複素関数論によるピックの公式の証明

青山学院大学理工学部物理数理学科
学籍番号:15112089 西山研究室

萩原侑

2016 年 2 月 19 日

目次

1　序論

複素平面上の格子を考えたときに、その平面内の多角形で頂点が格子点にあるものは格子多角形と呼ばれる。この格子多角形の面積に関するピックの公式と呼ばれる公式がある。ピックの公式は格子多角形 P の面積を A とすると P の内部の点の数を I、P の辺上の格子点の数を B とおくと、面積 A は

$$A = I + \frac{1}{2}B - 1$$

と表すことができるという公式である。ピックの公式の特徴は、格子多角形の面積がその辺上の格子点の数と内部の格子点の数で求まるところにある。証明にはさまざまな方法があるが、その中の一つに複素関数論を用いた証明がある。私はセミナーで複素関数論を教科書 [2] を通して学んでいたこともあり、本論文では複素関数論を用いてピックの公式を証明してみようと思う。

証明に使われる関数としてワイエルシュトラスの $\wp$ 関数, ζ 関数というものがある。複素平面 $\mathbb{C}$ 内の正方格子を $L = \{m + in | m, n \in \mathbb{Z}\}$ としたとき、$z \in \mathbb{C} - L$ に対して

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{a \in L - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

と定義される複素関数が $\wp$ 関数であり、ζ 関数は

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{a \in L - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-a)} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} \right)$$

と定義される。この ζ 関数は全平面で有理型であって格子 L 上に 1 位の極を持ち、留数が 1 であるという特徴がある。しかし残念ながら L を周期とする二重周期関数ではない。関数 $f(z)$ が周期 1 と i の二重周期関数であるとは

$$f(z) = f(z+i) = f(z+1),$$

または同じことであるが

$$f(z + m + in) = f(z) \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

が成り立つことである。ζ 関数に二重周期性を持たせるためには、ζ と反正則な複素関数との和をとって二重周期性を作り出す必要がある。この部分はピックの公式の証明のための重要なステップである。

証明の過程で用いられるワイエルシュトラスの $\wp$ 関数は ζ 関数とは異なり楕円関数である。楕円関数とは二重周期関数かつ、すべての特異点が極であるような関数 (有理型関数) のことである。二重周期性の証明の方針として、$\zeta'(z) = -\wp(z)$、つまり $\zeta(z)$ か $\wp(z)$ の原子関数であることから、まず $\wp(z)$ の積分を考える。そこから ζ 関数を補正して二重周期関数にすることを試みる。その補正の方法を詳しくみると、ピックの公式の複素関数論的証明において、格子点の数え上げによって面積が求まる理由がわかる。つまり ζ 関数の性質から留数計算を用いることで内部の格子点が数え上げられ、グリーンの定理を用いることで面積 A が現れ、各頂点での線積分を計算することで辺上の格子点が数え上げられるからである。

証明は [3] の第 4 章「複素関数論とピックの公式」の方針に従って、証明の細部を補いつつ、原論文 [1] を読み解くことによって行った。本論文では、この正方格子の場合の証明を平行四辺形状の格子に一般化することを目指す。

一般化する理由は、証明を通して楕円関数への理解を深めること、正方格子の場合に行った ζ 関数の反正則関数で補正することによる二重周期関数の構成、それに伴う困難や解決策の模索をすることにある。結果として、正方格子に付随する ζ 関数の二重周期補正では、$\zeta(z)$ と $-\alpha\bar{z}$ との和をとったのに対し、平行四辺形格子では補正項が

$$\frac{1}{\tau - \overline{\tau}}(\beta - \overline{\tau}\alpha)z + (-\beta + \tau\alpha)\overline{z}$$

となることがわかった。楕円関数の持つ二重周期性は正方格子のときはただ定数倍の反正則関数との和を取ればいいように思えたが、一般化することで実は z と $\overline{z}$ の入り混じった形をとることがわかった。但し、α, β は $\wp$ 関数の周期である。(本文の補題 4.1, 5.1 参照) また、その導出の過程で α, β の関係式 (ルジャンドルの関係式と呼ばれる) が自然に導き出された。これは楕円曲線の周期の間の関係式である。

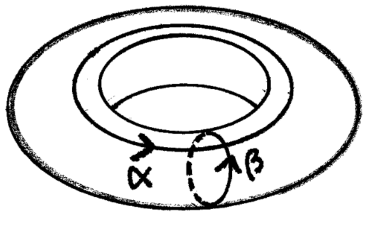


図 1　楕円曲線の周期

本研究では、本来の目的である一般の楕円関数に対する理解を深め、正方格子と平行四

辺形格子に対する楕円関数の振る舞いやそれに対する ζ 関数の補正などの考察を行うことができた。今後の課題は他の観点からの楕円関数へのアプローチや楕円関数の振る舞いについてさらに理解することである。以下、各章の内容を簡単に説明する。第 3 章では証明に用いる具体的な関数を紹介する。第 4 章では正方格子でのピックの公式の証明。第 5 章では平行四辺形格子でのピックの公式の証明を行う。

