偏角の原理と複素対数を用いた複素積分

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科
学籍番号：15112057 西山研究室
鈴木　遊

平成 28 年 2 月 19 日

目 次

1　序論

卒業研究の目的は、偏角の原理と複素対数関数についての理解を深め、その応用として複素積分の計算をすることである。私が研究テーマを選んだ動機は、輪講で使用したスタインとシャカルチによる教科書 [1] を読み進めていて複素対数と偏角の原理に興味を持ったからである。応用として複素積分の計算を行うことが目標である。

偏角の原理とは、対数微分の積分によって有理型関数の零点と極の個数の差を表す公式である。ただし、零点と極は重複度を込めてその個数を数える。

複素対数は、正の実数に対して定義された通常の対数関数の解析接続であるが、素朴に考えると、零ではない複素数 $z = re^{i\theta}$ に対し、対数を定義したいならば $\log z = \log r + i\theta$ とおけばよい。しかしここで問題となるのが、θ が 2π の整数倍の差を除いて決まることであり、対数関数は無限多価性を持っている。この問題を解決するためには分枝の選択を行う必要がある。分枝とは、対数を一価正則関数として定義するために、定義域を制限してできる関数のことであるが、これは§4で詳しく説明する。

以下の６つの積分公式がこれらの研究を行う過程で計算した結果である。

1. 複素数 $a, b, c \in \mathbb{C}$ に対して γ を $\triangle abc$ の周、$p(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ とするとき $\displaystyle\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}dz = \pi i.$

2. 1. と同じ記号を使い、さらに $\triangle abc$ の内角を $\angle a = \theta_a, \angle b = \theta_b, \angle c = \theta_c$ とすると、$\displaystyle\int_\gamma z^k \frac{p'(z)}{p(z)}dz = a^k\theta_a + b^k\theta_b + c^k\theta_c.$

   偏角の原理の応用として初等幾何と関連付けた結果である。単純閉曲線の極限で、三角形を近似することによって証明することができることがわかった。

3. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$

   留数公式を用いてこの等式を証明できるということがわかった。

4. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\log(a+z)}{z}dz = 2\pi i \log a \quad (\Re a > 0, |a| > 1).$

5. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\log|a+z|}{z}dz = 0 \quad (|a| \leq 1).$

6. Γ_1, Γ_2 を単位円とすると、

$$\int_{\Gamma_2}\int_{\Gamma_1} \frac{\log|1+z+w|}{zw} dzdw = -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

この等式については [2] の論文を参考にして計算したが、論文の証明方法とは別の証明を与えた。

今後の課題としては、主結果の６つ目の式で、積分範囲を変えた式を計算することである。すなわち、原点中心の単位円のうち、上半平面にある部分の半円を Γ'_1, Γ'_2 としたとき、

$$\int_{\Gamma'_2}\int_{\Gamma'_1} \frac{\log|1+z+w|}{zw} dzdw = \frac{14}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

が成り立つことを示すことである。[2, 式 (b),　p.553]

2　偏角の原理

2.1　偏角の原理

定義 1 (有理型関数). 開集合 Ω 内で極をもち、極を除いて正則な関数である。

定理 1 (偏角の原理). $f(z)$ は、複素平面内の単純閉曲線 C とその内部を含む開集合上で有理型であるとする。$f(z)$ が C 上に極も零点も持たないならば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (C \text{ 内の零点の個数}) - (C \text{ 内の極の個数})$$

が成り立つ。ただし、C 内の零点と極は重複度を込めて数える。

[**証明**]. f が正則で、z_i において位数 $n_i (1 \leq i \leq N)$ の零点をもつならば、

$$f(z) = (z - z_i)^{n_i} g(z) \quad (n_i \neq 0)$$

と書ける。ここで $g(z)$ は正則かつ $g(z_i) \neq 0$ である。すると、

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_i (z-z_i)^{n_i - 1} g(z) + (z-z_i)^{n_i} g'(z)}{(z-z_i)_i^n} = \frac{n_i}{z - z_i} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

