工程計画問題と
トロピカル多項式

長澤寛俊

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科
学籍番号：15111076　西山研究室　2015 年 2 月 20 日

目 次

1 序論 **3**

2 工程計画問題 **4**
2.1 工程計画問題とネットワーク図 4
2.2 隣接グラフと臨界パスの遷移 5

3 トロピカル幾何 **6**
3.1 トロピカル代数 6
3.2 トロピカル代数の可視化 8
3.3 トロピカル代数の計算規則 9

4 最短完了時間とトロピカル多項式 **10**
4.1 工程計画問題とトロピカル多項式 10

5 梯子型ネットワーク図 **11**

6 並列梯子型ネットワーク図 **13**
6.1 3 段並列梯子型ネットワーク図 13
6.2 前半の n 列の時間コスト 14
6.3 n, m 列の場合 16
6.4 ネットワーク図 $K_{n,m}$ の最短完了時間とトロピカル多項式 21
6.5 トロピカル曲線による可視化 22

7 参考文献 **25**

1 序論

工程計画問題とは，大規模なプロジェクトや作業の計画と進行を管理・運営する方法を考えることである．本研究では，ネットワーク図とトロピカル幾何の手法を用いて作業時間の効率化を図ることを考える．

作業を頂点として，直前直後の作業を有向辺で結ぶことことにより工程計画問題からネットワーク図を描くことができる．着手から全ての作業が完了するまでにかかる最小時間は最短完了時間と呼ばれ，最短完了時間はある特定のパス (着手から完了まで結んだ一続きの作業) 上の作業の時間コストの和の最大値として得られる (本文定理 2.1)．また，実数の足し算と掛け算の代わりに，最大値と足し算で考えるものをトロピカル代数という．本研究では，小林正典・小田切真輔両氏の紹介 [2] に沿って，工程計画問題をトロピカル多項式を用いて表すことができることを示し，時間コストが 3 種類しかないようなネットワーク図において，作業がある規則的な繰り返しであるような工程の最短完了時間を計算することを目標とする．本論で考察するのは，次のような 3 段並列梯子型のネットワーク図である．

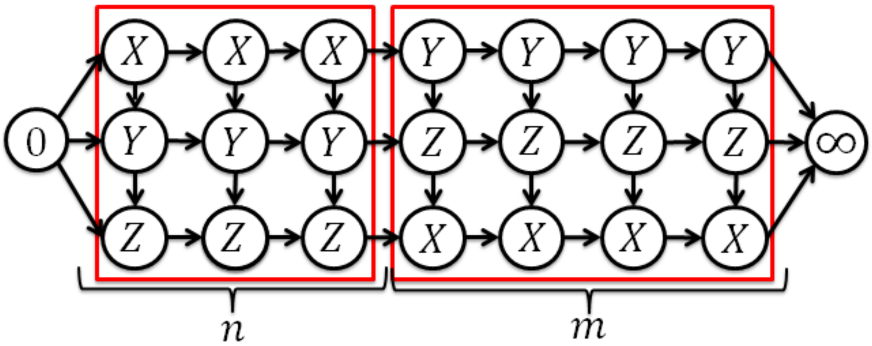

図 8. 3 段並列梯子型ネットワーク図 $K_{n,m}$

この図では，時間コストが X, Y, Z の 3 種類の作業が n 列つづき，その後ろに時間コストが入れ替わって，Y, Z, X である作業が m 列つづく．このようなネットワーク図を $K_{n,m}$ で表す．

主結果：ネットワーク図 $K_{n,m}$ の最短完了時間 $F_{K_{n,m}}$ は，トロピカル多項式によって

$$\begin{aligned} F_{K_{n,m}} = & \text{“}ZX^{n+1}Y \ + X^{n+1}YZ^m \ + X^2Y^nZ^m \\ & + X^{n+m}YZ \ + X^{m+1}XY^n \ + X^{m+1}YZ^n\text{”} \\ = & \max \left\{ \begin{array}{l} Z + (n+1)X + mY, \ (n+1)X + Y + mZ, \\ 2X + nY + mZ, \ (m+n)X + Y + Z, \\ (m+1)X + Z + nY, \ (m+1)X + Y + nZ \end{array} \right\} \end{aligned}$$

と表される．

この論文の構成は次のようになっている．最短完了時間はトロピカル多項式で表されるが，まずはこの事実を第 2 章で証明する．また，第 3 章ではトロピカル多項式の計算規則についてまとめる．第

4 章でトロピカル幾何と最短完了時間の関係を述べる．さらに，第 5 章以降では具体的なネットワーク図において，トロピカル代数の考え方を用いて最短完了時間がどのように計算できるかを示す．

2 工程計画問題

2.1 工程計画問題とネットワーク図

工程計画問題とは，大規模なプロジェクトや大がかりな作業と進行を管理・運営し，作業時間を削減し効率化する方法である．この研究では，全ての作業が終了するまでにかかる所要時間が最小になるように，各作業をどの順番で実行すれば良いかを決定する方法について考察する．

いくつかの作業からなる工程計画問題を考える．**作業**の全体を V で表す．各作業 $i \in V$ を実行するには**時間コスト** t_i がかかるとする．

