

複素関数論における無限積の公式

青山学院大学 理工学部 物理数理学科
15112014 江添 優里 (西山研究室)

平成 28 年 2 月 16 日

目次

1	序	3
2	無限積の収束と記号の意味	5
3	複素三角関数の無限積表示	8
4	無限積 $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k})$	10
5	無限積と代数関数, 超越関数	12
5.1	代数関数, 超越関数	12
5.2	無限積の超越性	13
5.3	主結果の証明	14
6	まとめと将来の課題	16

1 序

セミナーで教科書 [1] を読み進めていて、無限積に興味を持ち、展開した時の性質や無限積がどのような関数であるかに興味を持った。そこで、複素関数論における無限積の公式を以下の2点を中心に調べることにした。

- 無限積を $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ と表したときに、 z のべき指数の2進数、3進数表示と係数 C_n の関係が見つかるようなもの。
- 無限積が代数関数で表されるか、超越関数になるのか。

ここで表れる無限積とは、複素数 z を変数とする複素関数列の積の極限のことを指す。具体的には、

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

のように $\sin z$ の因数分解の形になっているものや、

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k}) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (|z| < 1)$$

のように、一見複雑そうに見えるが実は簡単な代数関数になるようなものがある。このように収束するものの例として、他によく知られているものに、オイラーの五角数定理がある [3, p.92]。このような無限積において、本論文の前半では、例に挙げたような三角関数の無限積表示やその性質、また、 z のべき指数と自然数の2進数、3進数表示との関連を考察した。前半の主な結果は次の二つの定理である。

定理 1.1 (A).

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k} + z^{2 \cdot 3^k}) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (|z| < 1)$$

定理 1.2 (B).

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - z^{2^k}) &= 1 - z - z^2 + z^{1+2} - z^{2^2} \\ &\quad + z^{1+2^2} + z^{2+2^2} - z^{1+2+2^2} - \dots + (-1)^{d(n)} z^n + \dots \end{aligned}$$

$d(n)$: n を 2 進数展開した時に現れる 1 の個数

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k} - z^{2 \cdot 3^k}) = 1 + z - z^2 + z^3 + z^{1+3} - z^{2+3} \\ - z^{2 \cdot 3} - z^{1+2 \cdot 3} + z^{2+2 \cdot 3} + \dots + (-1)^{e(n)} z^n + \dots$$

$e(n)$: n を 3 進数展開した時に現れる 2 の個数

論文の後半では、無限積の超越性について考える。

複素数は、代数的数と超越数の二つに分けることができる。代数的数とは、有理数係数の 0 でない多項式の根になる複素数のことをいう。また、代数的数ではない複素数を超越数という。つまり、以下の方程式を満たすものである。

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad (a_i \in \mathbb{Q}).$$

例えば代数的数には、有理数や $\sqrt{2}, i$, 超越数には、 $\pi, e, \log 2, \sin \sqrt{2}, \cos 3$ などがある。

同様にして代数関数、超越関数も定義でき、

$$F(z)^n + a_{n-1}(z)F(z)^{n-1} + a_{n-2}(z)F(z)^{n-2} + \dots + a_0(z) = 0, \quad (a_i(z) \in \mathbb{C}(z))$$

を満たす関数 $F(z)$ を代数関数、満たさない関数を超越関数という。

そして、この論文の主結果は以下の定理である。

定理 1.3 (主結果). 無限積

$$F(z) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k} - z^{2 \cdot 3^k})$$

は超越関数である。

この定理の証明の方針としては、

$$F(z) = (1 + z - z^2)(1 + z^3 - z^{2 \cdot 3})(1 + z^{3^2} - z^{2 \cdot 3^2}) \dots \\ = (1 + z - z^2)F(z^3)$$

という Mahler 型の関数等式を用いて、 $F(z)$ は $\mathbb{Q}(z)$ 上代数的であると仮定し矛盾を示す背理法である。証明は西岡 [6, p.102] を参考にしたが、独自に考えたものである。

主結果と同じように考察すると、以下のようなことがいえるのではないかと予想しているが、まだ証明することはできていないので、将来の課題とする。

予想 1.1. α ($0 < |\alpha| < 1$) を代数的数とすると,

$$F(z) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k} - z^{2 \cdot 3^k})$$

において $F(\alpha)$ は超越数である.