と計算できるが、これによって $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ は $f(z)$ の零点 z_i で 1 位の極をもち、留数は n_i となることがわかる。

$f(z)$ が w_j において位数 $m_j(1 \leq j \leq M)$ の極をもつときは、n_i の代わりに $-m_j$ を考えて同様に計算すれば良い。w_j で 1 位の極をもち留数は $-m_j$ となる。

$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ は他に極を持たないので、留数公式より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{N} n_i - \sum_{j=1}^{M} m_j$$

と計算できる。 □

偏角の原理の計算例を挙げよう。

例 1. 有理関数

$$f(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \quad (p(z), q(z) : \text{多項式})$$

を十分半径の大きい円周 C 上に沿って積分することを考える。$\deg p, \deg q$ を $p(z), q(z)$ の次数とすると $f(z)$ の零点は $q(z)$ の零点であり、その個数は $\deg q$ 個, 極は $p(z)$ の零点で、その個数は $\deg p$ 個である。従って偏角の原理を用いて

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(\deg q - \deg p)$$

と表すことができる。

例 2. 正接関数 $f(z) = \tan z$ を中心が実軸上にある円周 C に沿って積分することを考える。$f(z)$ の零点は $z = n\pi$、極は $z = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (n, m : \text{整数})$ となるので、C の位置によって次の 3 つの値が得られる。

$$\int_C \frac{(\tan z)'}{\tan z}dz = \pm 2\pi i, \text{または } 0.$$

$f(z)$ の零点と極は交互に並んでおり、C の囲む実区間内において零点の個数が極の個数より 1 個多い場合は $2\pi i$, 極の個数が零点の個数より 1 個多い場合は $-2\pi i$, 零点と極の個数が等しい場合は 0 となる。

2.2 偏角の原理に関連する定理

偏角の原理の応用として、３つの定理を紹介する。

定理 2 (ルーシェの定理). f と g は、円周 C とその内部を含むある開集合上で正則とする。このとき、

$$|f(z)| > |g(z)| \quad (\forall z \in C)$$

ならば、f と $f+g$ は円周 C の内部に同じ個数の零点をもつ。

[**証明**]. $t \in [0,1]$ に対し

$$f_t(z) = f(z) + tg(z)$$

と定義すると、$f_0 = f$ および $f_1 = f+g$ である。n_t を円周内における f_t の重複度を込めた零点の個数（整数）とする。$z \in C$ に対して $|f(z)| > |g(z)|$ であるという条件より f_t は円周上に零点をもたない。

偏角の原理より

$$n_t = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_t'(t)}{f_t(t)}dz$$

が得られる。

n_t が定数であることを示すために、まず n_t が t に関して連続な関数であることを示す。$\dfrac{f_t'(z)}{f_t(z)}$ は $t \in [0,1]$ と $z \in C$ の 2 変数に関して連続である。実際この連続性は、分子と分母がそれぞれ連続であることと C 上で $f_t = 0$ とはならないことより得られる。よって、結合した変数に関して連続であることから n_t が連続であることがわかる。

積分の連続性を利用して n_t が定数であることを示そう。仮に n_t が定数でなければ、中間値の定理によりある $t_0 \in [0,1]$ で n_{t_o} が整数ではないものが存在する。これは、任意の t に対して n_t が整数であるという事実に矛盾する。

最後に、n_t は定数なので $n_0 = n_1$ となって $f_0(z) = f(z)$ と $f_1(z) = f(z) + g(z)$ の零点の個数は一致する。 $\square$