定義 2.1. 頂点の全体を作業 V とし，直前直後の作業を有向辺で結んだ有向グラフを **ネットワーク図**といい， $I = (V, E)$ で表す．ただし E は有向辺の集合である．図で表すときには頂点を丸で表し，丸の中の番号は作業番号 $i \in V$ とする．場合によっては作業番号の代わりに時間コスト t_i を記すこともある．

ネットワーク図において，**後続作業は先行作業が全て完了してから着手することができると仮定しよう**．また，この研究では，工程計画問題において必ず実行しなければならない，始点の作業 (作業 0) と終点の作業 (作業 ∞) を仮想的につけるが，通常は始点と終点は省いて考えることが多い．

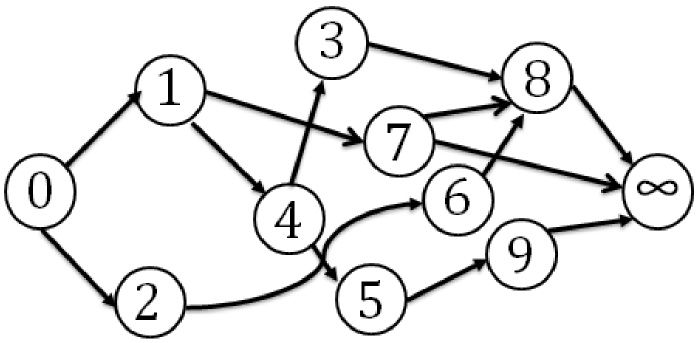

図 1. ネットワーク図

定義 2.2. 始点の作業 0 から順に後続作業（有向辺）を選び，終点の作業 ∞ まで有向辺を結んだ一続きの道を**パス**と呼ぶ．また，パスの全体を**経路空間**と呼び， $\mathrm{Path}(I)$ で表す．始点の作業 0 から全ての作業を実行し，終点の作業 ∞ で完了するまでにかかる最小時間を**最短完了時間**と呼ぶ．また全てのパスの中で最短完了時間を与えるようなパスを**臨界パス**と呼ぶ．臨界パスは 1 つとは限らない．

次の定理は工程計画問題においていちばん基本的である [1]．ここでは帰納法を用いた証明を与える．

定理 2.1. 工程計画問題の最短完了時間は各パスの時間コストの和の最大値で表すことができる.

[証明]. ネットワーク図 I を既に説明したように $I = (V, E)$ (V : 頂点の全体, E : 有向辺) のように表す. また, 最短完了時間は作業にかかる時間コスト $t_i (i \in V)$ が決まれば確定するので, $\{t_i \mid i \in V\}$ を変数とみた関数として

$$F_I(t_1, t_2, \dots) = F_I(t_i \mid i \in V) \tag{1}$$

のように表す. ネットワーク図 I が文脈から明らかなときは単に $F(t_i \mid i \in V)$ のように書くことにする.

I に対して, I 内のパスの全体の集合を $\mathrm{Path}(I)$ と書くのであった. また, パス P を $P = (0, i_1, i_2, \dots, i_l, \infty)$ と表したとき, P に含まれる頂点の時間コストの和を $W(P) = \sum_{k=1}^{l} t_{i_k}$ で表す. 以下これを簡単にパス P の時間コストと呼ぶ.

上の記号を用いると, 定理の主張「最短完了時間は各パスの時間コストの和の最大値で表すことができる」は式で表すと,

$$F_I(t_i \mid i \in I) = \max\{W(P) \mid P \in \mathrm{Path}(I)\} \tag{2}$$

となる. 以下これを $\#I$（作業の個数）に関する帰納法で示す.

$\#I = 1$ のとき成り立つことは明らかである. そこで, $\#I - 1$ 以下の頂点を持つ工程計画問題については定理が成り立つと仮定しよう.

I の ∞ と結ばれている頂点を $q_1, q_2, \dots, q_m$ とする. q_1 を含む全てのパスに現れる全ての作業 (ただし ∞ は除く) を集め, さらに q_1 を ∞ に置き換えてできる I の完全部分グラフを $I(q_1)$ と書く. 帰納法の仮定より、

$$F_I(q_j)(t_i \mid i \in I(q_j)) = \max\{W(P) \mid P \in \mathrm{Path}(I(q_j))\} \qquad (j = 1, 2, \dots, m)$$

と書くことができるので、

$$\begin{aligned} F_I(t_i \mid i \in I) &= \max\{F_I(q_j)(t_i \mid i \in I(q_j)) + t_{q_j} \mid j = 1, 2, \dots, m\} \\ &= \max\{W(P) + t_{q_j} \mid P \in \mathrm{Path}(I(q_j)),\ j = 1, 2, \dots, m\} \\ &= \max\{W(P \to t_{q_j}) \mid P \in \mathrm{Path}(I(q_j)),\ j = 1, 2, \dots, m\} \\ &= \max\{W(P) \mid P \in \mathrm{Path}(I)\} \end{aligned}$$

となり, (2) が成り立つことがわかる. □

2.2 隣接グラフと臨界パスの遷移

時間コストが変化することで臨界パスも遷移することがある. つまり,

臨界パスの遷移

臨界パス上にない作業で時間コストが増加
　　$\to$ その作業を含むパスが臨界パスになる.
時間コストが削減
　　$\to$ 今まで臨界パスであったものがそうでなくなる.