これは,

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - z^{2^k})$$

において $f(\alpha)$ は超越数であることの証明 [6, p.103, 定理 4.4] を参考にすれば良いのではないかと考えている.

予想 1.2.

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{d^k} + z^{2 \cdot d^k} + \dots + z^{(d-1) \cdot d^k}) = \frac{1}{1-z}$$

は代数関数だが,

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{d^k} + z^{2 \cdot d^k} + \dots - z^{(d-1) \cdot d^k})$$

は超越関数である.

2 無限積の収束と記号の意味

本節では, 無限積の記号の意味や, 持っている性質について述べる. まず, 無限積を以下のように定義づける.

定義 2.1 (無限積). 複素数列 $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の各項 α_n が 0 でないとき, 以下のように有限積の極限をとったものを無限積という.

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \alpha_n$$

また, このときの p を無限積の値, もしくは積という.

このように, 無限積が収束するための条件として, 次の定理がある.

定理 2.1 (収束の判定条件). 複素数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の各項 a_n が 0 でないとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

ならば

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

は収束する.¹ また, このとき無限積は絶対収束するという.

[証明]. $\sum |a_n|$ が収束するならば, 十分大きな $n \gg 0$ に対して $|a_n| < \frac{1}{2}$ が成り立つ. そこで, 最初から $|a_n| < \frac{1}{2}$ として一般性を失わない. 従って $b_n = \log(1 + a_n)$ は矛盾なく定義される. $B_N = \sum_{n=1}^N b_n$ とおくと,

$$\prod_{n=1}^N (1 + a_n) = \prod_{n=1}^N e^{\log(1+a_n)} = e^{B_N}$$

となる. $\log(1 + z)$ のべき級数展開を考えると $|z| < \frac{1}{2}$ ならば

$$\begin{aligned} |\log(1 + z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n} \right| = |z| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n+1} \right| \\ &\leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \leq |z| \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{2} \right|^n \\ &= |z| \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2|z|, \end{aligned}$$

$$\therefore |\log(1 + z)| \leq 2|z|, \quad |b_n| \leq 2|a_n|.$$

従って $B := \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ をある複素数とすると $B_N \rightarrow B (N \rightarrow \infty)$ を満たす B が存在する. 指数関数が連続であることを考えると $e^{B_N} \rightarrow e^B (N \rightarrow \infty)$ である. よって無限積は, 極限 e^B に収束する. \square

無限積が収束するものの例を以下に挙げる.

¹定義 2.1 の α_n を $1 + a_n$ ととっている.

例 2.1 (オイラーの五角数定理). $\prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^k)$ において $|q| < 1$ ならば

$$\sum_{k=1}^{\infty} | - q^k | = \frac{|q|}{1 - |q|} < \infty$$

となる . よって $\prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^k)$ は絶対収束する . またこのとき , $\prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^k)$ は

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^k) &= (1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)(1 - q^4) \cdots \\ &= 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (q^{\frac{n(3n-1)}{2}} + q^{\frac{n(3n+1)}{2}}) \end{aligned}$$

となることが知られている [3, p.92] . このべき指数に表される数 $\frac{n(3n-1)}{2}$ を五角数という .

次に , 無限積の複素関数としての正則性について述べる . 正則性については , 以下の定理がある .

定理 2.2 (正則関数の積). $\{F_n\}$ は開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数の列とする . ある定数 $C_n > 0$ が存在して ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n < \infty$$

かつ , すべての $z \in \Omega$ に対して

$$|F_n(z) - 1| \leq C_n$$

が成り立つならば次の (1)(2) が成り立つ .

- (1) 積 $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ は , Ω においてある正則関数 $F(z)$ に一様収束する .
- (2) $F_n(z) \neq 0 (\forall n \geq 1)$ ならば

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'_n(z)}{F_n(z)}$$

となる .

