

複素平面上の平行多角形に付随する多項式の 臨界点と内接楕円について

青山学院大学 理工学部 物理数理学科
西山研究室 15112085

中村 邑仁

2016年2月17日

Contents

1	動機と研究概要	3
2	複素平面上の三角形に関する Marden の定理	4
2.1	Gauss の定理と Marden の定理	4
2.2	Marden の定理の証明	5
2.3	Marden の定理の応用	6
3	多角形への一般化	8
3.1	四角形	8
3.2	六角形	10
3.3	五角形	15
4	あとがき	16
4.1	あとがき	16

1 動機と研究概要

卒業研究では複素関数論を勉強したが、そのなかで複素数を用いて複素平面上の幾何学を考えることに興味を持った。そこで複素平面内の三角形に関する定理である Marden の定理を研究のテーマに選んだ。

Marden の定理を述べるためにまず Gauss の定理について紹介する。 $a, b, c \in \mathbb{C}$ を頂点とする $\triangle abc$ を考える。このとき、 $\triangle abc$ の各辺の midpoint で接する内接楕円 Γ が唯一つ存在する。これが Gauss の定理であって Γ をガウスの楕円とよぶ。

次に Marden の定理 [1], [2] について紹介する。複素数 $a, b, c \in \mathbb{C}$ に対して 3 次の多項式

$$p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$$

を考えると、 $p(z)$ の臨界点、つまり $p'(z) = 0$ となる点は 2 点ある。それを e, f とする。

定理 1 (Marden の定理). 上の設定の下に $p(z)$ の臨界点 e, f は $\triangle abc$ の各辺の midpoint で内接するガウスの楕円 Γ の焦点である。

私はこの Marden の定理に興味を持った。この定理は西山先生から頂いた論文集の中にあつた [1] (原論文は [2]) が、論文を読んでみて証明を理解し、他の多角形について一般化できないのだろうかと考え、本研究に至った。

論文 [1] を参考にしながら複素数の偏角を用いてこの定理の証明を理解した。この証明方法を応用して、ガウスの楕円の 2 つの焦点と各頂点との距離や角度に関する性質を導くこともできる。これらのことは初等幾何学で求めることは難しく、複素数を使うことの利点を理解することができた。

次に多角形について Marden の定理の一般化を考え、まずは四角形から始めた。各辺の midpoint で内接する楕円が存在する四角形は、平行四辺形でなければならないことを西山先生から教えて頂いた。このことによりスムーズに四角形についての一般化を考えることができた。平行四辺形 $abcd$ に付随する多項式

$$p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$$

の臨界点は 3 つ存在する。2 つは三角形のときと同様に各辺の midpoint で内接する楕円の焦点であるが、残りの 1 つは重心であることがわかった。この事実についても三角形の場合と同様に複素数の偏角を用いて証明することができた。

そこで、さらに六角形について考えることにした。六角形の場合も各辺の midpoint で内接する楕円が存在するのは、平行六角形 (本文 p. 9, p. 10 参照) の場合である (と西山先生に教えて頂いた)。平行六角形に付随する多項式は

$$p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)(z - a')(z - b')(z - c')$$

となる。六角形の場合に難しいのは、 $p(z)$ の臨界点が 5 個もあることである。これについては特に工夫して考える必要があり苦労したが、5 つの臨界点がそれぞれどのような点であるのか明らかにすることに成功した。結論から述べると、1 つは重心、2 つは平行六角形の各辺の midpoint で内接する楕円の焦点である。残りの 2 つについても楕円の焦点に関係しているが、詳細については本文 p. 10 を参照してほしい。

このようにして、三角形と四角形、そして六角形については Marden の定理を一般化することができたが、五角形に関しては同様の問題を解決するまでには至らなかった。この論文では問題提起をすることにとどめる。

この論文の構成について簡単に紹介する。まず、2 章では本研究で重要な役割を果たす Gauss の定理と Marden の定理を紹介する。そして Marden の定理の証明、応用へと議論を進める。次に 3 章では Marden の定理の多角形への一般化を考察する。まずは四角形、次に六角形について論じる。そして最後に、未解決のまま残った五角形について問題提起する。最後に 4 章で本研究のまとめを述べ、この論文を終わる。