のようになることがある. このように, 遷移しあう臨界パスを図示するために, 以下のグラフを考

える．

定義 2.3. パスを頂点とし，臨界パスが遷移しあうような関係を辺で結んだグラフを**隣接グラフ**と呼ぶ．

図 1 のネットワーク図の隣接グラフは以下の図になる．

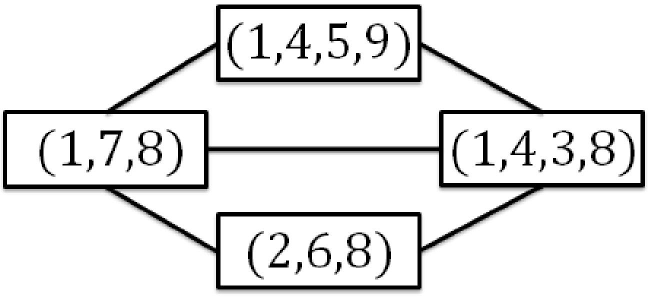

図 2. 隣接グラフ

例えば，パス (1,4,5,9) とパス (1,7,8) はある時間コストに対して同時に臨界パスとなる場合があり，パス (1,4,5,9) とパス (2,6,8) はどのような時間コストをとっても同時に臨界パスとはならず，他のパスを経由して遷移しなければならない．

3 トロピカル幾何

本研究では工程計画問題の最短完了時間を計算する際にトロピカル多項式とトロピカル曲線を用いるため，トロピカル幾何について紹介する．

3.1 トロピカル代数

ここではトロピカル幾何を記述するための道具として，まずトロピカル代数について解説する．

定義 3.1. 実数の集合で加法と乗法を考える代わりに，最大値と足し算を考えたものを，***MaxPlus* 代数**あるいは **トロピカル代数**と呼ぶ．つまり，実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ において，

$$a \oplus b := \max\{a, b\} = \text{“}a + b\text{”}$$
$$a \odot b := a + b = \text{“}ab\text{”}$$

と定めたものである．ここで “$a + b$” は $\max\{a, b\}$ を表す簡便な記法である． “ab” $= a + b$ も同様の記法である．

これらの演算は，普通の足し算と掛け算の場合と同様に，

結合法則　$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$, $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$

交換法則　$b \oplus a = a \oplus b$, $b \odot a = a \odot b$

分配法則　$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

を満たすことが確かめられる．

また，トロピカル代数の独特の性質として，

$$a \oplus a = \max\{a, a\} = a$$

となるため，$\oplus$ のべき等法則 $a \oplus a = a$ が成り立つ．ただし，$\oplus$ の逆演算つまり,「引き算」は存在しない．実際，a 以下の任意の b に対して，$a \oplus b = \max\{a, b\} = a$ となるので，『$a - a$』は 1 つに定まらない．また，$a > b$ のとき a にどんな値を「加え」ても b にならない．なぜなら，$a \oplus b = \max\{a, b\} = a \neq b$ であるからである．したがって,『$b - a$』は存在しない．

0 は $0 \odot a = 0 + a = a$ を満たすから，通常の掛け算で 1 が $1 \cdot a = a$ を満たすことに対応し，トロピカル乗法 $\odot$ の単位元を与える．混乱しないよう，0 を e と書くこともある．任意の実数 a に対し，$a \odot (-a) = e$,（つまり，$a + (-a) = 0$) であるから $\odot$ に関する「逆数」 $-a$ が存在する．

任意の a に対し，$-\infty \oplus a = a$ (つまり $\max\{-\infty, a\} = a$) とするのは自然であろうから，普通の 0 に対応する数として $-\infty$ を導入する．$-\infty$ は ϵ とも書かれる．実数の全体 R に最小元 ϵ を付け加えた集合を T と書くことにする．この ϵ は $\odot$ に関しては $\epsilon \odot a = \epsilon$ (つまり $(-\infty) + a = a$ ，吸収的零) を満たすとする．ϵ を含めても上記の性質は成り立つ．ただし ϵ の「逆数」は T には存在しない．

以上の議論から「逆数」についてまとめると，

$$(-a) \odot a = a \odot (-a) = 0$$
$$(-a) \oplus a = a \oplus (-a) = \max\{a, -a\} = a$$

より，$-\infty$ 以外には $\odot$ の逆元が存在する．$\oplus$ の逆元は存在しない．

加減乗除ができる集合を **体** と呼ぶが，T では加法の逆元が存在しない，つまり「減法」ができないので，T を **トロピカル半体** と呼ぶ.

max と+を $\oplus$ と $\odot$ で書くほかに，+と×でそれぞれ表し，“$\cdots$” でくくる書き方もある．以下これを使うが，ここで単項式のトロピカル化の例をあげておく．

例 3.1. x,y を変数とすると，“$a \cdot b$”$= a + b$ であるから，単項式は，

$$“2x^3y” = “2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y” = 2 + x + x + x + y = 2 + 3x + y$$
$$“3x^2y^4” = “3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y” = 3 + x + x + y + y + y = 3 + 2x + 3y$$

と計算できる．また，“$a + b = \max\{a, b\}$” なので，多項式のトロピカル化は次のように計算することができる．

$$“2x^3y + 3x^2y^4” = \max\{2 + 3x + y, 3 + 2x + 4y\}$$

多項式をトロピカル化すると一般にいくつかの一次関数の最大値をとるような関数が得られ，このような関数を **トロピカル多項式**という.