2　ピックの公式

2.1　格子多角形

格子多角形とは、座標平面上で、頂点が格子点 (つまり、x 座標と y 座標がともに整数である点) である多角形のことである。多角形は凹んでいてもよいが、境界は単純閉曲線であるものを考える。

2.2　ピックの公式

定理 2.1 (ピックの公式). 格子多角形 P の面積 A は P の内部にある格子点の数 I と辺上にある格子点の数 B を用いて

$$A = I + \frac{1}{2}B - 1$$

と表される。

ピックの公式は様々な教科書で紹介されている有名な公式である。([3] を参照) また、西山研究室の先輩である荒堀氏による卒論も先行研究としてある。([5] 参照) ピックの公式の証明は格子多角形を格子三角形に分割する考え方をする初等的な証明、トポロジーにおけるオイラーの公式を使う証明、ホモロジー論を使う証明、トーリック幾何を使う証明と多岐に亙る。本論文ではあまりポピュラーでない複素関数論を用いた証明を行うことで楕円関数や ζ 関数の理解を深めることが目的である。

3　格子と楕円関数

ピックの公式を複素関数論を用いて証明する上でいくつかの関数を用いる。この章ではその関数の紹介を行う。本論文で用いられる格子は正方格子 L と平行四辺形格子 $L(\tau)$ の

二種類ある。$L=\{m+in|m,n\in\mathbb{Z}\}$ は正方格子と呼ばれ、$L(\tau)=\{m+\tau n|m,n\in\mathbb{Z}\}$ は平行四辺形格子と呼ばれる。また $\tau=i$ のとき $L(\tau)=L$ となることがわかる。

3.1 楕円関数

商が実数でない複素数 ω_1,ω_2 を二重周期に持つ有理型関数 $f(z)$ を楕円関数という。二重周期関数の定義を次に示す。

定義 3.1. 複素平面上の関数 $f(z)$ が $1,\tau\in L(\tau)$ で二重周期関数であるとは

$$f(z)=f(z+\tau)=f(z+1)$$

が成り立つことである。これは任意の $m,n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$f(z+m+\tau n)=f(z)$$

が成り立つといっても同じである。

また、楕円関数の特徴として極を持たない楕円関数 $f(z)$ は定数である ([4]p. 12, 定理 1) ことより楕円関数は特異点を極のみ持つ。

3.2 ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数と ζ 関数

本論文の証明はワイエルシュトラスの $\wp$ 関数や ζ 関数を用いるが二重周期性を持たない ζ 関数をわざわざ扱う理由は以下の通りである。全平面で正則で二重周期を持つ関数はリュービルの定理から定数しかないことが知られている。またこれは 1 位の極を 1 つだけもつものは存在しないことを示してる。ピックの公式の証明するにあたって、留数を持っている関数の方が留数計算を扱うピックの公式の証明としては都合がよい。このような理由から二重周期性を持つ $\wp$ 関数ではなく ζ 関数が用いられる。

複素平面において、実部と虚部がともに整数である複素数全体の集合を L とおく。複素平面を自然に実座標平面と思ったとき、L は整数格子に他ならない。以下に紹介する関数は整数格子 $L=\{m+in|m,n\in\mathbb{Z}\}$ を周期に持つ楕円関数である。

定義 3.2 (ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数)**.** $z \notin \mathbb{C} - L$ に対して

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{a \in L - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

と定義される有理型関数をワイエルシュトラスの $\wp$ 関数と呼ぶ。

右辺の和は $z \in \mathbb{C} - L$ を含むある開円板上で絶対一様収束し、そこで正則関数になる。それは次の定理による。

定理 3.1 ([2]p. 52, 定理 5.2)**.** Ω 上正則な関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が、Ω の任意のコンパクト部分集合上で関数 f に一様収束するならば、f は Ω で正則である。

従って、$\wp(z)$ は $\mathbb{C} - L$ 上の正則関数になる。定義の仕方から、$\wp(z)$ は周期が $1, i$ の二重周期関数である。つまり定義 3.1 を満たし、楕円関数になる。また、$|z| < R$ として、

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{|a| \leq 2R} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \sum_{|a| > 2R} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

と書くと、二番目の級数は定理 3.1 より、$|z| < R$ における正則関数を定義している。従って、$|z| < R$ 内では $\wp(z)$ の極は $|z| < R$ 内の格子点となり、2 位の極である。また証明の準備として $\wp(iz) = -\wp(z)$ を示す。ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数の定義より

$$\begin{aligned}
\wp(iz) &= \frac{1}{(iz)^2} + \sum_{a \in L - \{0\}} \left(\frac{1}{(iz-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right) \\
&= -\frac{1}{z^2} + \sum_{a \in L - \{0\}} \left(-\frac{1}{(z+ia)^2} - \frac{1}{a^2} \right) \\
&= -\left(\frac{1}{z^2} + \sum_{a \in L - \{0\}} \left(-\frac{1}{(z-(-i)a))^2} - \frac{1}{(-ia)^2} \right) \right)
\end{aligned}$$