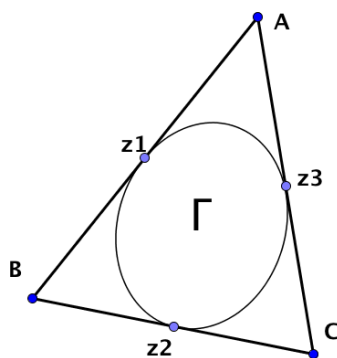
2 複素平面上の三角形に関する Marden の定理

この研究に必要不可欠である定理が 2 つある。Gauss の定理と Marden の定理である。この章ではこの 2 つの定理について紹介し、Marden の定理について複素数を用いて証明する。

2.1 Gauss の定理と Marden の定理

まず、Gauss の定理を紹介しよう。この定理は三角形の内接楕円の存在に関する定理である。

定理 2 (Gauss の定理). $a, b, c \in \mathbb{C}$ を頂点とする三角形 $\triangle abc$ の各辺の midpoint で接する内接楕円 Γ が唯一つ存在する。この Γ をガウスの楕円とよぶ。

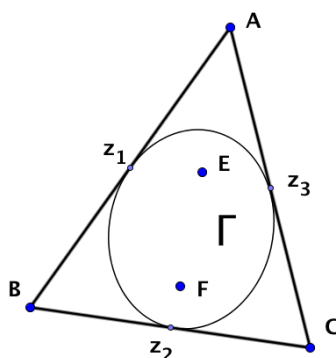


この定理はよく知られているので、例えば [3](定理 5.21) を参照して欲しい。
次に Marden の定理を紹介しよう。

定理 3 (Marden の定理 [2]). 複素数 $a, b, c \in \mathbb{C}$ に対して $\triangle abc$ に付随する 3 次の多項式

$$p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$$

を考えると、 $p(z)$ の臨界点 e, f は $\triangle abc$ に内接するガウスの楕円 Γ の焦点である。



2.2 Marden の定理の証明

この節では Marden の定理を証明する。この証明は [1] を参考にして考えたが、独自の工夫もして、証明を見通しよくしたものである。 \mathbb{C} 上の多項式を

$$p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$$

とする。 $p(z)$ の根 a, b, c からつくられる $\triangle abc$ を考える。 $p(z)$ を微分して

$$p'(z) = (z - a)(z - b) + (z - b)(z - c) + (z - c)(z - a) \quad (1)$$

$$= (z - a)(z - b) + 2(z - c)\left(z - \frac{a + b}{2}\right) \quad (2)$$

$$= 3(z - e)(z - f). \quad (3)$$

ここで $p'(z)$ の根、つまり臨界点を e, f と書いた。このとき a, b の中点を $z_1 = \frac{1}{2}(a + b)$ と書くと、上の計算より

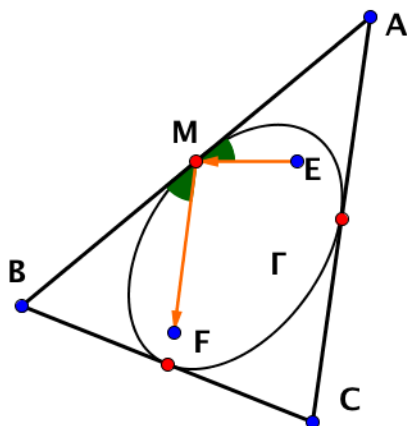
$$p'(z_1) = (z_1 - a)(z_1 - b) = 3(z_1 - e)(z_1 - f), \quad (4)$$

$$\therefore \frac{a - z_1}{e - z_1} = 3 \frac{f - z_1}{b - z_1}.$$

この両辺の偏角を考えると

$$\arg\left(\frac{a - z_1}{e - z_1}\right) = \arg\left(\frac{f - z_1}{b - z_1}\right) \quad (5)$$

がわかる。



$a, b, c, e, f \in \mathbb{C}$ に対応する点をそれぞれ A, B, C, D, E とし、 z_1 に対応する点を M としている。

複素数 z_1 の表す点 (AB の中点) を M とすると、等式 (5) は $\angle EMA = \angle FMB$ を示している。このことはつまり e から出た光が中点 z_1 で接線に関して反射し f を通過することを示している。したがって e, f は楕円の焦点であることがわかる。以上が Marden の定理についての証明である。 (証明終わり)