3.2 トロピカル代数の可視化

式で代数的に与えられた情報は，機械的に計算することができる．その反面，図を描いて幾何的に考えると，直観的に把握しやすい．そこで，代数で与えられた情報を，トロピカル幾何学を用いて可視化することを考える．

定義 3.2. $X_1, \ldots, X_N$ を変数とし，$\{X_i\}$ の 1 次関数の最大値として表される関数 $F(X_1, \ldots X_N)$ を**トロピカル多項式**と呼ぶ．ただし，1 次関数の係数は自然数とする．例えば $(2X_1 + 3X_2 + 5$ で $, 2, 3, 5$ は自然数となる)．また， 1 次式は $3X_1 + 5X_2 + 4 =$ “$4X_1^3 X_2^5$” と表されるので，これを**トロピカル単項式**ともいう．

関数 F のグラフを描くと，これはいくつかの超平面の一部を組み合わせたものになるが，それが「折れ曲がっている」部分，つまり最大値を与える 1 次関数が複数存在するような点の全体 $V(F)$ を**トロピカル超曲面**と呼ぶ．

今回の研究では，2 変数 X, Y のトロピカル多項式 $F(X, Y)$ に対し，その **トロピカル平面曲線** $V(F)$ を考えることにする．トロピカル曲線は， $F(X, Y)$ が最大値を与える 1 次式が複数存在するような (X, Y) をプロットした線分と (半) 直線からなる図形である．

例 3.2. 以下の 2 次多項式のトロピカル曲線を図示してみよう．

$$
\begin{aligned}
F(X, Y) &= \text{“}3X^2 + 3Y^2 + 4XY + 3X + 3Y + 1\text{”} \\
&= \max\{3 + 2X, 3 + 2Y, 4 + X + Y, 3 + X, 3 + Y, 1\}
\end{aligned}
$$

この場合，F のグラフ $Z = F(X, Y)$ は空間内の多面体で表され，トロピカル曲線は (X, Y) 平面上の赤い直線になる．

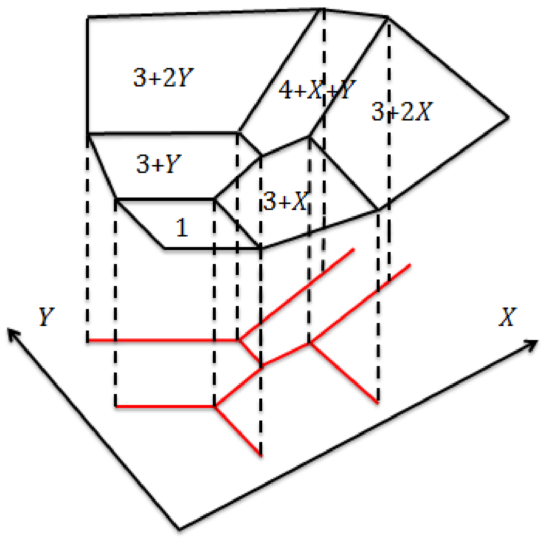

図 3. トロピカル 2 次関数のグラフとトロピカル 2 次曲線

ここで，代数的に与えられた情報をトロピカル代数の手法を用いて機械的に計算することを考える．そこで，まずトロピカル多項式の計算規則を紹介する．

3.3 トロピカル代数の計算規則

記法を簡単にするために

$$A \sim B \iff \text{“}A\text{”} = \text{“}B\text{”}$$

と書くことにしよう．すると，次のような計算規則が成り立つ．

$$\begin{cases} A \cdot C \sim B \cdot C \\ A + C \sim A + B \end{cases} \iff \begin{cases} \text{“}A \cdot C\text{”} = \text{“}B \cdot C\text{”} \\ \text{“}A + C\text{”} = \text{“}A + B\text{”} \end{cases} \tag{3}$$

$$A(B+C) \sim A \cdot B + A \cdot C \iff \text{“}A(B+C)\text{”} = \text{“}A \cdot B + A \cdot C\text{”} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &(X_1 + \cdots + X_k)^n \sim X_1^n + \cdots + X_k^n \\ &\qquad \iff \text{“}(X_1 + \cdots + X_k)^n\text{”} = \text{“}X_1^n + \cdots + X_k^n\text{”} \end{aligned} \tag{5}$$

