L^1 関数のフーリエ変換と複素正則関数

青山学院大学 理工学部 物理数理学科
西山研究室 15112118
横田賢哉

2016 年 2 月 19 日

目次

1 研究動機・目的

本研究を行った動機は，元々私自身がフーリエ解析に興味があり，複素解析の教科書[1](E.M. スタイン,R シャカルチ (新井仁之他訳)「複素解析」) で正則関数とフーリエ変換の関係について勉強し，もっと深くこれらの関係性を学びたいと思ったからである．本研究は

1 L^1 関数のフーリエ変換像の性質を複素正則関数を用いて理解する,

2 正則関数のフーリエ変換について考察する (例：ポアソンの和公式),

3 ポアソンの和公式を用いてゼータ関数の特殊値を求める

という 3 つの目標について考えることを目的としている．

この論文の背景について述べる．フーリエ変換

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

はルベーグ可測かつ $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ を満たす L^1 関数に対して定義される．そして L^1 関数のフーリエ変換像は様々な性質を持つが，その像空間

$$\mathcal{L} = \{\hat{f} : f \in L^1(\mathbb{R})\}$$

の明確な特徴付けは知られていない ([2, p. 69] 参照)．一方で L^1 関数のフーリエ変換像と正則関数の間には興味深い関係性がある．

定理 1 (§ 2.1, 定理 7)**.** R を正の定数，$\phi(z)$ は $|z| < R$ で正則で，$\phi(0) = 0$ を満たすとする．このとき，L^1 関数 $h \in L^1(\mathbb{R})$ に対して，$\|h\|_1 < R$ ならば $\phi(\hat{h}) = \hat{g}$ を満たす $g \in L^1(\mathbb{R})$ が存在する．つまり，$\phi(\hat{h})$ は $\mathcal{L}$ に属する．

この定理は正則関数との合成によって $\mathcal{L}$(の一部) から $\mathcal{L}$ への写像が得られることを示しており，興味深い．また，定理 1 は合成積の計算にも応用することができる (§ 2.2)．その計算例を挙げる．

例 1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ の k 次合成積は次のように与えられる．

$$f_k(x) = (f * f * \cdots * f)(x) = \frac{k\pi^{k-1}}{x^2 + k^2}.$$

フーリエ変換に関する重要な公式として，フーリエ逆変換公式

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} dx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

や，ポアソンの和公式

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

がある．一般の L^1 関数に対してはこの 2 つの公式は条件なしには成り立たないだけでなく，その証明が難しく，公式も扱いにくい．ところがある種のよい性質をもつ正則関数族を導入すると，複素解析的な手法が使えてフーリエ逆変換公式とポアソンの和公式の証明が簡明になり，応用しやすくなる．本論文ではこの 2 つの公式に関して，複素解析的な証明を与える．

特にポアソンの和公式の応用例としてリーマン・ゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\qquad(s\in\mathbb{C})$$

の偶数特殊値 $\zeta(2),\zeta(4),\ldots$ を求めることができるので本論文ではそれも紹介する．以下，この論文で得られた主な結果を述べる．

主結果 1. フーリエ変換とポアソンの和公式を用いると，ゼータ関数の特殊値は

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$$

主結果 2. 特殊値 $\zeta(3)$ は知られていないが，関連する無限和の公式として次のような公式を導くことができた．

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{243}\pi^3,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

本研究を通して L^1 関数のフーリエ変換と正則関数はどのように関わっているかを考えてきた．よい性質を持つ正則関数族 $\mathfrak{I}$ に対するフーリエ変換を考えると，フーリエ変換の性質を複素関数論を用いて理解することができる．フーリエ逆変換やポアソンの和公式の証明は複素積分を用いるので，留数定理がとても有用に働く．リーマン・ゼータ関数の特殊値の計算に応用する際も，フーリエ変換の計算の中で留数定理を用いて複素積分を計算した．このことから，フーリエ変換を考える上で複素積分，特に留数定理が重要と深く関わっていることがわかった．

以下，本論文の章ごとの内容を簡単に紹介する．§ 2 では L^1 関数のフーリエ変換とその性質について簡単に紹介する．§ 3 では正則関数と L^1 関数のフーリエ変換の合成について考え，合成積の計算への応用を行う．§ 4 では．ある良い性質を持つ正則関数族 $\mathfrak{I}$ を導入し，関数論的手法でフーリエ逆変換やポアソンの和公式を導く．§ 5 ではフーリエ変換とポアソンの和公式を用いて，リーマンゼータ関数の偶数特殊値といくつかの無限和公式を求める．§ 6 では本論文のまとめと将来の研究計画について述べる．

2　L^1 関数のフーリエ変換と諸性質

2.1　L^1関数 のフーリエ変換

本節では，後の応用で必要最低限の用語と概念を導入する．ルベーグ積分については詳しい解説はしないが [4, 志賀徳造　「ルベーグ積分から確率論」]，[5] を参照してほしい．

定義 1 (L^1 関数)**.** $\mathbb{R}$ 上の複素数値関数 f のうち，ルベーグ可測かつ

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

を満たす関数で構成されるベクトル空間 $L^1(\mathbb{R})$ を L^1 空間といい，$f \in L^1(\mathbb{R})$ のとき，f を L^1 関数という．また $\|f\|_1$ を L^1 ノルムという．

次に，L^1 関数に対してフーリエ変換を定義する．

定義 2 (フーリエ変換)**.** $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

と定義して，$\hat{f}$ を f のフーリエ変換という．

L^1 関数のフーリエ変換の像空間を $\mathcal{L}$ とする．

$$\mathcal{L} = \{\hat{f} : f \in L^1(\mathbb{R})\}$$

このときフーリエ変換 $\mathcal{F}$ は，$L^1(\mathbb{R})$ を $\mathcal{L}$ に写す写像ということになる．$\mathcal{L}$ の性質については後述する．

例 2 (フーリエ変換の例)**.** 区間 $[-1, 1]$ の定義関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1) \\ 0 & (1 < |x|) \end{cases}$$