Marden の定理を多項式の根と臨界点という視点から眺めると次の系を得る。

系 1. 複素数係数の 3 次の多項式 $p(z)$ が重根を持たないとする。このとき、 $p(z)$ の 2 つの臨界点は 3 つの根からつくられる三角形の内部に存在する。

また証明の途中で導出された式 (4) から次のことがわかる。

系 2. $\triangle ABC$ の各辺の中点に内接する楕円 Γ の焦点を E, F , 辺 AB の中点を M とすると

$$3EM \cdot FM = AM \cdot BM = \frac{1}{4}AB^2$$

が成り立つ。

2.3 Marden の定理の応用

この証明と同様の議論で、三角形の頂点と各辺の中点で内接するガウスの楕円 Γ の焦点に関して、以下の結果が得られた。

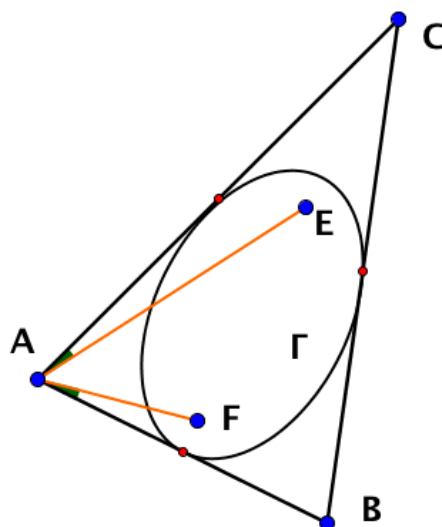
定理 4. $\triangle ABC$ に関するガウスの楕円の焦点を E, F とすると、

$$\angle EAC = \angle FAB$$

が成り立つ。また

$$3EA \cdot FA = BA \cdot CA$$

である。



[証明]. Marden の定理で用いた $p'(z)$ を考える (式 (1) 参照)。

$$p'(a) = (a - b)(a - c) = 3(a - e)(a - f),$$

$$\therefore \frac{c - a}{e - a} = 3 \frac{f - a}{b - a}.$$

等式に表れる複素数の偏角を考えると、

$$\arg\left(\frac{c - a}{e - a}\right) = \arg\left(\frac{f - a}{b - a}\right).$$

これは $\angle EAC = \angle FAB$ を示している。また $(b - a)(c - a) = 3(e - a)(f - a)$ の両辺の絶対値をとると $3EA \cdot FA = BA \cdot CA$ がわかる。□

3 多角形への一般化

Marden の定理を他の多角形に一般化することを考える。このとき問題点は 2 点ある。1 つは、三角形以外の多角形に対して各辺の中点で内接する楕円 Γ が存在するのかという点。2 つ目は多角形に付随する多項式の臨界点の個数が多くなる点である。

1 点目に関しては西山先生に教えて頂いた平行多角形、例えば平行四辺形を考えればよい。証明は Gauss の定理の証明の考え方を使えば解決するはずである ([3] 参照)。

2 点目については平行多角形に付随する多項式の臨界点を求める際に、平行移動や式変形を行うなどの工夫をした。そうすることで、各辺の中点に内接する楕円 Γ の焦点以外にも平行多角形の重心などが表れることがわかった。

3.1 四角形

まずは四角形について一般化することを考える。

定理 5. 四角形において、各辺の中点で内接する楕円 Γ が存在するための必要十分条件は、それが平行四辺形であることである。

証明は [3] の Gauss の定理と同様にすればよい (西山先生より)。

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ に対して平行四辺形 $abcd$ に付随する多項式を

$$p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d) \quad (6)$$

と定義する。

定理 6. 平行四辺形に付随する多項式 $p(z)$ の臨界点は 3 つ存在する。2 つは各辺の中点で内接する楕円 Γ の焦点、1 つは平行四辺形の重心である。

[証明]. 重心を

$$g = \frac{a + b + c + d}{4} = \frac{a + c}{2} = \frac{b + d}{2}$$

とする。 $p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)$ を微分して変形すると、

$$\begin{aligned} p'(z) &= (z - a)(z - b)(z - c) + (z - a)(z - b)(z - d) \\ &\quad + (z - a)(z - c)(z - d) + (z - b)(z - c)(z - d) \\ &= 2(z - a)(z - c)\left(z - \left(\frac{b + d}{2}\right)\right) + 2(z - b)(z - d)\left(z - \left(\frac{a + c}{2}\right)\right) \\ &= 2(z - g)\left((z - a)(z - c) + (z - b)(z - d)\right) \\ &= 4(z - g)(z - e)(z - f). \end{aligned}$$