[証明]. (3) も同様であるため，(4) を証明する．左辺を計算すると，

$$\begin{aligned} \text{“}A(B+C)\text{”} &= A + \max\{B, C\} \\ &= \max\{A+B, A+C\} \\ &= \text{“}A \cdot B + B \cdot C\text{”} \end{aligned}$$

となり，成り立つことがわかる．

次に (5) を証明しよう．左辺をトロピカル化し計算すると，

$$\begin{aligned} \text{“}(X_1 + X_2 + \cdots + X_k)^n\text{”} &= n \cdot \max\{X_1, X_2, \ldots, X_k\} \\ &= \max\{nX_1, nX_2, \ldots, nX_k\} \\ &= \text{“}X_1^n + X_2^n + \cdots + X_k^n\text{”} \end{aligned}$$

となる．これは

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_k)^n \sim X_1^n + X_2^n + \cdots + X_k^n$$

を意味する． □

通常の演算では，$X + X = 2X$ であるが，トロピカル化すると，

$$\begin{aligned} \text{“}X + X\text{”} &= \max\{X, X\} = X \\ \text{“}2X\text{”} &= 2 + X \end{aligned}$$

となり，

$$\text{“}X + X\text{”} \neq \text{“}2X\text{”}$$

のように結果は等しくなくなってしまう．したがってトロピカル多項式の計算は注意して行う必要がある．また，負の数，引き算，分数が現れるとうまく計算できないことに注意してほしい．

4　最短完了時間とトロピカル多項式

4.1　工程計画問題とトロピカル多項式

工程計画問題に付随するネットワーク図を第 2 章のように $I=(V,E)$ で表す．最短完了時間は，工程計画問題に沿って時間コスト t_i $(i \in V)$ のいくつかの最大値をとったもので得られるのであった (定理 2.1)．パス $(0,i_1,i_2,\ldots,i_l,\infty)$ の時間コストの和は，

$$t_{i_1}+t_{i_2}+\cdots+t_{i_l}=\text{“}t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_l}\text{”}$$

のようにトロピカル単項式として表すことができ，その最大値はトロピカルな和をとることにあたる．したがって,「工程計画問題の最短完了時間は各パスの時間コストの最大値で表すことができる」(定理 2.1) という事実より，最短完了時間 $F(t_1,\ldots,t_N)$ はトロピカル多項式で表すことができる．つまり，

$$\begin{aligned} F(t_1,\ldots,t_N) &= \max\{t_{i_1}+\cdots+t_{i_l} \mid (0,i_1,\ldots,i_l,\infty)\in \mathrm{Path}(I)\} \\ &= \text{“}\sum_{(i_1,\ldots,i_l)} t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_l}\text{”} \end{aligned} \tag{6}$$

と書くことができる．ただし，最後の和はすべてのパス $(0,i_1,\ldots,i_l,\infty)\in \mathrm{Path}(I)$ にわたる和である．このアイデアは小林・小田切両氏 [2] によるものである．

少し例をあげよう．以下のネットワーク図 I の最短完了時間をトロピカル多項式で表してみよう．丸の中の番号は作業番号 $i \in V$ とする．

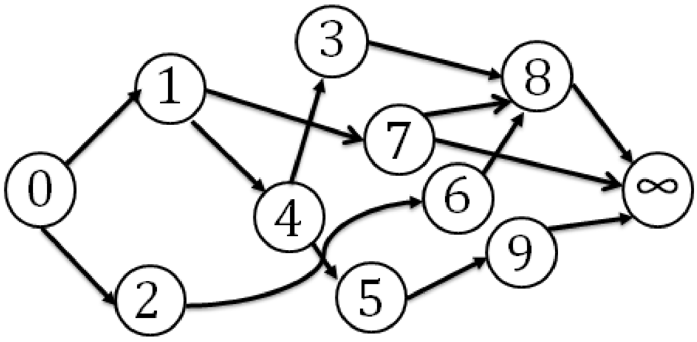

図 4. ネットワーク図

このネットワーク図には，$(1,4,5,9),(1,4,3,8),(1,7,8),(2,6,8)$ という 4 種類のパスしかないので，最短完了時間 F は時間コスト $t_1,\ldots,t_9$ を変数とみることで，

$$\begin{aligned} &F_I(t_1,\ldots,t_9) \\ &= \max\{t_1+t_4+t_5+t_9, t_1+t_4+t_3+t_8, t_1+t_7+t_8, t_2+t_6+t_8\} \\ &= \text{“}t_1t_4t_5t_9+t_1t_4t_3t_8+t_1t_7t_8+t_2t_6t_8\text{”} \end{aligned}$$

と表すことができる．これを定理の形にまとめておこう．

定理 4.1. ネットワーク図 $I=(V,E)$ をもつ工程計画問題の最短完了時間 $F_I(t_i \mid i\in V)$ は，トロピカル多項式 (6) で与えることができる．

5　梯子型ネットワーク図

前節では，工程計画問題の最短完了時間はトロピカル多項式で表すことができることを述べた．この章では，規則的なネットワーク図をもつ具体的な工程計画問題に対して，トロピカル多項式を用いて最短完了時間を求めることを考える．まず一番簡単な場合から考察をはじめよう．