定理 3 (開写像定理). f が領域 Ω において正則かつ定数でないならば、開写像である。

[**証明**]. ルーシェの定理を用いて示すことができる。[1] の p.91-92, 定理 4.4 の証明参照。 $\square$

定理 4 (最大値の原理). f を領域 Ω における定数ではない正則関数とするとき、f は Ω で最大値をとらない。

[**証明**]. f が正則であるという仮定より、開写像定理を用いて示すことができる。[1] の p.92 定理 4.5 の証明参照。 □

2.3 偏角の原理を用いた積分

例 1 と例 2 では偏角の原理の簡単な応用例を挙げたが、ここで初等幾何学と関連して少し発展的な積分をしよう。

定理 5. $a, b, c \in \mathbb{C}$ を複素数として γ を $\triangle abc$ の周とする。また $p(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$ を $\triangle abc$ に付随して決まる多項式とすると

$$\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \pi i$$

が成り立つ。

[**証明**]. $p(z)$ を微分して

$$p'(z) = (z-a)(z-b) + (z-b)(z-c) + (z-c)(z-a).$$

三角形の内角 $\angle a, \angle b, \angle c$ をそれぞれ $\theta_a, \theta_b, \theta_c$, 外角を $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ とする。積分路を

$$C_\epsilon = C_\epsilon(a) + \Gamma_1 + C_\epsilon(b) + \Gamma_2 + C_\epsilon(c) + \Gamma_3$$

とする。但し、Γ_1 は辺 ab から、a を中心に ϵ, b を中心に ϵ の半径の円内の点を除いた部分であるとする。すなわち、$\Gamma_1 = \{a + t(b-a) \quad (\epsilon < t < 1-\epsilon)\}$ で表される。Γ_2, Γ_3 は、それぞれ辺 bc、辺 ca について Γ_1 と同様に表すとする。$C_\epsilon(a)$ は、a を中心とする半径 ϵ の円周のうち $\triangle abc$ 内にある円弧であるとする。また、他の頂点についても同様にして $C_\epsilon(b), C_\epsilon(c)$ とする。

$$\begin{aligned}
&\int_{C_\epsilon} \frac{p'(z)}{p(z)} dz \\
&= \int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3} \frac{p'(z)}{p(z)} dz + \int_{C_\epsilon(a)} \frac{p'(z)}{p(z)} dz + \int_{C_\epsilon(b)} \frac{p'(z)}{p(z)} dz + \int_{C_\epsilon(c)} \frac{p'(z)}{p(z)} dz
\end{aligned}$$

の積分について考える。C_ϵ 上の積分を $\epsilon \to 0$ の極限で

$$\int_{C_\epsilon} \frac{p'(z)}{p(z)} dz \to 0$$

となることより、γ 上の積分を得ることができる。

まず、頂点 a の時計まわりの積分を考える。ここで積分の向きに注意する。

$$-\int_{C_\varepsilon(a)}\frac{p'(z)}{p(z)}dz=\int_{\varphi_a}^{\varphi_a+\theta_a}\frac{p'(a+\varepsilon e^{i\theta})}{p(a+\varepsilon e^{i\theta})}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta \tag{1}$$

であるが,

$$\begin{aligned}
&\frac{p'(a+\varepsilon e^{i\theta})}{p(a+\varepsilon e^{i\theta})}\\
&=\frac{\epsilon e^{i\theta}(a-b+\varepsilon e^{i\theta})+(a-b+\varepsilon e^{i\theta})(a-c+\varepsilon e^{i\theta})+\varepsilon e^{i\theta}(a-c+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}(a-b+\varepsilon e^{i\theta})(a-c+\varepsilon e^{i\theta})}\\
&=\frac{1}{a-c+\varepsilon e^{i\theta}}+\frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}}+\frac{1}{a-b+\varepsilon e^{i\theta}}
\end{aligned}$$

なので,

$$((1)\text{ 式})=i\varepsilon\int_{\varphi_a}^{\varphi_a+\theta_a}e^{i\theta}\left(\frac{1}{a-c+\varepsilon e^{i\theta}}+\frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}}+\frac{1}{a-b+\varepsilon e^{i\theta}}\right)d\theta$$