を考える．$f(x)$ は L^1 関数であり，そのフーリエ変換は

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{\sin 2\pi \xi}{\pi \xi}$$

となる．$f(x)$ は連続ではないが，$\hat{f}(\xi)$ は $\xi = 0$ でも連続 (実は解析的) であることに注意する．

また，$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ であれば，逆変換も成立する．

定理 2 (フーリエ逆変換)**.** L^1 関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ならば

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} dx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

が成立する．

[**証明**]. [2, p. 44, 定理 11] 参照．正則関数と関係した特別な場合のフーリエ逆変換公式の証明は後で行う (定理 9). □

次に，フーリエ変換の基本的な性質について紹介する．

命題 1. $\mathcal{F}$ は線型写像である．

[**証明**]. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，$f, g \in Ł^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g) \tag{1}$$

を示せば良い．

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \beta g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= \alpha \mathcal{F}(f)(\xi) + \beta \mathcal{F}(g)(\xi)
\end{aligned}$$

となり式 (1) が示された． □

定理 3. $f \in \mathbb{R}$ ならば，$\hat{f}(\xi)$ は連続関数である．

[**証明**]. [2, p. 2,(1.5)] の証明参照． □

命題 2. L^1 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in L^1(\mathbb{R})$ に対して，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に L^1 ノルムに関して収束するならば，$\hat{f}_n$ は $\hat{f}$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束する．

[**証明**]. 仮定より，$\|f - f_n\|_1 \to 0 \ (n \to \infty)$ が成立．このとき，

$$\begin{aligned}|\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| &= |(f_n - f)\hat{}(\xi)| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_n - f)(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |(f_n - f)(x)| dx \\ &= \|f_n - f\|_1\end{aligned}$$

よって $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \|f_n - f\|_1 \to 0 \ (n \to \infty)$ が成立するので，$\hat{f}_n$ は $\hat{f}$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束する． □

2.2 $\mathcal{L}$ の性質

L^1 関数のフーリエ変換像の空間 $\mathcal{L} = \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ の性質のうち，いくつかを紹介する．すでに見たように，$\mathcal{F}$ の線形性から $\mathcal{L}$ はベクトル空間であって，しかも有界な連続関数のなす空間の部分空間である．しかし，$\mathcal{L}$ は更に特別な性質を持っている．

定理 4 (リーマン=ルベーグの定理)**.** $f \in L^1(\mathbb{R})$ ならば,

$$\hat{f}(\xi) \to 0 \qquad (|\xi| \to \infty)$$

が成立する．

[**証明**]. [2, Theorem1] 参照. □

例 3. 区間 $[-1, 1]$ の定義関数のフーリエ変換

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi}$$

は連続関数かつ

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi} = 0$$

である．

定理 5. L^1 関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\xi)$ が奇関数ならば $1 < b < \infty$ に対して,

$$\left| \int_1^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi} d\xi \right| \leq A\|f\|_1$$

が成立する．右辺は b にはよらないことに注意する．

[**証明**]. $\hat{f}(\xi)$ が奇関数より $\hat{f}(\xi) = -\hat{f}(-\xi)$ が成立するので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi\xi x)dx = 0$$

となることから,

$$\hat{f}(\xi) = -i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi\xi x)dx$$

が成立する．積分 $\displaystyle\int_1^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}d\xi$ に代入し，絶対値をとると,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_1^b \frac{1}{\xi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi\xi x)dx\right\}d\xi\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left\{\int_1^b \frac{\sin(2\pi\xi x)}{\xi}d\xi\right\}dx\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\left|\int_{2\pi x}^{2\pi xb} \frac{\sin(u)}{u}du\right|dx \quad (2\pi x\xi = u \text{ と変数変換}) \\
&\leq A\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = A\|f\|_1
\end{aligned}$$

□

例 4. 連続かつ無限遠で 0 に収束するが，L^1 関数のフーリエ変換像でないものを紹介する．奇関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \begin{cases} 1/\log(x) & (e < x) \\ x/e & (|x| < e) \\ -1/\log(-x) & (x < -e) \end{cases}$$

とおく．$g(x)$ に対して $\displaystyle\int_1^b \frac{g(x)}{x}dx$ を計算すると,

$$\int_1^b \frac{g(\xi)}{\xi}d\xi = \frac{1}{e}\int_1^e \frac{\xi}{\xi}d\xi + \int_e^b \frac{1}{\xi\log(\xi)}d\xi = 1 - \frac{1}{e} + \log(\log(b)) \to \infty \quad (b\to\infty)$$

よって積分 $\displaystyle\int_a^b \frac{g(\xi)}{\xi}d\xi$ が発散してしまうので定理 5 の対偶より，g は L^1 関数のフーリエ変換像でないことがわかる．

有界な連続関数の空間の部分空間

$$C_0(\mathbb{R}) = \{g(\xi) : g \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上連続で，} g(\xi)\to 0 \quad (|\xi|\to\infty)\}$$

を考えると，すでに説明したように，$\mathcal{L} \subset C_0(\mathbb{R})$ であるが，上の例は $\mathcal{L} \subsetneqq C_0(\mathbb{R})$ であることを示している．

2.3 合成積とその性質

定義 3 (合成積)**.** $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ に対し，$f * g$ を

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \tag{2}$$

と定義して，$f * g$ を f と g の合成積という．また，$f_1 = f$，$f_k = f_{k-1} * f$ $(k \leq 2)$ と書き，f_k を f の k 次合成積という．

次に，合成積の性質について紹介する．

命題 3. $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ とする．このとき

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1, \tag{3}$$

$$f * g = g * f \tag{4}$$

が成立する．

[**証明**]. はじめに，式 (3) を示す．

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)|\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)g(t)| dt dx. \end{aligned} \tag{5}$$

式 (5) について，$x - t = s$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned} (5) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)g(t)| dt ds \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \right) \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

よって式 (5) が示された．次に式 (4) を示す．

$$\begin{aligned}
(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \\
&= \int_{\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)(-du) \qquad (x-t=u \text{ と変数変換}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du \\
&= (g*f)(x).
\end{aligned}$$

よって式 (4) も示された． □

最後に，フーリエ変換と合成積に関する重要な性質を紹介する．

定理 6. $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ に対して，

$$(f*g)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)$$

が成立する．ただし右辺は通常の関数の積である．

[**証明**]．合成績とフーリエ変換の定義より，

$$\begin{aligned}
(f*g)\hat{}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x)e^{-2\pi i\xi x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)e^{-2\pi i\xi x}dt \right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-2\pi i\xi x}dx \right\} dt \qquad (6)
\end{aligned}$$

が成り立つ．式 (6) において，$x-t=p$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned}
(6) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-2\pi i\xi(t+p)}dp \right\} dt \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi i\xi t}dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-2\pi i\xi p}dp \right) \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

□

これを k 次の合成積に用いると次の系を得る．

系 1. $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して,

$$\hat{f}_k(\xi) = (\hat{f}(\xi))^k$$

が成り立つ.