下図 (図 5) のように時間コストが X,Y の 2 種類の作業が n 列あるようなネットワーク図を考える．ただし，ここでは頂点の丸の中の番号は，作業番号の代わりに時間コスト X,Y を記入した．

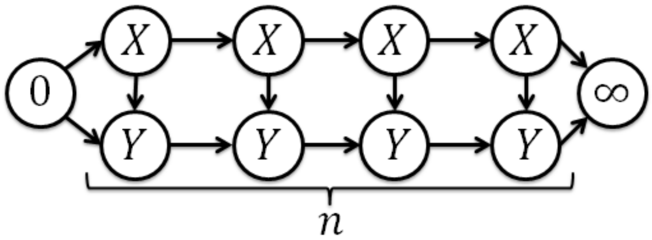

図 5 . 梯子型ネットワーク図 L_n

本来の工程計画問題では，時間コストは $2n$ 個の変数で表わされるはずであるが，それでは複雑すぎるので，このような簡単な場合から計算をはじめることにした．

図 5 のグラフの上段の時間コストが X である頂点に左から順に $1,2,\ldots,n$ と番号をつける．同様に，下段の頂点に左から順に $1',2',\ldots,n'$ と番号をつける．つまり，

$$V=\{1,2,\ldots,n\}\cup\{1',2',\ldots,n'\}$$
$$E=\{(i\to i+1),(i'\to(i+1)')\mid 0\le i\le n\}\cup\{(i\to i')\mid 1\le i\le n\}$$

である．ただし，$(n+1)$ 番目の頂点は ∞ と解釈する．ネットワーク図の部分グラフを以下のように場合分けして考えよう．

- L_n を図 5 のグラフ全体を表す.
- A_n を L_n から 有向辺 $0\to 1'$ を省いた下図の部分グラフとする.

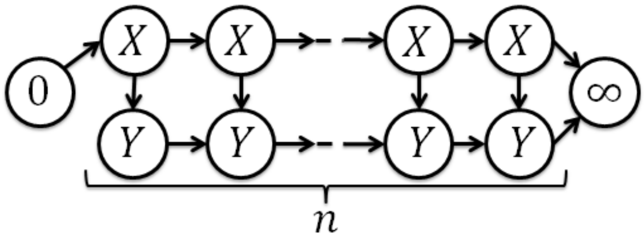

図 6. A_n のグラフ

- B_n を $0, 1', 2', \ldots, n', \infty$ を頂点として含む下図の完全部分グラフとする．

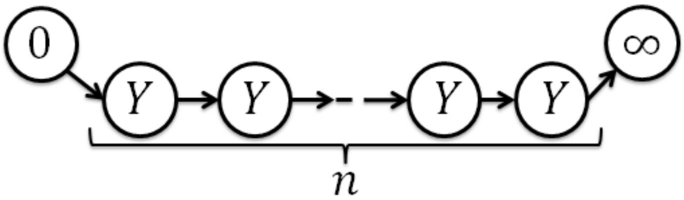

図 7. B_n のグラフ

補題 5.1. L_n の任意のパスは A_n のパスか B_n のパスであり，両者に含まれる共通のパスはない．

[**証明**]. A_n は L_n から 有向辺 $0 \to 1'$ を省いたグラフ，B_n は $0, 1', 2', \ldots, n', \infty$ を頂点として含むグラフであった．よって，$0 \to 1$ の頂点を通るパスと $0 \to 1'$ の頂点を通るパスに場合分けすることでわかる． □

ここで，それぞれのネットワーク図の時間コストを表すトロピカル多項式を考える．

A_n には，時間コストが X である $0, 1, \ldots, n, \infty$ の頂点を通るパス，時間コストが X である頂点を k 個通るようなパス $(0, 1, 2, \ldots, k, k', k+1', \ldots, n', \infty)$ がある．1 つ目のパスは，時間コスト X である頂点を n 個通る．また，2 つ目のパスは，時間コスト X である頂点を k 個，時間コストが Y である頂点は $n-k+1$ 個通るため，時間コストは X^kY^{n-k+1} と表せる．だから，

$$F_{A_n}(X, Y) = \text{“}X^n + XY^n + X^2Y^{n-1} + \cdots + X^kY^{n-k+1} + \cdots + X^nY\text{”}$$

となる．

B_n は，時間コストが Y である $0, 1', \ldots, n', \infty$ の頂点を通るパスのみ含むため，

$$F_{B_n}(Y) = \text{“}Y^n\text{”}$$

となる．

L_n には，図 5 に現れるすべてのパスがあるため，

$$\begin{aligned}
F_{L_n} &= \max\{F_{A_n}(X, Y), F_{B_n}(Y)\} \\
&= \text{“}X^n + XY^n + X^2Y^{n-1} + \cdots + X^nY + Y^n\text{”} \\
&= \text{“}X^n + XY(Y^{n-1} + XY^{n-2} + \cdots + X^{n-2}Y + X^{n-1}) + Y^n\text{”} \\
&= \text{“}X^n + XY(Y + X)^{n-1} + Y^n \\
&= \max\{nX, X + Y + (n-1)\max\{Y, X\}, nY\} \\
&= \max\{X + nY, Y + nX\}
\end{aligned}$$