となる。$\varepsilon\to 0$ とすると

$$\int_{\varphi_a}^{\varphi_a+\theta_a}\frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{a-c+\varepsilon e^{i\theta}}d\theta\to 0\qquad\int_{\varphi_a}^{\varphi_a+\theta_a}\frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{a-b+\varepsilon e^{i\theta}}d\theta\to 0$$

となるので

$$\int_{\varphi_a}^{\varphi_a+\theta_a}\frac{p'(a+\varepsilon e^{i\theta})}{p(a+\varepsilon e^{i\theta})}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\to i\theta_a\quad(\epsilon\to 0)$$

となる。従って、

$$\therefore\quad\int_{C_\varepsilon(a)}\frac{p'(z)}{p(z)}dz=-i\theta_a$$

であることがわかる。他の 2 頂点 b,c に対しても同様に計算すると

$$\begin{aligned}
&\int_{C_\epsilon(b)}\frac{p'(z)}{p(z)}dz\to -i\theta_b\\
&\int_{C_\epsilon(c)}\frac{p'(z)}{p(z)}dz\to -i\theta_c\quad(\epsilon\to 0)
\end{aligned}$$

となる。

$$\therefore\quad\int_\gamma\frac{p'(z)}{p(z)}dz=i(\theta_a+\theta_b+\theta_c)=\pi i$$

である。 □

偏角の原理はγが$\triangle abc$を含むような経路の積分$\displaystyle\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}dz$が(零点の個数)$\times 2\pi i = 6\pi i$であることを意味しているが、この積分計算を3つの零点が積分経路上にある場合に拡張できた。

この定理の更なる一般化として次の定理が得られる。

定理 6. $\triangle abc$の内角をそれぞれ$\angle a = \theta_a, \angle b = \theta_b, \angle c = \theta_c$とし、$p(z)$を(1)式で定義する。このとき

$$\int_\gamma z^k \frac{p'(z)}{p(z)}dz = i(a^k\theta_a + b^k\theta_b + c^k\theta_c)$$

が成り立つ。また、積分を使って内角は

$$\theta_a = \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\int_\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & b & c \\ z^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \cdot \frac{p'(z)}{p(z)}dz \tag{2}$$

と表される。θ_b, θ_cについても同様である。

[**証明**]. $\displaystyle\int_\gamma z^k \frac{p'(z)}{p(z)}dz = i(a^k\theta_a + b^k\theta_b + c^k\theta_c)$は定理5の証明の方針で示すことができるので、省略する。((2) 式) を示す。まず、

$$\int_\gamma z^k \frac{p'(z)}{p(z)}dz = i(a^k\theta_a + b^k\theta_b + c^k\theta_c) = I_k$$

が成り立つことにより連立一次方程式

$$\begin{cases} \theta_a + \theta_b + \theta_c = I_0 \\ a\theta_a + b\theta_b + c\theta_c = I_1 \\ a^2\theta_a + b^2\theta_b + c^2\theta_c = I_2 \end{cases}$$

が成り立つ。これを行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

となる。クラーメルの公式を適用することにより

$$\theta_a = \frac{\begin{vmatrix} I_0 & 1 & 1 \\ I_1 & b & c \\ I_2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\int_\gamma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & b & c \\ z^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \cdot \frac{p'(z)}{p(z)}dz$$

である。 $\square$

3 留数公式を用いた複素積分

この章では、留数解析を用いた複素対数を含む積分計算をいくつか紹介する。

3.1 留数公式

まずは留数公式を紹介する。

定理 7 (留数公式). f は $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線 γ とその内部を含むある開集合上で、γ 内の極 $z_1, ..., z_N$ を除き正則とする。このとき