この定理 6 によって $\mathcal{L}$ は単なるベクトル空間というだけでなく, 通常の関数の積についても閉じており, 環構造を持つことがわかる. つまりフーリエ変換は環 $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$ から環 $(\mathcal{L}, +, \cdot)$ への代数準同型である.

3 正則関数とフーリエ変換との関係

3.1 正則関数と L^1 関数のフーリエ変換の合成

フーリエ変換についてある程度理解したところで, 次に正則関数と L^1 関数のフーリエ変換との関係について考えよう. 次の定理は正則関数が合成関数をとることによって, $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}$ に写すことを述べている.

定理 7. R を正の定数, $\phi(z)$ は $|z| < R$ 上正則で, $\phi(0) = 0$ を満たすとする. このとき, L^1 関数 $h \in L^1(\mathbb{R})$ に対して, $\|h\|_1 < R$ ならば $\phi(\hat{h}) = \hat{g}$ を満たす $g \in L^1(\mathbb{R})$ が存在する. つまり, $\phi(\hat{h})$ は $\mathcal{L}$ に属する.

[**証明**]. 仮定より $\phi(z)$ は $|z| < R$ 上で正則なので半径 R の収束円内で

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \tag{7}$$

とべき級数展開することができる ($\phi(0) = 0$ より $a_0 = 0$). 仮定 $\|h\|_1 < R$ より, 任意の ξ に対して

$$|\hat{h}(\xi)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx = \|h\|_1 < R$$

より, $|\hat{h}(\xi)| < R$ がわかる. よって式 (7) の z に $\hat{h}(\xi)$ を代入すると絶対収束し, 系 1 より

$$\phi(\hat{h}(\xi)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\hat{h}(\xi))^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\hat{h_k}(\xi)) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

一方 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k h_k$ は L^1 ノルムに関して収束していることを示そう. そこで, $n \geq m \geq 1$

$(n, m \in \mathbb{Z})$ とすると,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k h_k - \sum_{k=1}^{m} a_k h_k \right\|_1 = \left\| \sum_{k=m}^{n} a_k h_k \right\|_1 \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \|h_k\|_1 \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \|h\|_1^k.$$

$\|h\|_1 < R$ より, $n, m \to \infty$ のとき, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} |a_k| \|h\|_1^k$ は収束する. よって

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} a_k h_k \right\|_1 \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

が成立する. $L^1(\mathbb{R})$ が L^1 ノルムに関して完備距離空間であるから, $\left\| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k h_k - g \right\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty)$ を満たす $g \in L^1(\mathbb{R})$ が存在する. 命題 2 より,

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \hat{h_k}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\hat{h}(\xi))^k = \phi(\hat{h}(\xi))$$

となる. □

3.2 L^1 関数の k 次合成積への応用

定理 7 は合成積の計算に用いることができる.

例 5. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ の k 次合成積は

$$f_k(x) = \frac{k\pi^{k-1}}{x^2 + k^2}$$

である.

合成積の定義に基づいて $f_2(x), f_3(x), f_4(x), \ldots$ を求めることができる. しかし合成積の定義通り計算すると例えば

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+(x-t)^2)(1+t^2)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{-\frac{2}{x(x^2+4)} t + \frac{3}{x^2+4}}{1+(x-t)^2} + \frac{-\frac{2}{x(x^2+4)} t + \frac{1}{x^2+4}}{1+t^2} \right\} dt = \frac{2\pi}{x^2+4} \end{aligned}$$

のように途中の積分計算が大変であり，同様にして $f_3(x), f_4(x), \dots$ を計算するのは困難である．この合成積の計算に定理 7 を用いることにより，比較的容易に合成積の計算を行うことができる．

はじめに，$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ のフーリエ変換を求めよう．ここでも複素関数論が威力を発揮する．

まず $\xi > 0$ のとき，下図の Γ を積分経路とする複素積分 $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi iz\xi}}{1+z^2}dz$ を考える．

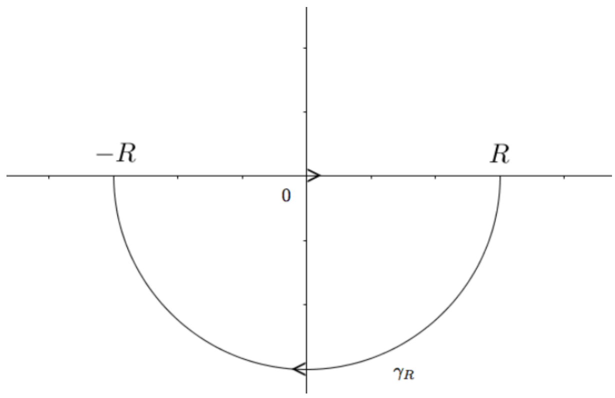

図 1　積分路 Γ

関数 $\dfrac{e^{-2\pi iz\xi}}{1+z^2}$ の積分経路 Γ 内における極は $z = -i$ であって留数は,

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-2\pi iz\xi}}{1+z^2} : z = -i\right) = -\frac{e^{-2\pi\xi}}{2i}$$

で与えられる．留数定理より

$$\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi iz\xi}}{1+z^2}dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(\frac{e^{-2\pi iz\xi}}{1+z^2} : z = -i\right) = -\pi e^{-2\pi\xi}$$

と計算できる．Γ 上の積分は区間 $[-R, R]$ と積分路 γ_R を用いて

$$\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi iz\xi}}{1+z^2dz} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi ix\xi}}{1+x^2}dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{-2\pi iz\xi}}{1+z^2}dz$$