ここで、 e, f は g 以外の 2 つの臨界点である。最後の式より重心 g が臨界点であることがわかる。さらに同様の変形によって

$$p'(z) = (z - a)(z - b)(2z - (c + d)) + (z - c)(z - d)(2z - (a + b))$$

となる。 a, b の中点を $z_1 = \frac{1}{2}(a + b)$ とすると

$$2z_1 - (c + d) = (a + b) - (c + d) = 4(z_1 - g)$$

であることに注意して、次の式を得る。

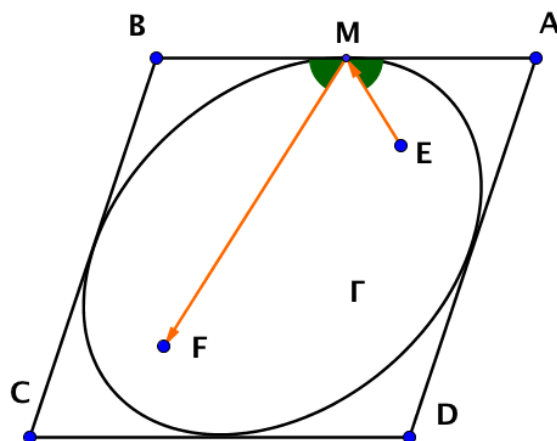
$$p'(z_1) = 4(z_1 - g)(z_1 - a)(z_1 - b) = 4(z_1 - g)(z_1 - e)(z_1 - f),$$

$$\frac{a - z_1}{e - z_1} = \frac{f - z_1}{b - z_1}. \quad (7)$$

式 (7) の両辺の偏角をとると

$$\arg\left(\frac{a - z_1}{e - z_1}\right) = \arg\left(\frac{f - z_1}{b - z_1}\right).$$

中点 z_1 に対応する点を M とする。この等式は図の $\angle EMA = \angle FMB$ を示している。



三角形のときと同様に、これは E を通過した光が M で接線に関して反射し、 F を通過していることを示している。他の中点についても同様である。したがって e, f は楕円 Γ の焦点であることがわかった。□

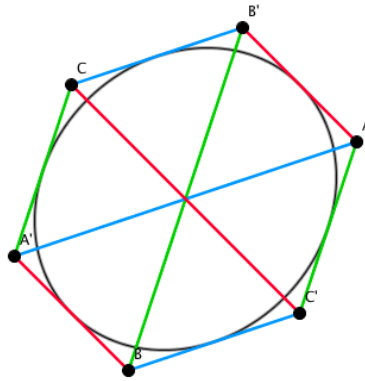
3.2 六角形

次に六角形の場合を考えよう。まず各辺の midpoint で内接する楕円 Γ が存在するような六角形として平行六角形を定義する (下図参照)。平行六角形とは、以下の 2 つの性質をもつ六角形である。

条件 1) $AB' \parallel C'C \parallel BA'$, $BC' \parallel A'A \parallel CB'$, $CA' \parallel B'B \parallel AC'$