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}_{z_k} f$$

が成り立つ。但し、$\mathrm{Res}_{z_k} f$ は $f(z)$ の $z = z_k$ における留数を表す。

証明は [1] の p.76-78 参照。

3.2 留数公式を用いた複素積分

この節では、まず対数関数を含む積分を留数解析を用いて計算することを考える。

定理 8. 正の実数 $a > 0$ に対して

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \log a.$$

[**証明**]. 積分は実積分だが、まず複素関数として

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2 + a^2} = \frac{\log z}{(z + ia)(z - ia)}$$

を考える。$\log z$ の分枝は主分枝をとる（§4.1 参照)。$f(z)$ は $z \neq 0$ において 1 位の極 $z = \pm ia$ をもつ。積分路 C として

- 上半平面内の原点を中心とした大きな半円 C_R
- 実軸上の線分 $\gamma_1 = [-R, -\epsilon]$
- 上半平面内の原点を中心とした小さな半円 C_ϵ
- 実軸上の線分 $\gamma_2 = [\epsilon, R]$

を考えると、積分は

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{C_\epsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

となるが、左辺の値は留数公式より

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \left(\lim_{z \to ia} (z - ia) \frac{\log z}{(z + ia)(z - ia)} \right) = \frac{\pi}{a} \left(\log a + \frac{\pi i}{2} \right)$$

となる。C_R 上の積分を評価すると、

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| = \left| \int_{C_R} \frac{\log z}{z^2 + a^2} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{\log(Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^2 + a^2} Rie^{i\theta} d\theta \right|$$
$$\leq \int_0^\pi \left| \frac{\log Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^2 + a^2} \right| |Re^{i\theta}| d\theta$$
$$\leq \int_0^\pi \frac{\log |R| + |i\theta|}{R^2 + a^2} R d\theta < \int_0^\pi \frac{\log |R| + |\theta|}{R} d\theta \to 0 \quad (R \to \infty)$$

となることより、C_R 上の積分は $R \to \infty$ のとき 0 に収束する。同様に、C_ϵ 上の積分を評価すると、

$$\left| \int_{C_\epsilon} f(z)dz \right| = \left| \int_{C_\epsilon} \frac{\log z}{z^2 + a^2} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{\log(\epsilon e^{i\theta})}{(\epsilon e^{i\theta})^2 + a^2} \epsilon i e^{i\theta} d\theta \right|$$
$$\leq \epsilon \int_0^\pi \frac{\log |\epsilon| + \theta}{\epsilon^2 + a^2} d\theta \to 0 \quad (\epsilon \to 0)$$

となることより、C_ϵ 上の積分は $\epsilon \to 0$ のとき 0 に収束する。

γ_1 上の積分を変形すると

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz$$
$$= \int_{-R}^{-\epsilon} f(x)dx = \int_\epsilon^R f(-x)dx = \int_\epsilon^R \frac{\log(-x)}{(-x)^2 + a^2} dx$$
$$= \int_\epsilon^R \frac{\log(xe^{i\pi})}{(-x)^2 + a^2} dx$$
$$= \int_\epsilon^R \frac{\log x + i\pi}{x^2 + a^2} dx \quad (\text{主分枝のとり方より})$$

となり、γ_1 上と γ_2 上の積分の和を考えると

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\
&= \int_{\epsilon}^{R} \frac{\log x + i\pi}{x^2+a^2}dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{\log x}{x^2+a^2}dx \\
&= 2\int_{\epsilon}^{R} \frac{\log x}{x^2+a^2}dx + i\pi \int_{\epsilon}^{R} \frac{1}{x^2+a^2}dx \\
&\to 2\int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2}dx + i\pi \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}dx \quad (R\to\infty, \epsilon\to 0)
\end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、$\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}$ より

$$i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}dx = i\pi\left(\frac{\pi}{2a}\right) = \frac{\pi^2 i}{2a}$$

となる。

$$2\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{a}\left(\log a + \frac{\pi i}{2}\right) - \frac{\pi^2 i}{2a} = \frac{\pi \log a}{a},$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}\log a.$$