[証明]. (1) $F_n(z) = 1 + a_n$ とおくと, これは $|a_n(z)| \leq C_n$ を満たす. 各 z に対して定理 2.1 と同様に考える. C_n は定数より, z に対して一様である. よって積は一様収束し, 正則関数の一様収束極限は正則であるから [1, p.52 定理 5.2], その極限は正則である.

(2) 証明する際に用いる事実を先に述べる.

定理 2.3 ([1]p.53 定理 5.3). $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正則関数列とすると, 導関数列 $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, Ω の任意のコンパクト部分集合上で f' に一様収束する.

補題 2.1 ([1]p.89). 関数 $f(z) \neq 0$ とすると

$$\frac{(\prod_{k=1}^N f_k)'}{\prod_{k=1}^N f_k} = \sum_{k=1}^N \frac{f'_k}{f_k}$$

これらの事実を用いて証明する. K を Ω のコンパクト集合とし,

$$G_N(z) = \prod_{n=1}^N F_n(z) \quad (z \in K)$$

とおく. 1 より $G_N(z)$ は Ω 上一様に $F(z)$ に収束するので, 定理 2.3 より $\{G'_N\}$ は F' に K 上一様収束する. G_N は K 上一様に $\exists \delta > 0$ が存在し, $|G_N(z)| \geq \delta \geq 0$ であるから, K 上一様に $\frac{G'_N}{G_N} \rightarrow \frac{F'}{F}$ となる. また, K は Ω の任意のコンパクト集合であるから, Ω 上のすべての点においてこの極限が成立する. さらに補題 2.1 より,

$$\frac{G'_N}{G_N} = \sum_{n=1}^N \frac{F'_n}{F_n}$$

である. よってこの極限を取ると定理が証明できる. □

3 複素三角関数の無限積表示

本節では複素三角関数の無限積表示について述べる. まず $\sin z$ の因数分解として次のような定理がある.

定理 3.1 (正弦関数に対する乗積公式). 複素関数 $\sin z$ に対して

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

が成り立つ.

この公式を証明する方法として、主に以下の3つの方法を挙げる。

1. $x^n - 1$ の因数分解を用いる。[3, p.38]

2. $2m \cot(2mt) = \sum_{j=0}^{2m-1} \tan\left(t + \frac{j\pi}{2m}\right)$ を用いる。[4, p.693]

この式を変数変換、積分することにより導くことができる。

3. 余正接関数の部分分数展開

$$\pi \cot(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

を用いる。[1, p.144] この式は留数定理や $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \exp(i(\pi-x)\alpha)$ のフーリエ変換を
考えることで証明できる。

また、 $\cos \frac{z}{2}$ については以下のような無限積表示が証明できる。

定理 3.2 (倍角公式による無限積表示). 任意の z に対して以下の積は収束し

$$\frac{\sin z}{z} = \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{z}{4}\right) \cos\left(\frac{z}{8}\right) \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^k}\right)$$

となる。

[証明]. $\sin z$ の倍角公式より

$$\begin{aligned} \sin z &= 2 \sin\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= 2 \cdot 2 \sin\left(\frac{z}{4}\right) \cos\left(\frac{z}{4}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \sin\left(\frac{z}{8}\right) \cos\left(\frac{z}{8}\right) \cos\left(\frac{z}{4}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= \cdots \\ &= 2^n \sin\left(\frac{z}{2^n}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{z}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{z}{2^n}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{z}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{z}{2^n}\right) = \frac{\sin z}{2^n \sin\left(\frac{z}{2^n}\right)}$$

ここで $t = \frac{z}{2^n}$ とおき $n \rightarrow \infty$ とすると $t \rightarrow 0$ であるから, 右辺の分母は z に近づく. よって

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^k}\right) = \frac{\sin z}{z}$$

□

この定理は, $\cos z$ の倍角の公式を用いても証明することができる.

4 無限積 $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k})$

本節では, 無限積を

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

と表したときに, z のべき指数の 2 進数, 3 進数表示と係数 C_n の関係がつくようなものについて考える.

まず, $a_n(z) = z^{2^n}$ の場合の定理を紹介する.

定理 4.1. $|z| < 1$ とすると

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\cdots = \prod_{k=0}^{\infty} (1+z^{2^k}) = \frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots$$

が成り立つ.