ここで $AB' \parallel C'C \parallel BA'$ は辺 AB' と辺 $C'C$ 及び BA' が平行であることを表す。

条件 2) $AB' = A'B'$, $BC' = B'C'$, $CA' = C'A$



定理 7. 六角形において、各辺の midpoint で内接する楕円 Γ が存在するための必要十分条件は、それが平行六角形であることである。

証明は平行四辺形の場合と同じように Gauss の定理の証明のアイデアを使えばよい (西山先生による [3])。

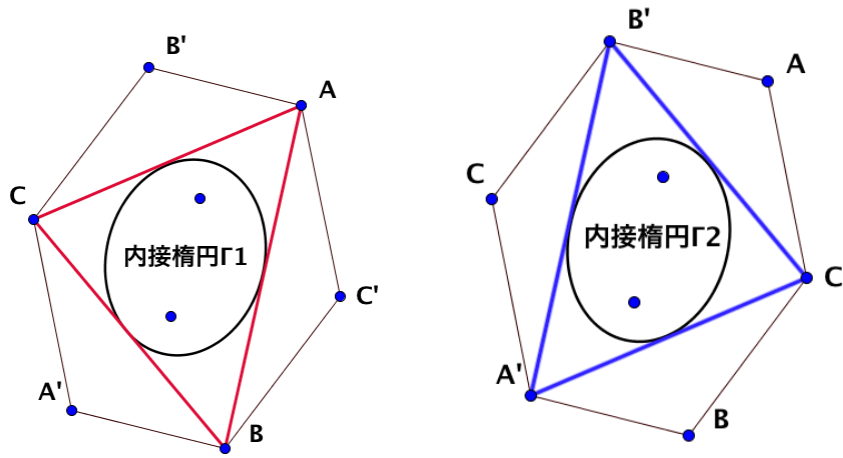
平行六角形に付随する多項式を

$$p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)(z - a')(z - b')(z - c') \quad (8)$$

とする。

定理 8. 上で定義される多項式 $p(z)$ の臨界点は 5 つ存在する。

- (1) 1 つは重心
- (2) 2 つは平行六角形の各辺の midpoint で内接する楕円 Γ の焦点
- (3) 残りの 2 つは、次の 2 つの楕円のどちらにも共通の焦点である。
 - abc の各辺の midpoint で内接するガウスの楕円 Γ_1 の焦点
 - $a'b'c'$ の各辺の midpoint で内接するガウスの楕円 Γ_2 の焦点



[証明]. まず重心 $g = \frac{1}{6}(a + b + c + a' + b' + c')$ を原点に平行移動しても一般性が失われないことを示す。

平行六角形に付随する多項式

$$p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)(z - a')(z - b')(z - c')$$

の z を $-g$ だけ平行移動して $q(z) = p(z + g)$ を考える。

$$q(a) = 0 \iff p(z + a) = 0$$

なので、 $q(z)$ の零点は p の零点を $-g$ だけ平行移動したものである。また、

$$q'(z) = p'(z + g)$$

なので、 q' の臨界点も p' の臨界点を $-g$ だけ平行移動したものに一致する。よって z を $-g$ だけ平行移動しても一般性は失われない。そこで、この証明では重心を原点として考える。

平行六角形の (条件 1)

$$AB' \parallel C'C \parallel BA', \quad BC' \parallel A'A \parallel CB', \quad CA' \parallel B'B \parallel AC'$$

と、対辺の長さが等しいという (条件 2) より以下の式が導かれる。

$$b' - a = a' - b = s(c - c'), \tag{9}$$

$$c' - b = b' - c = t(a - a'), \tag{10}$$

$$a' - c = c' - a = k(b - b'). \tag{11}$$

ただし、 $s, t, k \in \mathbb{R}$ である。まず式 (9)、式 (11) のそれぞれ左辺と中央の辺について考える。

$$(9) \Rightarrow a + a' = b + b', \quad (11) \Rightarrow a + a' = c + c' .$$

これを $g = \frac{1}{6}(a + b + c + a' + b' + c')$ に代入すると $g = \frac{1}{2}(a + a')$ となる。いま重心が原点なので

$$g = 0 \Rightarrow a = -a'$$

となる。同様に $b' = -b, c' = -c$ である。

次に s, t, k を求める。式 (9) と (11) の差を最左辺と最右辺で考えて、 $a = -a'$ などに注意すると

$$-b + c = 2sc - 2kb.$$

b と c は一次独立だから、

$$\therefore s = k = \frac{1}{2}.$$

同様に $t = \frac{1}{2}$ である。以上のことから (9) の左の項と右の項は

$$-a - b = c, \quad \therefore a + b + c = 0$$

を満たす。したがって $a' + b' + c' = 0$ となる。以上より $a' = -a, b' = -b, c' = -c$ なので、 $p(z)$ は

$$p(z) = (z^2 - a^2)(z^2 - b^2)(z^2 - c^2)$$

となる。 $p(z)$ を微分して、

$$p'(z) = 2z(3z^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)z^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2). \quad (12)$$

式 (12) より臨界点の 1 つは $z = 0$ 、つまり重心である。式 (12) の残りの因子

$$3z^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2)z^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \quad (13)$$