□

留数解析の他の応用として、$\sin z$ の部分分数展開公式も示してみよう。

定理 9. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$

[**証明**]. 複素数 $u \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ を 1 つ固定して、整数 $N \geq |u|$ をとり、$R_N := N + \frac{1}{2}$ とおく。円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R_N\}$ 上で $f(z) = \dfrac{\pi \cot \pi z}{(u+z)^2}$ を z について積分し、f の円周内の留数の和を計算し、$N \to \infty$ の極限をとることにより証明する。

$f(z) = \dfrac{\pi \cos \pi z}{(u+z)^2 \sin \pi z}$ は $z = -u$ と $z = n \in \mathbb{Z}$ で極をもつ。それぞれの場合について留数を計算する。

- $z = -u$ の場合 : 2 位の極をもつ。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f; -u) &= \lim_{z\to -u} \frac{d}{dz}\left((u+z)^2 \frac{\pi \cot \pi z}{(u+z)^2}\right) \\
&= \lim_{z\to -u}\left(-\frac{\pi}{\sin^2 \pi z}\right) = -\frac{\pi^2}{(\sin \pi u)^2}.
\end{aligned}$$

- $z=n$ の場合 : 1 位の極をもつ。

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f;n) &= \lim_{z\to n}(z-n)\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2} = \lim_{z\to n}\frac{\pi(z-n)}{\sin\pi z}\cdot\lim_{z\to n}\frac{\cos\pi z}{(u+z)^2}\\ &= (-1)^n\cdot\frac{(-1)^n}{(u+n)^2} = \frac{1}{(u+n)^2}.\end{aligned}$$

留数公式を適用すると

$$\int_{|z|=R_N} f(z)dz = \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{(u+n)^2} - \frac{\pi^2}{(\sin\pi u)^2} \tag{3}$$

となる。次に $\displaystyle\int_{|z|=R_N} f(z)dz$ の積分を評価して、$N\to\infty$ のとき 0 に収束することを示す。ここで、

$$\left|\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}\right| = \frac{\sqrt{\cos^2(\pi x)+\cosh^2(\pi y)}}{\sqrt{\sin^2(\pi x)+\sinh^2(\pi y)}}\frac{\pi}{|u+z|^2} \sim \frac{\pi}{|z|^2} \quad (|z|\gg 0)$$

となることを利用すると

$$\begin{aligned}&\left|\int_{|z|=R_N}\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}dz\right| \le \int_{|z|=R_N}\left|\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}\right||dz|\\ &\sim \int_{|z|=R_N}\frac{\pi}{|z|^2}|dz| \sim \frac{2\pi^2 R_N}{R_N^2} = \frac{2\pi^2}{R_N} \longrightarrow 0 \quad (N\to\infty)\end{aligned}$$

となることがわかる。したがって、

$$\int_{|z|=R_N}\frac{\pi\cot\pi z}{(u+z)^2}dz \longrightarrow 0 \tag{4}$$

となることがわかった。式 (2) と (3) より

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(u+n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin\pi u)^2}$$

が成り立つことがわかる。 □

4　複素対数を含む積分

4.1　分枝

零ではない複素数 $z = re^{i\theta}$ に対し、指数関数の逆関数として対数関数を定義したいのならば、素朴に考えると

$$\log z = \log r + i\theta$$

とおけばよい。$\log r$ は通常の自然対数を表す。ここで問題となるのが、θ が 2π の整数倍の差を除いてしか決まらないことである。この理由によって対数関数は ∞ 多価関数となる。この問題を解決するため、分枝を考える。**分枝**とは対数を一価正則関数として定義するために、定義領域を制限してできる関数のことである。また、領域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, -\pi < \arg z < \pi\}$ において

$$\log(z) = \log|z| + (\arg z)i \quad (-\pi < \arg z < \pi)$$

と表される関数を特に**主分枝**という。一般の領域については次の定理が成り立つ。

定理 10. 単連結領域 Ω であって，$1 \in \Omega, 0 \notin \Omega$ となるものを考える．このとき Ω 上の正則関数 $F(z)$ であって，