[証明]. 有限個で考えると帰納法より

$$\begin{aligned} & (1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots(1+z^{2^n}) \\ &= (1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots(1+z^{2^n}) \\ &= (1-z^4)(1+z^4)(1+z^8)\cdots(1+z^{2^n}) \\ &= \cdots \\ &= 1 - z^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$|z| < 1$ より, 両辺で $|n| \rightarrow \infty$ とすると

$$(1-z) \prod_{k=0}^{\infty} (1+z^{2^k}) = 1, \quad \therefore \prod_{k=0}^{\infty} (1+z^{2^k}) = \frac{1}{1-z}$$

□

この無限積について自然数の2進数, 3進数展開との関係を考察したところ, 以下のよう
なことがわかった.

考察 4.1. 2進数, 3進数展開との関係: $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k})$ を実際に展開してみると

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k}) = 1 + z + z^2 + z^{1+2} + z^{2^2} + z^{1+2^2} + z^{2+2^2} + z^{1+2+2^2} + \dots$$

となり, z の指数が2進数展開となっていることがわかった.

次に, $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k})$ を展開してみると,

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k}) = 1 + z + z^3 + z^{1+3} + z^9 + \dots$$

となり, z のべきは2が出てこない3進数展開で表されることがわかった. すべての3進
数展開を得るためには,

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k} + z^{2 \cdot 3^k}) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^{1+3} + z^{2+3} + z^{2 \cdot 3} + z^{1+2 \cdot 3} + z^{2+2 \cdot 3} \dots$$

という無限積を考えれば良いこともわかった. 従って, この無限積は定理 4.1 と同様に考
えると, 次のような性質を持つ.

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k} + z^{2 \cdot 3^k}) = 1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$

証明は, 定理 4.1 と全く同様にしてできる.

次に, 今の無限積の各項の係数の符号を一部分マイナスにした無限積について考察した.

考察 4.2. 無限積を展開した時の各項の符号の決まり方

1. $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k})$ を $\prod_{k=0}^{\infty} (1 - z^{2^k})$ にしてみると...

実際に展開をすると, べき指数を2進数展開した時に現れる1の個数により各項の
符号が決まることがわかった.

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - z^{2^k}) = 1 - z - z^2 + z^{1+2} - z^{2^2} \\ + z^{1+2^2} + z^{2+2^2} - z^{1+2+2^2} - \dots + (-1)^{d(n)} z^n + \dots$$

ここで, $d(n)$ は n を2進数展開した時に現れる1の個数を表す.

2. $\prod_{k=0}^{\infty}(1+z^{3^k}+z^{2\cdot 3^k})$ を $\prod_{k=0}^{\infty}(1+z^{3^k}-z^{2\cdot 3^k})$ にしてみると...

同様に, べき指数を3進数展開した時に現れる2の個数により各項の符号が決まる
ことがわかった.

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+z^{3^k}-z^{2\cdot 3^k}) = 1+z-z^2+z^3+z^{1+3}-z^{2+3}-z^{2\cdot 3}-z^{1+2\cdot 3} \\ +z^{2+2\cdot 3}+\dots+(-1)^{e(n)}z^n+\dots$$

ここで, $e(n)$ は n を3進数展開した時に現れる2の個数を表す.

5 無限積と代数関数, 超越関数

本節では, 無限積が代数関数で表されるか, 超越関数になるのかについて考える. まず,
言葉の説明から行う.

5.1 代数関数, 超越関数

定義 5.1 (代数的数, 超越数). 有理数係数の0でない多項式の根になる複素数のことを代
数的数という. つまり, 以下の方程式を満たすものである.

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad (a_i \in \mathbb{Q}).$$

また, 代数的数でない複素数のことを超越数という.

同様にして, 代数関数とは,

$$F(z)^n + a_{n-1}(z)F(z)^{n-1} + a_{n-2}(z)F(z)^{n-2} + \dots + a_0(z) = 0, \quad (a_i(z) \in \mathbb{C}(z))$$

を満たす関数 $F(z)$ のことをいう. ただし $\mathbb{C}(z)$ は, z の有理関数体を表す. これを \mathbb{C} 上の
代数関数と呼ぶが, $\mathbb{C}(z)$ 代わりに $\mathbb{Q}(z)$ を考えるとき, \mathbb{Q} 上の代数関数という. また, 超
越関数とは, 代数関数ではない関数のことをいう.