と分解される．γ_R 上の積分は，$R \to \infty$ とすると 0 に収束する．まず三角不等式より $|1 + R^2e^{2i\theta}| \geq R^2 - 1$ である．次に

$$\begin{cases} \sin\theta \leq -\frac{2}{\pi}\theta + 2 & (\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi) \\ \sin\theta \leq \frac{2}{\pi}\theta - 4 & (\frac{3}{2}\pi < \theta \leq 2\pi) \end{cases}$$

が成り立つことに注意して $z = Re^{i\theta}$ $(\theta : 2\pi \to \pi)$ とパラメータ表示し，絶対値をとると

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{1+z^2}dz\right| \le R\int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{2\pi\xi R\sin\theta}}{|1+R^2e^{2i\theta}|}d\theta \\
&\le \frac{R}{R^2-1}\left\{\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-4R\xi\theta+4\pi\xi R}d\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} e^{4R\xi\theta-8\pi\xi R}d\theta\right\} \\
&= \frac{R}{R^2-1}\left\{e^{4\pi\xi R}\left[-\frac{1}{4\xi R}e^{-4\xi R\theta}\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} + e^{-8\pi\xi R}\left[\frac{1}{4\xi R}e^{4\xi R\theta}\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\right\} \\
&= \frac{R}{4\xi R(R^2-1)}\left\{e^{4\pi\xi R}(-e^{-6\pi\xi R}+e^{-4\pi\xi R}) + e^{-8\pi\xi R}(e^{8\pi\xi R}-e^{6\pi\xi R})\right\} \\
&= \frac{1}{2\xi(R^2-1)}(1-e^{-2\pi\xi R}) \to 0 \quad (R\to\infty).
\end{aligned}
$$

よって $\xi > 0$ のとき，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{1+x^2}dx = \pi e^{-2\pi\xi}$ となる．

$\xi < 0$ の場合は積分路を上半平面上の半径 R の半円にとり，同じように複素積分を計算すると，$\hat{f}(\xi) = \pi e^{2\pi\xi}$ を得る．$\xi = 0$ の場合は積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$ であるから，任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して $\hat{f}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$ となる．

次に正則関数 $\phi(z) = e^z - 1$ を考える．$\phi(z)$ は整関数であるので複素平面全体でべき級数展開可能である．

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (|z| < \infty) \tag{8}$$

式 (8) に $t\hat{f}(\xi)$ を代入すると，

$$\phi(t\hat{f}(\xi)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t\hat{f}(\xi))^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{f}_k(\xi)}{k!}t^k.$$

よって，以上より

$$e^{t\pi e^{-2\pi|\xi|}} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{f}_k(\xi)}{k!}t^k \tag{9}$$

が成立する．式 (9) の両辺を t で微分すると，

$$(\pi e^{-2\pi|\xi|})e^{t\pi e^{-2\pi|\xi|}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\hat{f}_k(\xi)}{(k-1)!}t^{k-1}. \tag{10}$$

式 (10) に $t = 0$ を代入すると

$$\hat{f}_2(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$$

を得る．同様に式 (10) を k 階微分し，$t=0$ を代入することにより

$$\hat{f}_k(\xi) = \pi^k e^{-2\pi k|\xi|}$$

を得る．これをフーリエ逆変換することにより，最初に挙げた式

$$f_k(x) = \frac{k\pi^{k-1}}{x^2+k^2}$$

を得る．

4　正則関数族 $\Im$ のフーリエ変換

4.1　関数族 $\Im$

この節では，フーリエ変換を計算する枠組みとして良い性質を持った関数族を考える．ここではそのような関数族を複素関数論を利用して準備する．

定義 4 (関数族 $\Im$)**.** $a>0$ に対し，以下の二条件を満たす関数 f の族を $\Im_a$ と定める．

1. 関数 f は水平な帯状領域 $S_a = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < a\}$ 上で正則である．
2. ある定数 $K>0$ が存在して，すべての $x \in \mathbb{R}$，$|y|<a$ に対して
$$|f(x+iy)| \leq \frac{K}{1+x^2}$$
が成立する．

また，$\Im = \bigcup_{a>0} \Im_a$ とおく．

定理 8. ある $a>0$ に対して $f \in \Im_a$ ならば，f の $\mathbb{R}$ への制限は L^1 関数であって，任意の $0 \leq b < a$ に対して

$$|\hat{f}(\xi)| \leq Be^{-2\pi b|\xi|}$$

が成り立つ．特に $\hat{f}$ はまた L^1 関数である．

[**証明**]. $b=0$ のときは

$$|\hat{f}(\xi)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{1+x^2}dx = K\pi$$

となり確かに成り立つ．$0<b<a$ のとき．$\xi>0$ と仮定し，$g(z) = f(z)e^{-2\pi i\xi z}$ とおいて，図 2 のような積分路を考える．

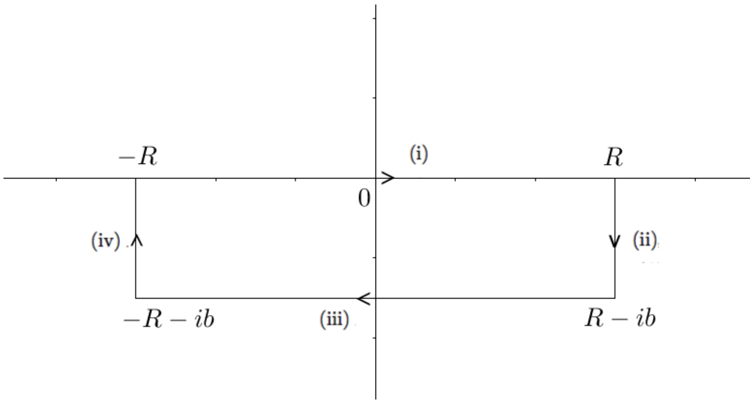

図 2　積分路 (i),(ii),(iii),(iv)

$R\to\infty$ のとき，g の積分路 (ii)，(iv) 上の積分は 0 に収束することを示す．積分路 (iv) を $z=-R-it$ $(t:b\to 0)$ とパラメータ表示すると

$$\left|\int_{(\mathrm{iv})} g(z)dz\right| = \left|\int_b^0 g(-R-it)(-idt)\right| \le \int_0^b |g(-R-it)|dt$$
$$= \int_0^b |f(-R-it)e^{-2\pi i\xi(-R-it)}|dt = \int_0^b |f(-R-it)e^{-2\pi\xi t}|dt \tag{11}$$