となる。$-(-i)a$ は a を $\dfrac{\pi}{2}$ 回転したもので、結局格子点を埋め尽くす。従って $c = (-i)a$ とおくと

$$\wp(iz) = -\left(\frac{1}{z^2} + \sum_{a \in L - \{0\}} \left(-\frac{1}{(z-c)^2} - \frac{1}{c^2} \right) \right) = -\wp(z) \tag{1}$$

となることがわかる。

次に二重周期関数ではないが、以下重要な働きをする関数を導入する。

定義 3.3 (ワイエルシュトラスの ζ 関数). $z \notin \mathbb{C} - L$ に対して

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{a \in L - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-a)} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} \right)$$

と定義される有理型関数をワイエルシュトラスの ζ 関数と呼ぶ。

二重周期関数でない。この関数も同様に $\mathbb{C} - L$ の部分集合上で絶対一様収束する。つまり $\mathbb{C} - L$ 上の正則関数である。また項別微分可能なので

$$\zeta'(z) = -\frac{1}{z^2} + \sum_{a \in L - \{0\}} \left(-\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{a^2} \right) = -\wp(z) \tag{2}$$

となる。項別微分可能性は次の定理に従う。

定理 3.2 ([2]p. 53, 定理 5.3)**.** Ω 上の正則な関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が、Ω の任意のコンパクト部分集合上で関数 f に一様収束するならば、導関数列 $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω の任意のコンパクト部分集合上で f' に一様収束する。

また、同様にして $\zeta(z)$ は格子点で 1 位の極を持っていることがわかる。定義から留数は 1 である。$\wp$ 関数と ζ 関数の性質をまとめると次の表のようになる。

	極の位数	留数	二重周期性
$\wp$ 関数	2 位	0	YES
ζ 関数	1 位	1	NO

4　整数格子に対するピックの公式と ζ 関数

整数格子とは $L = \{m + in | m, n \in Z\}$ で与えられる正方形の格子である。その整数格子の格子多角形に対するピックの公式を複素関数論を用いて証明する。そのためにまず以下の 4 つの補題を準備する。

4.1　ζ 関数の二重周期補正

ピックの公式の特徴である格子点の数え上げは留数 1 の ζ 関数に対する留数定理の使用によって現れる。しかし ζ 関数は二重周期性を待たない。そこで補題を用意する。

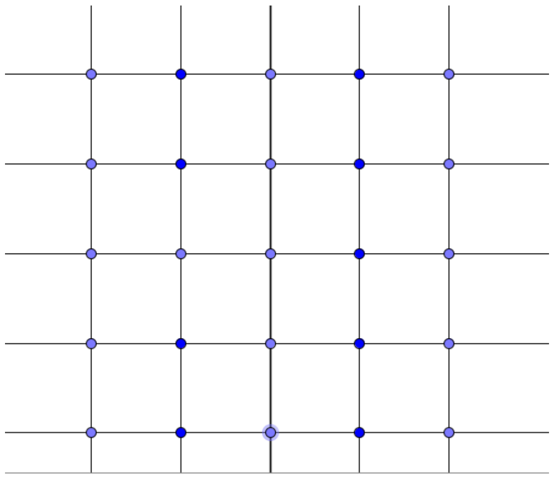


図 2　整数格子

補題 4.1. ある$\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\varphi(z) = \zeta(z) - \alpha\bar{z}$$

とおくと、φ が周期 L の二重周期関数となるようにできる。

[**証明**]. 式 (2) によって $\zeta'(z) = -\wp(z)$ だから、

$$\zeta(z+m+in) - \zeta(z) = -\int_{w=0}^{w=m+in} \wp(z+w)dw \tag{3}$$

を考える。この積分は 0 から $m+in$ に至る経路に依存しない。なぜなら、そのような二つの経路 γ_1, γ_2 をとると、$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ は閉路となる。ところが $\wp(z)$ の留数が 1 であることから、留数定理より

$$\int_{\gamma_1} \wp(z)dz - \int_{\gamma_2} \wp(z)dz = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} \wp(z)dz = \int_{\gamma} \wp(z)dz = 0$$