この計算の第 4 式目に，トロピカル演算の計算規則 (3) が使われていることに注意してほしい．

これより，最短完了時間は，

$$X \geq Y \text{のとき} \ Y + nX$$
$$Y \geq X \text{のとき} \ X + nY$$

となることがわかり，臨界パスは，

- $Y + nX$ の場合：$0 \to X \to X \to \cdots \to X \downarrow Y \to \infty$
- $X + nY$ の場合：$0 \to X \downarrow Y \to Y \to \cdots \to Y \to \infty$

である．

6 並列梯子型ネットワーク図

5 章の梯子型ネットワーク図では，最短完了時間はわざわざトロピカル多項式を計算しなくても組み合わせ論的に考えても明らかであるが，より複雑な次の場合を考察するための準備として，前節ではわかりやすい例で計算を紹介したのであった．

6.1 3 段並列梯子型ネットワーク図

この節では，図 8 のように時間コストが X, Y, Z の 3 種類の作業が n 列つづき， その後ろに，時間コストが入れ替わって，Y, Z, X である作業が m 列あるようなネットワーク図を考えよう．これを $K_{n,m}$ で表す．ただし，頂点の丸の中の番号は，第 5 章の例と同様に作業番号の代わりに時間コスト X, Y, Z を記すことにする．

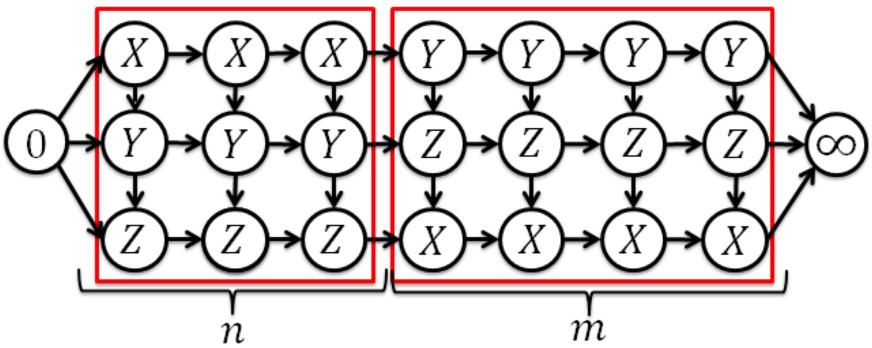

図 8. 3 段並列梯子型ネットワーク図 $K_{n,m}$

このネットワーク図の最短完了時間を与えるトロピカル多項式 $F_{K_{n,m}}(X, Y, Z)$ を求めることがこの章の目的である．

6.2 前半の n 列の時間コスト

3 段並列梯子型ネットワーク図の最初の n 列の部分のみを考えよう．
図 8 のグラフに

上段の時間コストが X である頂点に左から順に $1, 2, \ldots, n$
中段の時間コストが Y である頂点に左から順に $1', 2', \ldots, n'$
下段の時間コストが Z である頂点に左から順に $1'', 2'', \ldots, n''$

と番号をつける．
図 8 において後半の m 列の部分が存在しないネットワーク図を $K_n = K_{n,0}$ で表そう．

- A_n を $0, 1, \ldots, n, \infty$ を頂点として含む下図の K_n の完全部分グラフとする．

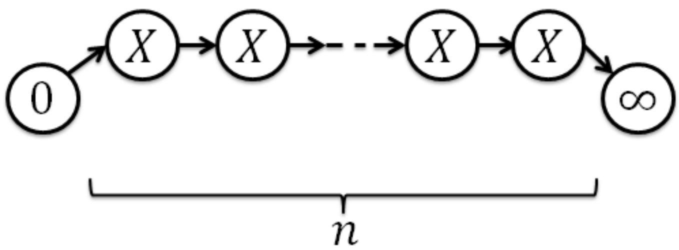

図 9. A_n のグラフ

この場合は明らかに時間コストを表すトロピカル多項式は,

$$F_{A_n}(X) = \text{“}X^n\text{”}$$

である．

- B_n を 下図 (図 10) の K_n の部分グラフとする．これは K_n のパスのうち有向辺 $0 \to 1$ および $n' \to \infty$ を含むパスの全体を含んでいる．

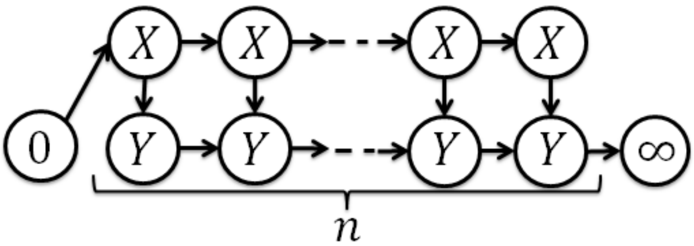

図 10. B_n のグラフ

第 5 章と同様にして，時間コストが X である頂点をちょうど k 個通るとき，辺 $(k \to k')$ を通らなければならないため，時間コスト Y の頂点を $n-k+1$ 個通ることがわかる．よって，時間コストを表すトロピカル多項式は，

$$
\begin{aligned}
F_{B_n}(X,Y) &= \text{“}XY^n + X^2Y^{n-1} + \cdots + X^nY\text{”} \\
&= \text{“}\sum_{\substack{k_1,k_2 \leq 1 \\ k_1+k_2=n+1}} X^{k_1}Y^{k_2}\text{”} \\
&= \text{“}XY(Y^{n-1} + XY^{n-2} + \cdots + X^{n-1})\text{”} \\
&= \text{“}XY(X+Y)^{n-1}\text{”} \\
&= X + Y + (n-1)\max\{X,Y\} \\
&= \max\{X+nY, Y+nX\}
\end{aligned}
$$