(i) F は Ω で正則

(ii) $\forall z \in \Omega$ に対して $e^{F(z)} = z$

(iii) r が実数で 1 に近いとき $F(r) = \log r$

となるものが唯一つ存在する。これを $F(z) = \log_{\Omega}(z)$ と書いて、Ω 上の主分枝と呼ぶ。

証明は [1] の p.98 定理 6.1 参照。

4.2　複素対数関数を含む複素積分の計算

定理 11. $\log(z)$ を主分枝とすると $\Re a > 0, |a| > 1$ に対して

$$\int_{|z|=1} \frac{\log(a+z)}{z} dz = 2\pi i \log a$$

が成り立つ。

[**証明**]. 被積分関数を次のように変形する。

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}\log(a+z) &\overset{☆}{=} \frac{1}{z}\left(\log a + \log(1+\frac{z}{a})\right)\\ &= \frac{1}{z}\left(\log a + \frac{z}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \cdots\right)\\ &= \frac{1}{z}\log a - \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a^2}\right) + \cdots .\end{aligned}$$

ここで、等式 (☆) においては

$$\log(z\cdot w) = \log z + \log w \quad (-\pi < \arg z + \arg w < \pi)$$

となることを使った。そのために $\Re a > 0, |a| > 1$ が必要である。$\frac{1}{z}\log a$ は $z=0$ において 1 位 の極をもち、留数は $\log a$ である。よって留数公式を適用することにより、

$$\int_{|z|=1} \frac{\log(a+z)}{z} dz = 2\pi i \log a$$

となる。 □

注意 1. $\log z$ の分枝をうまく選べば一般の $|a| > 1$ に対しても同様に計算できる。

定理 12.

$$\int_{|z|=1} \frac{\log|a+z|}{z} dz = 0 \quad (|a| \leq 1).$$

[**証明**]. $|a| < 1$ の場合：

$$\begin{aligned}&\int_{|z|=1} \frac{\log|a+z|}{z} dz\\ &= \int_{|z|=1} \frac{\log|z|\left|\frac{a}{z}+1\right|}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{\log|az^{-1}+1|}{z} dz.\end{aligned} \tag{5}$$

ここで $w = z^{-1}$ と変数変換すると $\dfrac{dz}{z} = w\cdot\dfrac{d\left(\frac{1}{w}\right)}{dw}dw = -\dfrac{1}{w}dw$ と表されることにより

$$((5)\ 式) = \int_{|w|=1} \frac{\log|1+aw|}{w} dw$$

となる。ここで $w = e^{i\theta}$ と置き換えると、

$$\int_{|w|=1} \frac{\log(1+aw)}{w} dw = i \int_0^{2\pi} (\log|1+ae^{i\theta}| + (\arg(1+ae^{i\theta}))i) d\theta$$

と表され、この積分の

$$\text{実部が} - \int_0^{2\pi} \arg(1+ae^{i\theta}) d\theta, \text{虚部が} \int_0^{2\pi} \log|1+ae^{i\theta}| d\theta$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+aw)}{w} &= -\frac{1}{w}\left(-aw + \frac{(aw)^2}{2} - \frac{(aw)^3}{3} + \cdots\right) \\ &= a - \frac{a^2}{2}w + \frac{a^3}{3}w^2 - \cdots \end{aligned}$$