となる。つまり

$$\int_{\gamma} \wp(z)dz = \int_{\gamma_1} \wp(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

$$\int_{\gamma_1} \wp(z)dz = \int_{\gamma_2} \wp(z)dz$$

となることがわかる。

式 (3) は長さ 1 の水平の直線の経路に沿った m 個の積分と長さ 1 の垂直な直線に沿った n 個の積分の合計として表される。

また、$\wp(z)$ は二重周期関数であることから式 (3)=$m\alpha(z)+n\beta(z)$ となる。但し

$$\alpha(z) = -\int_0^1 \wp(z+w)dw \qquad \beta(z) = -\int_0^1 \wp(z+iw)idw$$

である。以下、この $\alpha(z), \beta(z)$ が z に依らない定数であることを示そう。$\alpha(z)$ の定義で積分はそれぞれ水平線で周期的であるから、$\alpha(z)$ の値は z の水平移動で不変である。つまり $\alpha(z) = \alpha(y)$ となる。なぜなら、$(t \in \mathbb{R})$ に対し、

$$\alpha(z+t) = -\int_0^1 \wp(z+w+t)dw$$

$u = w+t$ とおくと

$$\begin{aligned}
&= -\int_t^{t+1} \wp(z+u)du \\
&= -\int_t^{N} \wp(z+u)du - \int_N^{t+1} \wp(z+u)du \\
&= -\int_t^{N} \wp(z+u)du - \int_{N-1}^{t} \wp(z+u)du \\
&= -\int_{N-1}^{N} \wp(z+u)du
\end{aligned}$$

となる。$u = N-1+w$ とおくと

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^1 \wp(z+w+N-1)dw \\
&= \alpha(z).
\end{aligned}$$

つまり、$\alpha(z)$ は水平移動で不変であり、$\alpha(z) = \alpha(y)$ とわかる。同様に $\beta(z) = \beta(x)$ である。次に $m = 0$ と固定すると

$$\zeta(z+in) - \zeta(z) = n\beta(x),$$

$$\beta(z) = \beta(x) = \frac{\zeta(z+in) - \zeta(z)}{n}$$

より β は格子点以外で正則であることがわかる。また $\beta(z) = \beta(x) = u+iv$ とおき、コーシー・リーマンの方程式を用いると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

となる。$\beta(z)$ は実部にしか依らない関数なので y での偏微分は 0 になる。従って

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

となることから $\beta(z)$ は結局定数である。同様に $\alpha(z)$ も定数である。

α、β の定義から 式 (1) より $\beta = -i\alpha$ が示され、

$$\zeta(z+m+in) - \zeta(z) = m\alpha + n\beta = (m-in)\alpha = \{\overline{(z+m+in)} - \overline{z}\}\alpha$$

となる。そこで $\varphi(z) = \zeta(z) - \alpha\overline{z}$ とおくと

$$\begin{aligned}\varphi(z+m+in) &= \zeta(z+m+in) - \alpha\overline{(z+m+in)} \\ &= \zeta(z) - \alpha\overline{z} = \varphi(z)\end{aligned}$$

より $\varphi(z)$ の二重周期性が示された。 □

$\varphi(z)$ の定義式に表れる定数 α は実は π であることを後で紹介する。系 4.1.

4.2 面積 A を内部の格子点の数 I で表す

補題 4.2. 格子点を通らない有界な単連結領域 D の境界を C とおき、D の面積を A, I を D の内部の格子点の数 とすると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)dz = I - A$$

となる。

[**証明**]. $\varphi(z)$ に対する C 上の積分を考える。$\varphi(z)$ の定義と $z = x + iy$ から

$$\int_C \varphi(z)dz = \int_C \{\zeta(z) - \alpha\overline{z}\}dz = \int_C \zeta(z)dz - \alpha\int_C (x-iy)(dx+idy)$$

となる。$\zeta(z)$ の極が格子点にあり、その留数が 1 であることを考慮して留数定理を用いると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta(z)dz = I$$

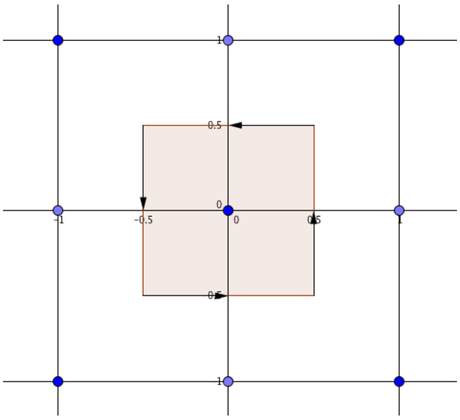
となる。さらに右辺第 2 項にグリーンの定理を用いると

$$\int_C (x-iy)(dx+idy) = \int_C (x-iy)dx + (xi+y)dy = \iint_D 2idxdy = 2iA$$

が得られ、まとめると

$$\int_C \varphi(z)dz = 2\pi iI - 2i\alpha A \tag{4}$$

となる。



原点を中心とした単位正方形を反時計回りに進む経路を考えると、$\varphi(z)$ は周期関数であることから

$$0 = \int_C \varphi(z)dz = 2\pi iI - 2i\alpha A$$

が示され、$I = 1, A = 1$ であるので、$\alpha = \pi$ となる。$\alpha = \pi$ を式 (4) に代入すると補題が証明された。 □