$|f(x+iy)| \le \dfrac{K}{1+x^2}$ より，$|f(-R-it)| \le \dfrac{K}{1+R^2} \le \dfrac{K}{R^2}$ なので，

$$(11) \le \int_0^b \frac{K}{R^2}e^{-2\pi\xi t}dt = \frac{K}{2\pi\xi R^2}(1-e^{-2\pi\xi b}) \to 0 \ \ (R\to\infty)$$

よって積分路 (iv) 上の積分は 0 に収束する．積分路 (ii) についても同様．積分路 (i) 上の積分は実軸上の積分であるから，$\displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$ であり，$R\to\infty$ とすれば $\hat{f}(\xi)$ と等しくなる．積分路 (iii) 上の積分は $z=x-ib$ $(x:R\to -R)$ とパラメータ表示すれば，

$$\int_{(\mathrm{iii})} g(z)dz = \int_R^{-R} g(x-ib)dx = -\int_{-R}^{R} f(x-ib)e^{-2\pi i(x-ib)\xi}dx$$

となる．コーシーの積分定理より，$\displaystyle\int_{(\mathrm{i})+(\mathrm{ii})+(\mathrm{iii})+(\mathrm{iv})} g(z)dz = 0$ が成立し，$R\to\infty$ とすると，

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-ib)e^{-2\pi i(x-ib)\xi}dx$$

が成立する．両辺の絶対値をとると，

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\xi)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-ib)e^{-2\pi i(x-ib)\xi}dx\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{1+x^2}e^{-2\pi b\xi}dx \leq Be^{-2\pi b\xi}\end{aligned}$$

$\xi < 0$ に対しては下図の積分路を同様にとって考えれば良い． □

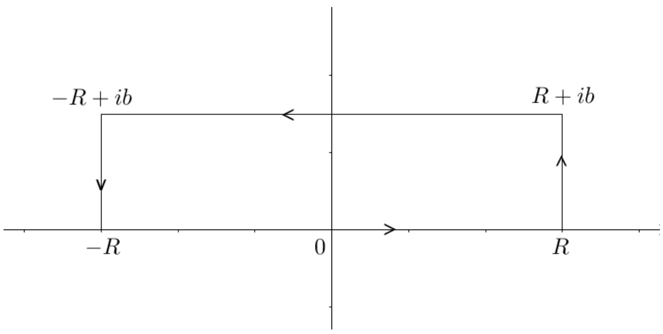

図 3　$\xi < 0$ の場合の積分路

4.2　関数族 $\mathfrak{F}$ に対するフーリエ逆変換とポアソンの和公式

定理 9 (フーリエ逆変換)．$f \in \mathfrak{F}$ ならば，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}dx$$

が成立する．

定理 2 により，フーリエ逆変換公式が成り立つことは既にわかっているが，ここでは関数論的手法によって証明する．

[**証明**]．ξ の符号が関わるので

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}dx = \int_{-\infty}^{0} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}dx + \int_{0}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}dx$$

と変形しておく．2 番目の積分について考えよう．$f \in \mathfrak{F}_a$ であるとし，$0 < b < a$ をとる．定理 8 の証明と同様の議論により，

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u-ib)e^{-2\pi i(u-ib)\xi}du$$

が示される．実軸を $-ib$ だけ平行移動した直線を $L_1 = \{u - ib : u \in \mathbb{R}\}$ と書くと，

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi &= \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^\infty f(u-ib) e^{-2\pi i (u-ib)\xi} du \right\} e^{2\pi i \xi x} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(u-ib) \left\{ \int_0^\infty e^{-2\pi i (u-ib-x)\xi} d\xi \right\} du \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(u-ib) \frac{1}{2\pi b + 2\pi i (u-x)} du \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(u-ib)}{u-ib-x} du \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi \qquad (12)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．$\xi < 0$ のときの積分に関しては，実軸を ib だけ平行移動した直線を $L_2 = \{u + ib : u \in \mathbb{R}\}$ と書くと，同様の計算により

$$
\int_{-\infty}^0 \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi \qquad (13)
$$

を得る．

次に，$x \in \mathbb{R}$ に対し，下図の積分路 γ_R を考える．

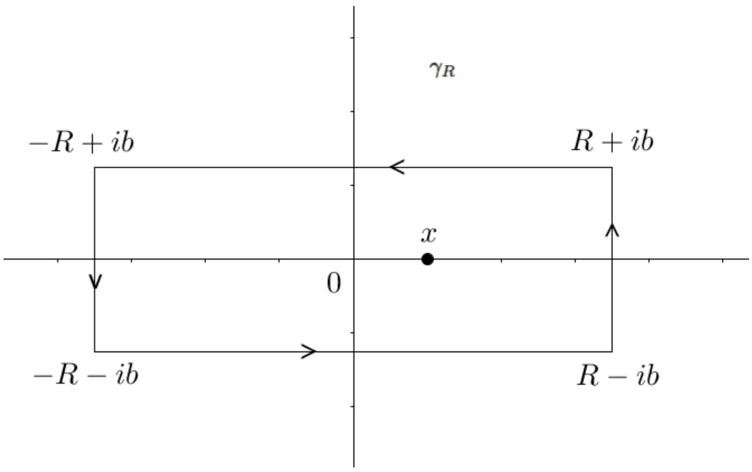

図 4　積分路 γ_R

コーシーの積分公式より

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi
$$

であるが．垂直辺上の積分は $R \to \infty$ のとき 0 に収束するので，以上より

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{f(\xi)}{\xi - x}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{f(\xi)}{\xi - x}d\xi \\ &= \int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi + \int_{-\infty}^0 \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi \quad (\because (12),(13) \text{ より}) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi \end{aligned}$$