例 5.1. (代数関数, 超越関数)

- 代数関数

$$\sqrt{z+1}, \quad \frac{\sqrt[3]{z-2}}{z^2+1}.$$

- 超越関数

$$e^z, \quad \sin z, \quad \cos z, \quad \log z.$$

5.2 無限積の超越性

この節では、無限積と代数性、超越性について考える。
まず、代数的数、超越数に関する定理を紹介する。

定理 5.1. 無限積

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - z^{2^k})$$

で定義された正則関数 $f(z)$ に対して、 α ($0 < |\alpha| < 1$) を代数的数とすると、 $f(\alpha)$ は超越数である。特に $f(z)$ は \mathbb{Q} 上の代数関数ではない。

証明は [6, p.103 定理 4.4] を参照して欲しい。

同じ参考文献 [6] にある定理 5.1 の証明を参考にして、次の定理を証明できた。これが本論文の主結果である。

定理 5.2 (符号付 3 進数展開の超越性). 無限積

$$F(z) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k} - z^{2 \cdot 3^k}) \quad (*)$$

は超越関数である。

注意 1. 定理の式 * の右辺は考察 4.2 で見たように級数

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

の係数を 3 進数展開に従って符号を変えたものである。関数 $\frac{1}{1-z}$ はもちろん代数的なのだが、べき級数の符号を変えるという操作がいかに複雑な結果をもたらすかを、この定理は明らかにしている。

5.3 主結果の証明

定理 5.2 を証明する上で鍵となるのは、次の Mahler 型の関数等式である。

$$\begin{aligned} F(z) &= (1 + z - z^2)(1 + z^3 - z^{2 \cdot 3})(1 + z^{3^2} - z^{2 \cdot 3^2}) \dots \\ &= (1 + z - z^2)F(z^3) \end{aligned}$$

この関数等式は、二つ目以降の積 $F(z) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k} - z^{2 \cdot 3^k})$ を、元の関数 $F(z)$ に z^3 を代入した形と考えると簡単に導くことができる。

この関数等式を用いて、 $F(z)$ は $\mathbb{Q}(z)$ 上代数的であると仮定し矛盾を示す背理法でこの定理を証明する。

背理法の仮定より、 $F(z)$ は代数的であるから、ある有理式 $a_0(z), a_1(z), \dots, a_{n-1}(z)$ が存在して、(1) を満たす。

$$F(z)^n + a_{n-1}(z)F(z)^{n-1} + a_{n-2}(z)F(z)^{n-2} + \dots + a_0(z) = 0 \quad (1)$$

このような関係式の中で n が最小のものを考える。

(1) の z に z^3 を代入し、関数等式 $F(z) = (1 + z - z^2)F(z^3)$ を用いると

$$\begin{aligned} \left(\frac{F(z)}{1 + z - z^2} \right)^n + a_{n-1}(z^3) \left(\frac{F(z)}{1 + z - z^2} \right)^{n-1} \\ + a_{n-2}(z^3) \left(\frac{F(z)}{1 + z - z^2} \right)^{n-2} + \dots + a_0(z^3) = 0, \end{aligned}$$

両辺に $(1 + z - z^2)^n$ をかけると

$$\begin{aligned} F(z)^n + a_{n-1}(z^3)(1 + z - z^2)F(z)^{n-1} + a_{n-2}(z^3)(1 + z - z^2)^2F(z)^{n-2} \\ + \dots + a_0(z^3)(1 + z - z^2)^n = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ここで n の最小性より、(1)(2) の左辺の各項は等しいから、係数を比較すると

$$a_m(z) = a_m(z^3)(1 + z - z^2)^{n-m} \quad (n - m \geq 1) \quad (3)$$

が成り立つ。ここで $a_m(z) \in \mathbb{Q}(z)$ より

$$a_m(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad (p(z), q(z) \in \mathbb{Q}[z], \quad (p(z), q(z)) = 1 : \text{互いに素})$$