また、補題 4.1 に $\alpha = \pi$ を代入すると

$$\varphi(z) = \zeta(z) + \pi\overline{z}$$

となることもわかる。

系 4.1. ζ 関数を反正則関数によって補正した

$$\varphi(z) = \zeta(z) + \pi\overline{z}$$

は周期を L に持つ二重周期関数である。

4.3　境界の点の数 B の導出

補題 4.3. 格子多角形 P の境界を C とし P の面積を A、I を P の内部の格子点の数、B を辺上の格子点の数とおくと

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)dz - \frac{1}{2}B + 1 = I - A$$

となる。

[証明]. 下図のように P の辺上の各格子点を半径 ϵ の円弧でまわり込む P の境界を近似する閉曲線 C_ϵ をとる。

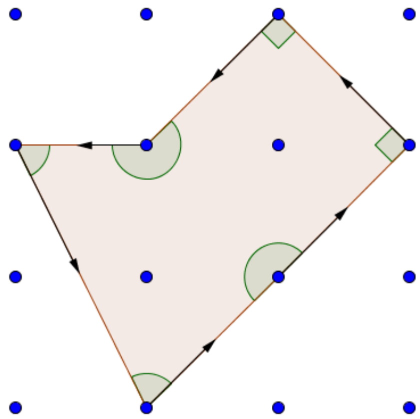


図 3　経路 C_ϵ

補題 4.2 と同様に

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \varphi(z)dz = I - A \tag{5}$$

となる。次に l_ϵ を C_ϵ の線分の部分 $S_\epsilon(a)$ を P の辺上にある格子点 a を中心とした円弧の部分とすると、積分は

$$\int_{C_\epsilon} \varphi(z)dz = \int_{l_\epsilon} \varphi(z)dz + \sum_{a\in L\cap C}\int_{S_\epsilon(a)} \varphi(z)dz$$

と分解される。ここで

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon(a)}\varphi(z)dz=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon(a)}(\zeta(z)-\pi\overline{z})dz$$

を考える。関数 $\pi\overline{z}$ は a において有界閉集合上で有界なので、$\epsilon\to 0$ のとき $\displaystyle\int_{S_\epsilon(a)}\pi\overline{z}dz\to 0$ となり 、

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon(a)}\zeta(z)dz=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon(a)}(z^{-1}+\sum_{b\in L-\{0\}}\{(z-b)^{-1}+b^{-1}+zb^{-2}\})dz$$

となる。$\pi\overline{z}$ の積分と同様の理由から

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon(a)}(z^{-1}+\sum_{b\in L-\{0\}}\{(z-b)^{-1}+b^{-1}+zb^{-2}\})dz=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon(a)}(z-a)^{-1}dz$$

である。これをまとめると

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon}\varphi(z)dz&=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{l_\epsilon}\varphi(z)dz+\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{b\in L\cap C}\int_{S_\epsilon(a)}\varphi(z)dz\\&=\int_C\varphi dz+\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{b\in L\cap C}\int_{S_\epsilon(a)}(z-a)^{-1}dz.\end{aligned}$$

z を t でパラメータ表示し、円弧が時計回りであることに注意すると

$$\int_{S_\epsilon(a)}(z-a)^{-1}dz=-(P\text{ の }a\text{ における内角})i$$

となり、すべての円弧に対しては

$$\sum_{a\in L\cap C}\int_{S_\epsilon}(z-a)^{-1}dz=-(P\text{ の内角の和})i=-(B-2)\pi i$$

となる。従って、

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon}\varphi(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C\varphi(z)dz-\frac{1}{2}B+1\tag{6}$$

である。式 (5), 式 (6) より

$$I-A=\frac{1}{2\pi i}\int_C\varphi(z)dz-\frac{1}{2}B+1$$

がわかる。 □

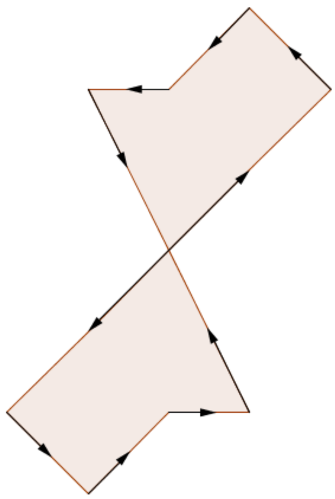
4.4　ピックの公式の証明

補題 4.4. 格子多角形 P の境界を C とおくと

$$\int_C \varphi(z)dz = 0$$

となる。

[**証明**]. 下図のように C_1 を原点の周りで π 回転して得られる向きづけられた曲線を C_2 とする。



曲線の和 $C_1 \cup C_2$ 上の積分を考えると、

$$\int_{C_1 \cup C_2} \varphi(z)dz = \int_{C_1} \varphi(z)dz + \int_{C_2} \varphi(z)dz$$