となり、$\dfrac{1}{w}\log(1+aw)$ は単位円内部で正則関数であることがわかる。よってコーシーの積分定理より

$$\int_{|w|=1} \frac{\log(1+aw)}{w} dw = 0$$

となる。すなわち、この積分の実部と虚部も 0 になることがわかる。

$$\therefore \quad \int_{|z|=1} \frac{\log|a+z|}{z} dz = 0 \quad (|a| \leq 1).$$

$\square$

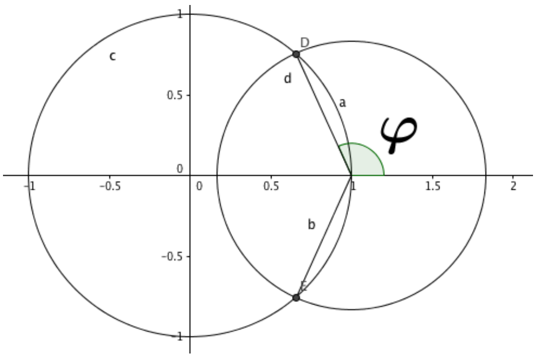
定理 13. Γ_1, Γ_2 を単位円とすると、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &-2 \int_{\Gamma_2} \int_{\Gamma_1} \frac{\log|1+z+w|}{zw} dz dw \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(3 + 2\cos x + 2\cos y + 2\cos(x-y)) dx dy \\ &= 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n^2} = 4\sqrt{3}\pi \left(1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - \cdots\right). \end{aligned}$$

[**証明**]. 最初の積分は Γ_1, Γ_2 をパラメータ表示して計算すると、

$$I = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|1 + e^{ix} + re^{iy}| dx dy \quad (0 < r < 1)$$

となる。定理 12 より、$|1+re^{iy}| \leq 1$ となるとき x の積分は 0 となる。また、定理 11 より $|1+re^{iy}| > 1$ となるとき x の積分は $2\pi \log|1+re^{iy}|$ となる。$|1+re^{iy}| > 1$ を満たす y の範囲を $-\varphi < y < \varphi$ とする。



ここで、$r<1$ のときテイラー展開をすると

$$\log(1+re^{iy})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(re^{iy})^n}{n}$$

が得られる。これを用いて y の積分を計算すると

$$\begin{aligned}4\pi\int_{-\varphi}^{\varphi}\log(1+re^{iy})dy&=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}\int_{-\varphi}^{\varphi}e^{iny}dy\\&=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2r^n\sin(n\varphi)}{n^2}\end{aligned}\tag{6}$$

となることがわかる。

ここで $r\to 1$ とすると、$\varphi=\frac{2}{3}\pi$ となることより

$$((6)\text{ 式})\longrightarrow 8\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(\frac{2}{3}\pi n)}{n^2}=8\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n^2}$$

となり、定理が示された。 □

5 まとめと今後の展望

卒業研究の主結果としては序文にまとめてある 6 つの積分計算である。ただ積分計算を行っただけではなく、偏角の原理や複素対数についての理解を深めることができた。いくら計算しても理想の答えに行き着かなかったり、計算する上での解法の方針がなかなか思いつかなかったりと苦労した。大学に入学し、数々の数学の講義を受講した中で複素関数論に興味を持った。研究室に配属されてからの 1 年間、複素関数論のことを学ぶことができて良かったと思う。

今後の課題としては、主結果の６つ目の式の積分範囲を変えた式を計算することである。すなわち、上半平面上にある半径１の半円をΓ'_1, Γ'_2としたとき、

$$\int_{\Gamma'_2}\int_{\Gamma'_1} \frac{\log|1+z+w|}{zw} dzdw = \frac{14}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

が成り立つことを示すことである。[2, 式 (b), p.553]

最後に、卒業研究を進めるにあたり、西山教授には丁寧かつ熱心なご指導を頂きました。心より感謝致します。また、1 年間をともに過ごした西山研究室の皆様に感謝致します。

参考文献

[1] E. M. スタイン, R. シャカルテ (新井仁之他訳)『複素解析』日本評論社, 2009.

[2] David Borwein, Integrals Arising from a Plane Ramdom Walk, American Math. Monthly, 121(2014), 553-555.