と書ける。これを (3) に適用すると

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z^3)}{q(z^3)}(1 + z - z^2)^{n-m}$$

となり、分母を払うと

$$p(z)q(z^3) = p(z^3)q(z)(1 + z - z^2)^{n-m}$$

となる． $(p(z), q(z)) = 1$ より $(p(z^3), q(z)^3) = 1$ がわかるので， $p(z^3)$ は $p(z)$ を割り切らなければいけない．従って $p(z)$ は定数である．よって

$$q(z^3) = q(z)(1 + z - z^2)^{n-m} \quad (4)$$

が成り立つ．

ここで $1 + z - z^2 = 0$ の解 $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ について考える． $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とおく．(4) に $z = \alpha$ を代入すると α は $1 + z - z^2 = 0$ の解だから，

$$q(\alpha^3) = q(\alpha)0^{n-m} = 0$$

となる．同様に (4) に $z = \alpha^3$ を代入すると $q(\alpha^3) = 0$ より

$$q((\alpha^3)^3) = q(\alpha^3)(1 + \alpha^3 - \alpha^{3 \cdot 2})^{n-m} = 0$$

となる．よって帰納法を用いて，

$$q(\alpha^{3^k}) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

がわかる．また， $|\alpha| > 1$ であるから， $\{\alpha^{3^k} | k = 0, 1, 2, \dots\}$ は全て異なっている．従って， $q(z)$ は無限個の零点を持つが，これは $q(z)$ が多項式であることに矛盾している．

よって背理法により $F(z)$ は超越関数である．

6 まとめと将来の課題

本研究でわかったことは，以下の3つである．

1. 次の無限積は

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{2^k}) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k} + z^{2 \cdot 3^k}) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

と表すことができ，共に代数関数である．また， z のべき指数が自然数の2進数，3進数展開となっている．

2. 次の無限積は

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - z^{3^k} + z^{2 \cdot 3^k}) = \frac{1}{1+z}$$

と表すことができ、代数関数である。また、符号は n を 3 進数展開したときの 1 の現れる個数で決まる。

3. 1 や 2 の無限積表示で係数の符号を変えた、

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - z^{2^k})$$

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k} - z^{2 \cdot 3^k})$$

は代数的ではなく、超越的である。また、展開したときの符号はそれぞれ、 z のべき指数を展開したときに現れる 1 の個数、3 進数展開したときに現れる 2 の個数に関係している。

主結果と同じように考察すると、以下のようなことがいえるのではないかと予想しているが、証明することはまだできていないので、将来の課題とする。

予想 6.1. α ($0 < |\alpha| < 1$) を代数的数とすると、

$$F(z) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{3^k} - z^{2 \cdot 3^k})$$

に $z = \alpha$ を代入して得られた $F(\alpha)$ は、超越数である。

予想 6.2. 無限積

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{d^k} + z^{2 \cdot d^k} + \dots + z^{(d-1) \cdot d^k}) = \frac{1}{1-z}$$

は代数関数だが、

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + z^{d^k} + z^{2 \cdot d^k} + \dots + z^{(d-1) \cdot d^k})$$

は超越関数である。

ここで、最高次の係数の符号が変わっていることに注意する。

最後に、1 年間指導して下さった西山亨教授に御礼申し上げたいと思います。お忙しい中、何度も相談や添削をしてくださり、とても感謝しています。1 年間ありがとうございました。

参考文献

- [1] E.M. スタイン, R. シャカルチ (新井仁之他訳), 複素解析, 日本評論社, 2009 .
- [2] E.M. スタイン, R. シャカルチ (新井仁之他訳), フーリエ解析入門, 日本評論社, 2007 .
- [3] 野海正俊, オイラーに学ぶ, 日本評論社, 2007 .
- [4] Oscar Ciaurri, Euler's Product Expansion for the Sine: An Elementary Proof, Mathematical Association of America, 2015.
- [5] 杉浦光夫, 解析入門 1, 東京大学出版会, 2012 .
- [6] 西岡久美子, 超越数とはなにか, 講談社, 2015 .