となり，証明が完了する． □

定理 10 (ポアソンの和公式)**.** $f \in \mathfrak{F}$ ならば

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

が成立する．両辺は絶対収束する級数である．

[**証明**]. $f \in \mathfrak{F}_a$ であるとし，$0 < b < a$ をとる．このとき，関数 $\dfrac{1}{e^{2\pi iz} - 1}$ は $z = n \in \mathbb{Z}$ において留数 $\dfrac{1}{2\pi i}$ の 1 位の極を持つ．したがって $\dfrac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1}$ は n において 1 位の極を持ち，その留数は $\dfrac{f(n)}{2\pi i}$ である．$N \in \mathbb{Z}$ に対して積分路 γ_N を図のようにとる．

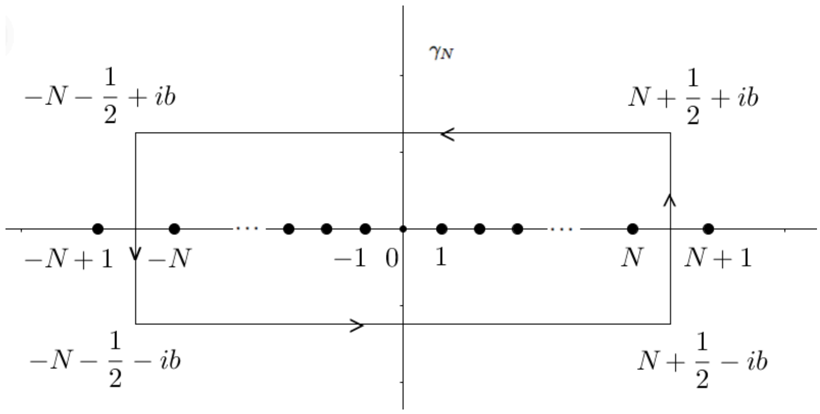

図 5　積分路 γ_N

留数定理より，

$$2\pi i \sum_{|n|\le N} \frac{f(n)}{2\pi i} = \int_{\gamma_N} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1}dz$$

$$\therefore \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \int_{L_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1}dz - \int_{L_2} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1}dz. \tag{14}$$

ここで，$|w| > 1$ のとき

$$\frac{1}{w-1} = w^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} w^{-n}$$

となることを用いると，L_1 上 $z = x - ib$ では

$$|e^{2\pi iz}| = |e^{2\pi i(x-ib)}| = |e^{2\pi b}| > 1$$

なので，

$$\frac{1}{e^{2\pi iz}-1} = e^{-2\pi iz}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz}$$

が成立．$|w| < 1$ ならば

$$\frac{1}{w-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

となることを用いると，L_2 上では $|e^{2\pi iz}| < 1$ であるため，

$$\frac{1}{e^{2\pi iz}-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz}$$

となる．式 (14) にこの結果を代入すると

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) &= \int_{L_1} f(z)\left(e^{-2\pi iz}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz}\right)dz + \int_{L_2} f(z)\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz}\right)dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{L_1} f(z)e^{-2\pi i(n+1)z}dz + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{L_2} f(z)e^{2\pi inz}dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i(n+1)x}dx + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi inx}dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n+1) + \sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)
\end{aligned}$$

がわかる． □

5 ポアソンの和公式の応用

先ほど証明したポアソンの和公式を用いることにより，リーマン・ゼータ関数の偶数特殊値やいくつかの無限和公式を導くことができる．

5.1 リーマン・ゼータ関数の偶数特殊値

この節ではリーマン・ゼータ関数を定義してその正の偶数値における値について考える．

定義 5 (リーマン・ゼータ関数)**.** $s \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ に対し，

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

をリーマン・ゼータ関数という．

ゼータ関数は複素平面上全体での有理型関数である ([1, p. 172, 定理 2.4] 参照)．ポアソンの和公式を用いて $\zeta(2)$，$\zeta(4)$ を求めてみよう．そのために次の定理を証明する．

定理 11. $\tau \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ のとき，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)}, \tag{15}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^3} = \frac{\pi^3\cos(\pi\tau)}{\sin^3(\pi\tau)}, \tag{16}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^4} = \frac{\pi^4(\cos(2\pi\tau)+2)}{3\sin^4(\pi\tau)} \tag{17}$$

が成立する．

この定理を証明するために，補題を準備する．

補題 1. $\tau \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Im}(\tau) > 0)$，$k \geq 2$ に対して

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} e^{2\pi i m\tau} \tag{18}$$

が成立する．

[**証明**]. $\xi > 0$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{(\tau+x)^k}$ のフーリエ変換は

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{(\tau+x)^k} dx$$

となる．この積分を求めるにあたり，下図の Γ を積分路とする複素積分 $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}dz$ を考える．

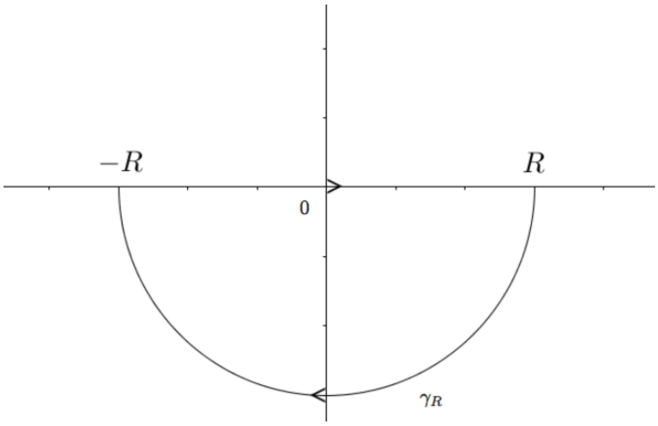

図 6　積分路 Γ

関数 $\dfrac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}$ は $z=-\tau$ で k 位の極をもつ．留数は

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}:z-\tau\right) &= \lim_{z\to-\tau}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}\ (\tau+z)^k\right)\\ &= \frac{(-2\pi i\xi)^{k-1}}{(k-1)!}e^{2\pi i\xi\tau}\end{aligned}$$

である．留数定理を用いると

$$\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}dz = \frac{(-2\pi i)^{k-1}}{(k-1)!}\xi^{k-1}e^{2\pi i\xi\tau}$$

と計算できる．ここで積分 $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}dz$ は積分路 γ_R を用いて

$$\int_\Gamma \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}dz = \int_{-R}^{R}\frac{e^{-2\pi i\xi x}}{(\tau+x)^k}dx + \int_{\gamma_R}\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}dz$$