であるが、φ は奇関数なので

$$\int_{C_1} \varphi(z)dz + \int_{C_2} \varphi(z)dz = 2\int_{C_1} \varphi(z)dz. \tag{7}$$

l_1を C_1上の一つの線分 l_2を l_1に対応する C_2上の線分 とすると、この二つは L の元で平行移動した関係にあり、向きは逆向きである。さらに$\varphi(z)$ は周期 L の周期関数であることから

$$\int_{C_1} \varphi(z)dz = -\int_{C_2} \varphi(z)dz \tag{8}$$

である。式 (7)、式 (8) より

$$0 = 2\int_{C_1} \varphi(z)dz$$

となる。 $\square$

4 つの補題を合わせると

$$I - A + \frac{1}{2}B - 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \varphi(z)dz = 0$$

であることから、ピックの公式を ζ 関数を用いて示すことができた。

5　平行四辺形格子と二重周期関数

4 章では整数格子に対するピックの公式を証明した。本章では、L を下図のような平行四辺形格子 $L(\tau) = \{m + \tau n | m, n \in \mathbb{Z}\}$ に置き換えて考える。このとき平行四辺形の面積は $-\frac{1}{2}i(\tau - \overline{\tau})$ だから、ピックの公式はどう変化するのかは簡単に予想できて、その式は $A = -\frac{1}{2}i(I + \frac{B}{2} - 1)\,(\tau - \overline{\tau})$ である。しかし我々は格子を $L(\tau)$ に変えると、ピックの公式の証明がどのように変化するのかに興味がある。

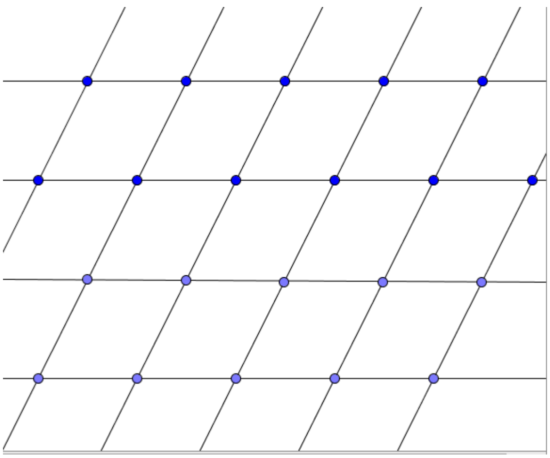


図 4　平行四辺形格子

まず、$L(\tau)$ に対するワイエルシュトラスの $\wp$ 関数, ζ 関数を定義する。L と $L(\tau)$ とでは定義式自体に違いはないが、極の位置が異なるので注意が必要である。

定義 5.1 (ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数)**.** $z \notin \mathbb{C} - L(\tau)$ に対して

$$\wp(\tau; z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{a \in L(\tau) - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

と定義される有理型関数をワイエルシュトラスの $\wp$ 関数と呼ぶ。

定義 5.2 (ワイエルシュトラスの ζ 関数)**.** $z \notin \mathbb{C} - L(\tau)$ に対して

$$\zeta(\tau; z) = \frac{1}{z} + \sum_{a \in L(\tau) - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-a)} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} \right)$$

と定義される有理型関数をワイエルシュトラスの ζ 関数と呼ぶ。

表記の方法として、τ をはっきりさせたいときは $\zeta(\tau; z)$, $\wp(\tau; z)$ などと書くが以下では主に $\zeta(z)$, $\wp(z)$ と表記する。第 2 章から 4 章にかけてあらわれた $\zeta(z)$, $\wp(z)$ とは異なることに注意してほしい。

5.1 ζ の二重周期補正

補題 5.1. ある複素数の定数 α, β が存在して、
$\chi(z) := \dfrac{1}{\tau - \overline{\tau}}((\beta - \overline{\tau}\alpha)z + (-\beta + \tau\alpha)\overline{z})$ とおくと、

$$\varphi(z) = \zeta(z) - \chi(z)$$

は周期 $L(\tau)$ の二重周期関数になる。

[**証明**]. 式 (2) によって $\zeta'(z) = -\wp(z)$ だから、

$$\zeta(z + m + \tau n) - \zeta(z) = -\int_{w=0}^{w=m+\tau n} \wp(z+w)dw \tag{9}$$

$\wp(z)$ の留数は 0 であることから積分は経路に依存しない。(補題 4.1 参照)

式 (9) は長さ 1 の水平の直線の経路に沿った m 個の積分と長さ 1 の τ 方向の直線に沿った n 個の積分の合計として表される。また、$\wp(z)$ は二重周期関数であることから

$$((9)\ \text{式}) = m\alpha + n\beta,$$

$$\alpha := -\int_0^1 \wp(z+w)dw, \quad \beta := -\int_0^1 \wp(z+\tau w)\tau dw$$