を考える。 $ab + bc + ca = r$ と置く。また $a + b + c = 0$ なので

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = -2r, \\ a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 &= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) = r^2 \end{aligned}$$

である。これを用いると式 (13) は

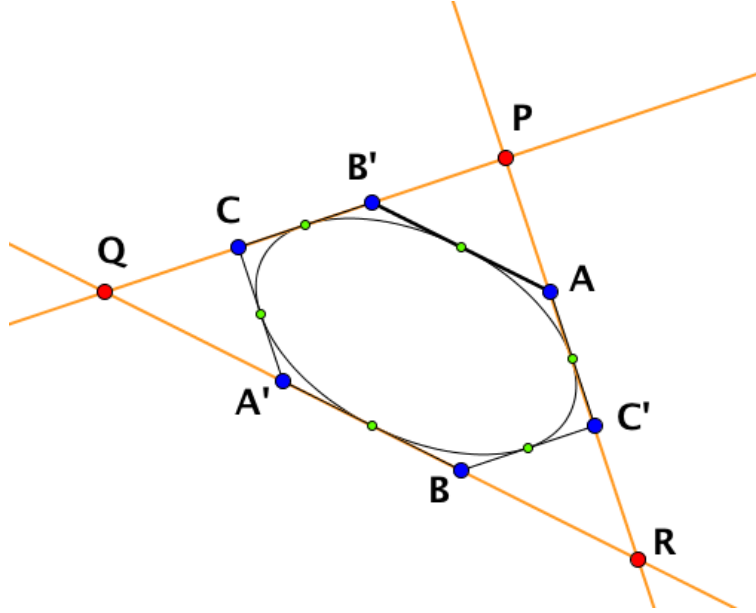
$$3z^4 + 4rz^2 + r^2 \quad (14)$$

と表される。式 (14) の根を求めると、 $\sqrt{-r} = u$ とおいて、

$$z = \pm u, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} u$$

となる。これで重心以外の臨界点が求まった。この4点について考える。

まず辺 $C'A, A'B, B'C$ の延長線の交点 P, Q, R を頂点とする三角形 $\triangle PQR$ について考える。



そこで P, Q, R を求めよう。直線 $C'A$ と直線 CB' の交点が P , 直線 CB' と直線 BA' の交点が Q , 直線 BA' と直線 AC' の交点が R である。これらを式で表すと、

$$P: -c + s(a + c) = -c + t(-b - c) \quad (15)$$

$$Q: -b + m(c + b) = b + n(-a - b) \quad (16)$$

$$R: -a + k(b + a) = a + l(-c - a) \quad (17)$$

$$s, t, m, n, k, l \in \mathbb{R} \quad (18)$$

となる。 $a + b + c = 0$ を用いて、それぞれ変形する。

$$(15) : c(-2 + s) + b(s - t) = 0 \quad \therefore t = s = 2$$

$$(16) : b(-2 + m) + c(m - n) = 0 \quad \therefore m = n = 2$$

$$(17) : a(-2 + k) + b(k - l) = 0 \quad \therefore k = l = 2$$

ここで例えば (15) では c と b が一次独立であることを用いた。以上の結果から

$$P: 2a + c = a - b, \quad Q: 2c + b = c - a, \quad R: 2b + a = b - c$$

である。

次に $\triangle PQR$ の中点を考える。 RP, PQ, QR の中点はそれぞれ

$$\frac{a-c}{2}, \quad \frac{c-b}{2}, \quad \frac{b-a}{2},$$

なので、これら 3 つの中点は平行六角形の中点と一致する。したがって平行六角形の各辺の中点で内接する楕円 Γ は PQR の各辺の中点でも内接している。

$\triangle PQR$ に付随する多項式を

$$h(z) = (z-p)(z-q)(z-r)$$

とする。ここで p, q, r はそれぞれ P, Q, R に対応する複素数である。この $h(z)$ の臨界点を具体的に表してみよう。 $h(z)$ を微分して

$$\begin{aligned} h'(z) &= (z-p)(z-q) + (z-q)(z-r) + (z-p)(z-r) \\ &= 3z^2 - (p+q+r)z + (pq+qr+rp). \end{aligned}$$