と書ける．積分路 γ_R 上の積分は $R\to\infty$ とすると 0 に収束する．まず三角不等式より $|\tau+Re^{i\theta}|\leq(R-|\tau|)^k$ である．次に

$$\begin{cases}\sin\theta\leq-\frac{2}{\pi}\theta+2 & (\pi\leq\theta\leq\frac{3}{2}\pi)\\ \sin\theta\leq\frac{2}{\pi}\theta-4 & (\frac{3}{2}\pi<\theta\leq2\pi)\end{cases}$$

が成り立つことに注意して $z = Re^{i\theta}$ $(\theta : 2\pi \to \pi)$ とパラメータ表示し，評価していくと

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k} dz\right| \leq R\int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{2\pi\xi R\sin\theta}}{|\tau + Re^{i\theta}|^k} d\theta \\
&\leq \frac{R}{(R-|\tau|)^k}\left\{\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-4R\xi\theta+4\pi\xi R} d\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} e^{4R\xi\theta-8\pi\xi R} d\theta\right\} \\
&= \frac{R}{(R-|\tau|)^k}\left\{e^{4\pi\xi R}\left[-\frac{1}{4\xi R}e^{-4\xi R\theta}\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} + e^{-8\pi\xi R}\left[\frac{1}{4\xi R}e^{4\xi R\theta}\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\right\} \\
&= \frac{R}{4\xi R(R-|\tau|)^k}\left\{e^{4\pi\xi R}(-e^{-6\pi\xi R} + e^{-4\pi\xi R}) + e^{-8\pi\xi R}(e^{8\pi\xi R} - e^{6\pi\xi R})\right\} \\
&= \frac{1}{2\xi(R-|\tau|)^k}(1-e^{-2\pi\xi R}) \to 0 \quad (R \to \infty).
\end{aligned}
$$

よって，$\xi > 0$ のとき

$$\hat{f}(\xi) = \frac{(-2\pi i)^{k-1}}{(k-1)!}\xi^{k-1}e^{2\pi i\xi\tau}.$$

次に，$\xi < 0$ のとき，複素積分 $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k} dz$ を考える．積分経路 Γ' を図のようにとる．

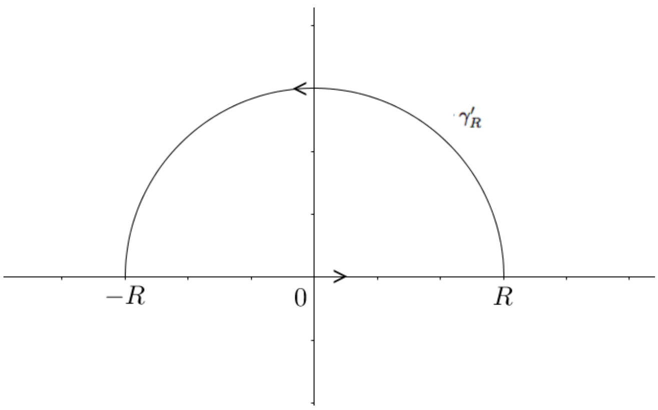

図 7　積分路 Γ'

Γ' の内部において関数 $\dfrac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}$ は正則であるから，コーシーの積分定理より

$$\int_{\Gamma'} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k} dz = 0$$

が成立する．$\xi > 0$ のときと同様に，積分路 γ'_R を用いて

$$\int_{\Gamma'} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{(\tau+x)^k}dz + \int_{\gamma'_R} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}dz$$

と書ける．積分路 γ'_R 上の積分は γ_R 上の積分と同様の議論をすることにより，

$$\int_{\gamma'_R} \frac{e^{-2\pi i\xi z}}{(\tau+z)^k}dz \to 0 \quad (R \to \infty).$$

よって $\xi < 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{(\tau+x)^k}dx = 0$$

が成立する．また $\xi = 0$ のとき，積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\tau+x)^k} = \left[-\frac{1}{(k-1)}(\tau+x)^{-(k-1)}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

となる．よって，$f(x) = \dfrac{1}{(\tau+x)^k}$ のフーリエ変換は

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\xi^{k-1}e^{2\pi i\xi\tau} & (\xi > 0) \\ 0 & (0 \geq \xi) \end{cases}$$

となり，ポアソンの和公式を適用すると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1}e^{2\pi i m\tau}$$

を得る． □

定理 11 の証明．$|z| < 1$ ならば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$$

が成立する．両辺を z で微分し，z を掛けると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}. \tag{19}$$

同様に式 (19) の両辺を z に関して微分し，z を掛けると

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}, \tag{20}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z(z^2+4z+1)}{(1-z)^4} \tag{21}$$

を得る．補題 1 の式 (18) に $k=2$ を代入すると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+n)^2} = -4\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m(e^{2\pi i\tau})^m$$

を得る．右辺に対して式 (19) を適用すると

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+n)^2} &= -4\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m(e^{2\pi i\tau})^m \\ &= -4\pi^2 \frac{e^{2\pi i\tau}}{(1-e^{2\pi i\tau})^2} \\ &= -4\pi^2 \frac{1}{(e^{\pi i\tau}-e^{-\pi i\tau})^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)}\end{aligned}$$

を得る．同様に $k=3$，$k=4$ の場合も

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+n)^3} &= \frac{(-2\pi i)^3}{2!}\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2(e^{2\pi i\tau})^m \\ &= \frac{8\pi^3 i}{2} \frac{e^{2\pi i\tau}(e^{2\pi i\tau}+1)}{(1-e^{2\pi i\tau})^3} \\ &= 4\pi^3 i \frac{e^{\pi i\tau}+e^{-\pi i\tau}}{(e^{-\pi i\tau}-e^{\pi i\tau})^3} = \frac{\pi^3\cos(\pi\tau)}{\sin^3(\pi\tau)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+n)^4} &= \frac{(-2\pi i)^4}{3!}\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^3(e^{2\pi i\tau})^m \\ &= \frac{8\pi^4}{3} \frac{e^{2\pi i\tau}((e^{2\pi i\tau})^2+4e^{2\pi i\tau}+1)}{(1-e^{2\pi i\tau})^4} \\ &= \frac{8\pi^4}{3} \frac{e^{2\pi i\tau}+4+e^{-2\pi i\tau}}{(e^{\pi i\tau}-e^{-\pi i\tau})^4} = \frac{\pi^4(\cos 2\pi\tau+2)}{3\sin^4\pi\tau}\end{aligned}$$