となる。$\alpha(z)$ の定義で被積分関数はそれぞれ水平方向に周期的であるから、$\alpha(z)$ の値は z の水平移動で不変である。つまり $\alpha(z)=\alpha(y)$ となる。同様に $\beta(z)$ はτ 方向への移動で不変である。つまり $\beta(z)=\beta(\tilde{x})$ となる。ここで $z=\tilde{x}+h\tau \quad (\tilde{x},h\in\mathbb{R})$ と書いた。

次に $m=0$ と固定すると

$$\zeta(z+\tau n)-\zeta(z)=n\beta(\tilde{x})$$

$$\beta(\tilde{x})=\frac{\zeta(z+\tau n)-\zeta(z)}{n}$$

より β は格子点以外で正則であることがわかる。$\tau=w_1+iw_2$ とおき、$\tilde{x}=z+h\tau\in\mathbb{R}$ とおくと、

$$\tilde{x}=z+h\tau=\overline{z}+h\overline{\tau}\in\mathbb{R}$$

となる。これから h を求めると、

$$h=\frac{\overline{z}-z}{\tau-\overline{\tau}}=-\frac{y}{w_2}$$

となる。$z=x+iy$ とおいて計算すると

$$\tilde{x}=x+iy-\frac{y}{w_2}(w_1+iw_2)=x-\frac{w_1}{w_2}y$$

従って、$\beta(z)=\beta(\tilde{x})=A(x-\dfrac{w_1}{w_2}y)+iB(x-\dfrac{w_1}{w_2}y)$ となり、コーシー・リーマンの方程式を用いると

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=A'(x-\dfrac{w_1}{w_2}y)=\frac{\partial v}{\partial y}=iB'(x-\dfrac{w_1}{w_2}y)(-\dfrac{w_1}{w_2}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}=A'(x-\dfrac{w_1}{w_2}y)(-\dfrac{w_1}{w_2})=-\frac{\partial v}{\partial x}=-B'(x-\dfrac{w_1}{w_2}y) \end{cases}$$

となり、まとめると

$$A'=-\frac{w_1}{w_2}B'=-(\frac{w_1}{w_2})^2A'$$

である。これから $A'=0,B'=0$ または $(\dfrac{w_1}{w_2})^2=-1$ となることがわかる。ところが定義より $(\dfrac{w_1}{w_2})^2\neq-1$ なので、$A'=0,B'=0$ となり、$\beta(z)$ は定数であることが示される。補題 4.1 と同様に $\alpha(z)$ も定数である。

また、$z=m+n\tau,\overline{z}=m+n\overline{\tau}$ を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 1 & \overline{\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{\tau}-\tau}\begin{pmatrix} \overline{\tau} & -\tau \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\overline{\tau}-\tau}\begin{pmatrix} \overline{\tau}z-\tau\overline{z} \\ -z+\overline{z} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\tau-\overline{\tau}}\begin{pmatrix} \tau\overline{z}-\overline{\tau}z \\ z-\overline{z} \end{pmatrix}$$

となり、α, β の式に直すと

$$\begin{aligned} m\alpha+n\beta &= \frac{1}{\tau-\overline{\tau}}\left((\tau\overline{z}-\overline{\tau}z)\alpha+(z-\overline{z})\beta\right) \\ &= \frac{1}{\tau-\overline{\tau}}\left((\beta-\overline{\tau}\alpha)z+(-\beta+\tau\alpha)\overline{z}\right) \end{aligned}$$

となる。そこで $\chi(z) = \dfrac{1}{\tau-\overline{\tau}}\left((\beta-\overline{\tau}\alpha)z+(-\beta+\tau\alpha)\overline{z}\right)$ とおくと

$$\zeta(z+m+\tau n)-\zeta(z) = \frac{1}{\tau-\overline{\tau}}((\beta-\overline{\tau}\alpha)(m+n\tau)+(-\beta+\tau\alpha)(\overline{m+n\tau})) = \chi(m+n\tau),$$
$$\therefore \quad \varphi(z+m+n\tau) = \varphi(z).$$

これで $\varphi(z)$ の二重周期性が示された。

□

5.2 面積 A を内部の格子点の数 I で表す

補題 5.2. 有界な単連結領域 D の格子点を通らない境界を C とおき I を D の内部の格子点の数、D の面積を A とおくと

$$\int_C \varphi(z)dz = 2\pi iI + \frac{4\pi A}{\tau-\overline{\tau}}$$

となる。

[**証明**]. $\varphi(z)$ に対する C 上の積分を考える。$\varphi(z)$ の定義と $z = x+iy$ から

$$\int_C \varphi(z)dz = \int_C \{\zeta(z)-\chi(z)\}dz = \int_C \zeta(z)dz - \int_C \chi(z)dz$$

となる。$\zeta(z)$ の極が格子点にあり、その留数は 1 であることを考慮して留数定理を用いると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta(z)dz = I$$