ここで $p+q+r, pq+qr+rp$ について考えると、

$$p+q+r = (a-b) + (c-a) + (b-c) = 0$$

$$\begin{aligned} pq+qr+rp &= (a-b)(c-a) + (c-a)(b-c) + (b-c)(a-b) \\ &= ab+bc+ca - (a^2+b^2+c^2) \\ &= 3r \end{aligned}$$

だから

$$h'(z) = 3z^2 + 3r \tag{19}$$

である。式 (19) から $h(z)$ の臨界点は $z = \pm u$ である。平行六角形の各辺の中点で内接する楕円 Γ は PQR の各辺の中点でも内接するから、 $\pm u$ は平行六角形の各辺の中点で内接する楕円 Γ の焦点であることがわかる。

最後に残りの焦点 $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} u$ について考える。平行六角形の頂点の中から a, b, c を選び $\triangle abc$ に付随する多項式を

$$f(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$$

とする。微分して

$$f'(z) = 3z^2 + 2(a+b+c)z + ab+bc+ca,$$

$a + b + c = 0, ab + bc + ca = r$ より

$$f'(z) = 3z^2 + r \quad (20)$$

となる。式 (20) から $f(z)$ の臨界点は $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} u$ であることがわかる。また $a'b'c'$ についても同様に考えると、臨界点はやはり $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} u$ となる。このことから Marden の定理を用いると、 $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} u$ は $\triangle abc$ に関するガウスの楕円 Γ_1 と $a'b'c'$ に関するガウスの楕円 Γ_2 の共通の焦点である。□

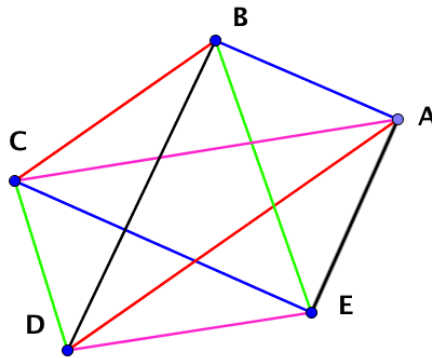
これで平行六角形についても Marden の定理を一般化することができた。

3.3 五角形

最後に五角形への一般化について述べる。残念ながら五角形への一般化は時間の制約があって成功しなかったため、少し問題を整理しておく。五角形の各辺の中点で内接する楕円 Γ が存在するのは平行五角形のみである。平行五角形の条件は少し考える必要があるが、少なくとも

$$AB' \parallel CE, BC \parallel AD, CD \parallel BE, DE \parallel CA, EA \parallel DB$$

でなければならない。



平行五角形に付随する多項式は

$$p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d)(z - e)$$

となり、臨界点は4つ存在する。この内2つは平行五角形の各辺の中点で内接する楕円の焦点で、1つは重心になりそうだが、あと1つはまだ予測がつかない。そこでこれ以降の考察は将来の課題とする。

4 あとがき

4.1 あとがき

英語での論文 [1] を読むことは初めてだったのでとても苦労した。日本語に訳し、それを理解することに時間がかかった。苦労の末、Marden の定理を複素数の計算によって証明することができた。また平行四辺形、平行六角形についても一般化することができた。

特に六角形については 5 個の臨界点のうち 1 つは平行六角形の重心、2 つは平行六角形の各辺の midpoint で内接する楕円の焦点であることは予想していたが、残りの 2 つについては予想していなかった結果であったのでおもしろいと感じた。

時間がなくて五角形への一般化にまでは至らなかったのは残念であるが将来の課題とするので、この論文を読んだ方にはぜひ挑戦してほしい。

最後に卒業研究や論文作成など色々なことを指導してくださった西山先生には感謝したい。また共に頑張ってきた研究室のメンバーにも感謝したい。

参考文献

- [1] E.Badertscher, A Simple Direct Proof of Marden's Theorem, Amer. Math. Monthly 121, (June-July 2014).
- [2] M.Marden, A note on the zeroes of the sections of a partial fraction, Bulletin of the Amer. Math. Society, 51(1945), 935-940.
- [3] 西山 享, 幾何学と不変量, 日本評論社, 2012.
- [4] 矢野 健太郎著, 平面幾何学, 裳華房, 1969.
- [5] 岩田 至康編, 幾何学大辞典, 槇書店, 1982.