線分を引き, 点 F でのなす角を ψ とする.



定理 39 の証明のアイデアと同様に考えると, $\psi = \frac{\pi}{2}$ となる点が辺 AB 上にある. そこで, 隣接 3 直角双曲 5 角形を 2 つのねじれ 2 直角双曲 4 角形に分ける. また, 定理 37 の

証明と同様に考えると，辺 AF, CD に共通接線が存在する．よって，隣接 3 直角双曲 5 角形は辺 AB, CD に共通垂線が存在する．

次に，隣接 3 直角双曲 5 角形の辺 AB, CE に共通垂線を引き，ランバートの 4 角形と 4 直角双曲 5 角形に分ける．



定理 32 と定理 39 を用いて

$$\cos \theta = \sinh e \sinh f \cosh d_1 - \cosh e \cosh f \quad (49)$$

$$\cos \phi = \sinh f \sinh d_2 \quad (50)$$

$$\cosh f = \cosh c \sin \phi \quad (51)$$

の形に書ける．(49) より，双曲線関数の加法定理を用いて

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sinh e \sinh f \cosh(d - d_2) - \cosh e \cosh f \\ &= \sinh e \sinh f (\cosh d \cosh d_2 - \sinh d \sinh d_2) - \cosh e \cosh f \end{aligned} \quad (52)$$

である．また，(50) を用いて

$$\sinh d_2 = \frac{\cos \phi}{\sinh f} \quad (53)$$

$$\cosh d_2 = \frac{\sqrt{\cos^2 \phi + \sinh^2 f}}{\sinh f} \quad (54)$$

の形に書ける. (52) に (53),(54) を代入すると

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \sinh e \left(\cosh d \sqrt{\cos^2 \phi + \sinh^2 f} - \sinh d \cos \phi \right) - \cosh e \cosh f \\
&= \sinh e \left(\cosh d \sqrt{\cos^2 \phi + (\cosh^2 f - 1)} - \sinh d \cos \phi \right) - \cosh e \cosh f \\
&= \sinh e \left(\cosh d \sqrt{-\sin^2 \phi + \cosh^2 c \sin^2 \phi} - \sinh d \cos \phi \right) - \cosh e \cosh c \sin \phi \\
&= \sinh e \left(\cosh d \sqrt{\sin^2 \phi (-1 + \cosh^2 c)} - \sinh d \cos \phi \right) - \cosh e \cosh c \sin \phi \\
&= \sinh e (\cosh d \sinh c \sin \phi - \sinh d \cos \phi) - \cosh e \cosh c \sin \phi \\
&= \sinh c \cosh d \sinh e - (\sinh d \sinh e \cos \phi + \cosh e \sin \phi) \cosh c
\end{aligned}$$

であるから, (47) が成り立つ. □

3 直角双曲 5 角形の内角 θ は, 内角 θ と隣り合わない 3 辺の長さ, もう 1 つの内角 ϕ で計算できる. この性質は 2 直角双曲 4 角形するときにも現れた. 更に角を増やしたときにも同様の性質が現れると考えているが, 証明するまでには至っていない.

8 結論

本研究では, 双曲多角形の公式や性質を中心に考え, 自ら考えた図形である 2 直角双曲 4 角形, 3 直角双曲 5 角形を用いて, 等辺等角双曲 n 角形の公式を導くことができた.

2 直角双曲 4 角形と 3 直角双曲 5 角形の内角 θ は, 内角 θ と隣りあわない辺の長さ, 他の内角の大きさにより決定されることが分かったが,

1. 6 角形, 7 角形と角を増やした際も同様の性質が現れるのかを確かめること
2. 2 直角双曲 4 角形の 2 つの内角 θ, ϕ を $\frac{\pi}{2}$ 未満と仮定したが, 片方の内角が $\frac{\pi}{2}$ を越える場合について考えること

が今後の課題である.

また, 本研究では双曲多角形を中心に考えてきたが, 双曲平面のタイル貼りや双曲空間の研究, 双曲多角形の応用を考えつくまでには至らなかった. [谷口・奥村], [深谷] にも双曲平面のタイル貼りについて書いてあるため, 今後学びたいと思う.

参考文献

[谷口・奥村] 谷口雅彦・奥村善英 共著，双曲幾何学への招待，培風館，1996/9/30

[深谷] 深谷賢治，双曲幾何，岩波書店，2004/9/7