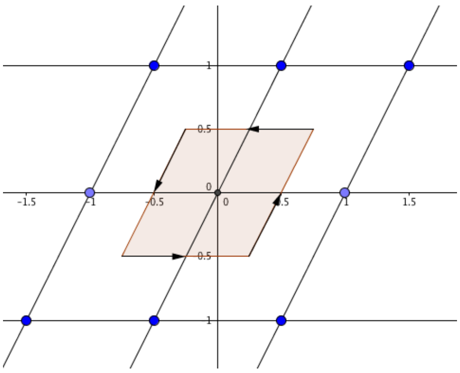
となる。さらに補題 4.2 と同様に右辺第 2 項にグリーンの定理を用いると

$$\int_C \chi(z)dz = \frac{1}{\tau\overline{\tau}}\int_C \{(\beta - \overline{\tau}\alpha)(x+iy) + (-\beta+\tau\alpha)(x-iy)\}(dx+idy) = \frac{\tau\alpha-\beta}{\tau-\overline{\tau}}2iA$$

となる。まとめると

$$\int_C \varphi(z)dz = 2\pi iI - \frac{\tau\alpha-\beta}{\tau-\overline{\tau}}2iA \tag{10}$$

である。原点を中心とした辺の長さが 1 と τ の平行四辺形 (下図) を反時計回りに進む経路を考える。



$\varphi(z)$ が周期関数であることから

$$0 = \int_C \varphi(z)dz = 2\pi iI - \frac{\tau\alpha-\beta}{\tau-\overline{\tau}}2iA$$

となる。$I = 1,\ A = \dfrac{\tau-\overline{\tau}}{2i}$ であるので

$$2\pi i = \tau\alpha - \beta$$

となる。これをルジャンドルの関係式 ([4]p. 32) という。この α と β の関係式を式 (5.3) に代入すると補題が示される。 □

また、α と β の関係式を補題 5.1 に代入すると

$$\varphi(z) = \zeta(z) - \frac{1}{\tau-\overline{\tau}}\left((\beta-\overline{\tau}\alpha)z + 2\pi i\overline{z}\right)$$

となることがわかる。

5.3　境界の点の数 B の導出とピックの公式の証明

補題 4.3 と同様の理由から次の補題が成り立つ。

補題 5.3. 格子多角形 D の境界を C とし D の面積を A、I を P の内部の格子点の数、B を辺上の格子点の数とおくと

$$2\pi i I + \frac{4\pi A}{\tau - \overline{\tau}} = \int_C \varphi(z)dz - (B-2)\pi i$$

となる。

また補題 4.4 と同様の理由から次の補題が成り立つ。

補題 5.4. 格子多角形 P の境界を C とおくと

$$\int_C \varphi(z)dz = 0$$

となる。

4 つの補題 (5.1, 5.2, 5.3, 5.4) を合わせると

$$2\pi i I + \frac{4\pi A}{\tau - \overline{\tau}} + (B-2)\pi i = \int_C \varphi(z)dz = 0$$

であることから、ピックの公式を ζ 関数を用いて一般化することができた。

6　まとめと今後の展望

本論文は複素関数論的な証明からピックの公式を整数格子、平行四辺形格子で示すことで楕円関数の性質や特徴を理解し、そこでの困難やその困難に対する解決策を模索することが目標であった。結果として、正方格子の場合の ζ の二重周期補正では $\wp$ 関数の積分を $\alpha(z)$ と $\beta(z)$ を用いて定義し (補題 4.1 参照) 結局 α, β が定数であることが示され、ζ 関数と定数 α 倍した反正則な関数との和から二重周期性が作り出されていることがわかった。またその定数 α は結局 π であることも示された。また第 5 章で行った一般化では正方格子と異なり、z と $\overline{z}$ が入り混じる形となった。また、その導出の過程で α, β の関係からルジャンドルの関係式が導き出された。これは楕円曲線の周期の間の関係式であることがわかった。

今回の論文を通して楕円関数への理解を微量ながら感じることができた。今後複素関数論はもちろん、多岐にわたる分野に付随する重要な理論である楕円関数論の理解をさらに深めることを今後の展望として見据えたい。最後に、本研究に際して、様々なご指導を頂きました西山先生に深謝いたします。 そして多くのご指摘を下さいました西山研究室の同期の皆様に感謝いたします。

7 参考文献

参考文献

[1] R.Diaz, S.Robins, ”Pick's Formula via the Weierstrass p-Function”, Amer. Math. Monthly. 102(1995).

[2] E.M. スタイン, R. シャカルテ (新井仁之他訳)『複素解析』日本評論社 2009.

[3] 枡田幹也, 福川由貴子 『格子からみえる数学』 日本評論社 2013.

[4] A. フルヴィッツ,R クーラント『楕円関数論』数学クラシックス 2012.

[5] 荒堀夏彦, 『穴のあいた格子多角形におけるピックの公式』, 青山学院大学理工学部物理・数理学科卒業論文, 2014 年度.(`http://www.gem.aoyama.ac.jp/~kyo/sotsuken/2014/arahori_sotsuron_2014.pdf`)