となり，$\mathrm{Im}(\tau) > 0$ のとき定理 11 が成り立つ．次に定理 11 が $\tau \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ 上で成立することを示す．式 (15)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)}$$

は両辺 $\tau = n \in \mathbb{Z}$ において 2 位の極を持ち，$\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ 上正則である有理型関数である．一致の定理より，式 (15) は下半平面に解析接続され、$\tau \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ に対して成立する．式 (16), (17) も同様. □

定理 11 を用いて $\zeta(2)$，$\zeta(4)$ の特殊値を求めよう．式 (15) に対し，式変形すると，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{(\tau+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin \pi\tau^2} - \frac{1}{\tau^2} \to \frac{\pi^2}{3} \ (\tau \to 0)$$

を得る．また，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{(\tau+n)^k} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\tau+n)^k} \qquad (k : \text{偶数}) \tag{22}$$

が成立するので，

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

を得る．$\zeta(4)$ も同様に

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{(\tau+n)^4} = \frac{\pi^4(\cos(2\pi\tau)+2)}{3\sin^4(\pi\tau)} - \frac{1}{\tau^4} \to \frac{\pi^4}{45} \quad (\tau \to 0)$$

であるので，$\zeta(4)$ の特殊値は

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5.2 その他の無限和公式

ポアソンの和公式を用いて定理 11 を証明し，$\zeta(2)$，$\zeta(4)$ の特殊値を求めることができた．この方法でゼータ関数の他の偶数特殊値を求めることができる．しかし，ゼータ関数の奇数特殊値は式 (22) が成立しないので求めることができない．ここでは定理 11 の式 (16) を用いていくつかの無限和公式を導くことができることを紹介する．

定理 12.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{243}\pi^3=\frac{4\sqrt{3}}{3^5}\pi^3 \tag{23}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)^3}=\frac{\pi^3}{32}=\frac{\pi^3}{2^5} \tag{24}$$

[**証明**]. 式 (23) を示す．式 (16) に $\tau=\dfrac{1}{3}$ を代入すると

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\frac{1}{3}+n)^3}=\frac{\pi^3\cos(\frac{\pi}{3})}{\sin^3(\frac{\pi}{3})}$$

式を整理すると，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(3n+1)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{243}\pi^3=\frac{4\sqrt{3}}{3^5}\pi^3.$$

n が負のとき，

$$\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{(3n+1)^3}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)^3}$$

が成立するので，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{243}\pi^3=\frac{4\sqrt{3}}{3^5}\pi^3$$

を得る．式 (24) に関しては式 (16) に $\tau=\dfrac{1}{4}$ を代入すると

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(4n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}=\frac{\pi^3}{2^5}$$

となり，n が負のとき，

$$\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{(4n+1)^3}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)^3}$$

が成立するので

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)^3}=\frac{\pi^3}{32}=\frac{\pi^3}{2^5}$$

を得る． $\square$

6　まとめ

本論文で得られた計算結果を箇条書きの形でまとめておく．

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ の k 次合成積は

$$f_k(x) = \frac{k\pi^{k-1}}{x^2+k^2}$$

と計算することができた．一見，合成積の計算に正則関数は無縁のように見えるが，定理 7 を用いることによりフーリエ変換と整関数が合成績の計算に有用であることがわかった．

2. ポアソンの和公式を用いて

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^4} = \frac{\pi^4(\cos(2\pi\tau)+2)}{3\sin^4(\pi\tau)}$$

を求め，これらの等式を用いてゼータ関数の偶数特殊値

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

を導くことができた．$\zeta(6), \zeta(8), \ldots$ などの他の偶数特殊値も同様に求めることができる。

3. いくつかの無限和公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)^3} = \frac{4\sqrt{3}}{243}\pi^3 = \frac{4\sqrt{3}}{3^5}\pi^3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)^3} = \frac{\pi^3}{32} = \frac{\pi^3}{2^5}$$

を以下の等式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^3} = \frac{\pi^3\cos(\pi\tau)}{\sin^3(\pi\tau)}$$

に $\tau = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ を代入し，求めることができた．$\zeta(3)$ の特殊値は現在わかっていないが，$\zeta(3)$ の特殊値を求める際にこのような考え方が役にたてば嬉しい．

本論文を通し，フーリエ変換と正則関数の関係について考えてきて，当初は $\mathcal{L}$ の振る舞いを正則関数を用いて理解することを目的としていたが，十分な結果を得ることができなかった．そこで $\mathcal{L}$ の複雑さ，難しさというものを実感した．一般の L^1 関数のフーリエ変換に対してフーリエ逆変換やポアソンの和公式を適用するにはいくつかの条件が必要で扱いにくい．そこでよい性質をもつ正則関数の関数族 $\Im$ を考えると，複素解析的な手法が使えるようになり，フーリエ逆変換公式やポアソン和式の証明が比較的容易にでき，$f \in \Im$ ならば公式が適用できるのでとても扱いやすい．このことから複素関数論の他分野への有用性がよくわかった．今後はもっとフーリエ変換の基礎知識を固め，$\mathcal{L}$ の振る舞い，他の関数族に対するフーリエ変換について勉強していきたい．

最後に，1 年間ご指導してくださった西山先生，一緒に頑張った研究室の仲間に深く感謝を申し上げる．

参考文献

[1] E.M. スタイン，R シャカルチ（新井仁之他訳），「複素解析」，日本評論社，2009.

[2] K,Chandresekharan，Classical Fourier Transforms，Springer-Verlag，1987.

[3] Elias M. Stein, Guido Weiss, Introduction to FORIER ANALYSIS ON EUCLIDEAN SPACES， Princeton University Press， 1971.

[4] 志賀徳造,「ルベーグ積分から確率論」，共立出版，2000.

[5] 伊藤清三,「ルベーグ積分入門」，裳華房，1963.