である．

- C_n を 下図 (図 11) の K_n の部分グラフとする．これは，K_n のパスのうち有向辺 $0 \to 1$ および n'' -

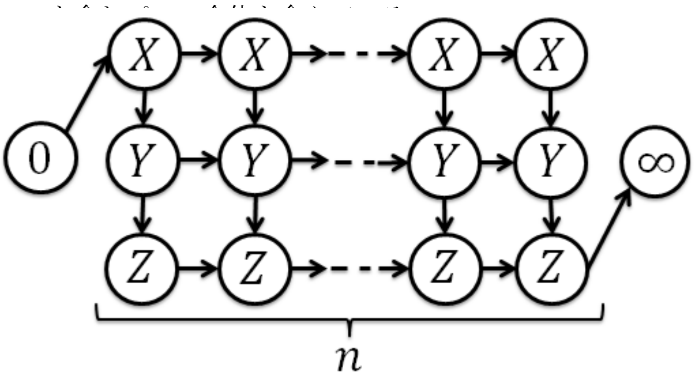

図 11. C_n のグラフ

最初に中段へと移動する有向辺を $i \to i'$ 次に下段へと移動する有向辺を $j' \to j''$ $(i \leq j)$ とすると，時間コスト X の頂点を $k_1 = i$ 個， Y の頂点を $k_2 = j-i+1$ 個， Z の頂点を $k_3 = n-j+1$ 個通る．パスは中段，下段へと 2 段階移動しなければならない．全部で $n+2$ 個の頂点を通るため， 時間コストは $X^{k_1}Y^{k_2}Z^{k_3}$ $(k_1+k_2+k_3 = n+2)$ と表すことができる．だから，

$$
\begin{aligned}
F_{C_n}(X,Y,Z) &= \text{“}X^nYZ + \cdots + XYZ^n\text{”} \\
&= \text{“}\sum_{\substack{k_1,k_2,k_3 \leq 1 \\ k_1+k_2+k_3=n+2}} X^{k_1}Y^{k_2}Z^{k_3}\text{”} \\
&= \text{“}XYZ(X^{n-1}YZ + \cdots + XYZ^{n-1})\text{”} \\
&= \text{“}XYZ(X+Y+Z)^{n-1}\text{”} \\
&= \text{“}X^nYZ + XY^nZ + XYZ^n \\
&= \max\{nX+Y+Z, X+nY+Z, X+Y+nZ\}
\end{aligned}
$$

である．

6.3 n, m 列の場合

この場合，時間コストが Y, Z, X の作業が m 列ある後半の部分 $K_{0,m}$ は，前半の n, X, Y, Z を m, Y, X, Z に変えることで 5.2 節と同様に計算できる．そこで，いよいよ時間コストが X, Y, Z の作業が n 列， Y, Z, X の作業が m 列ある全体の場合 $K_{n,m}$ を考えることにしよう．

前列の n 列と後半の m 列をつなぐ有向辺は 3 本あるが，それを上から順に $e(X \to Y), e(Y \to Z), e(Z \to X)$ と書くことにする．これら 3 の有向辺を含むパスをによって場合分けて時間コストをトロピカル多項式で表してみよう．

(ア) まず，n 列のグラフから m 列のグラフへと進む際に，上段の有向辺 $e(X \to Y)$ を通る下図の部分グラフを考える．

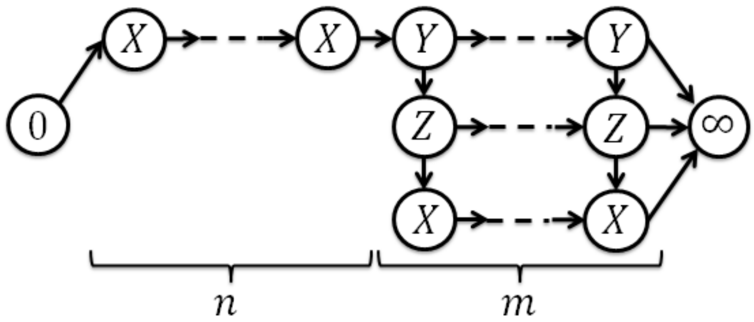

図 12. 上段の有向辺を通るグラフ

有向辺 $e(X \to Y)$ 以降は 6.2 節で考えた，A_m , B_m , C_m に分解するから，前半の部分が，

$$F_{A_n}(X) = \text{“}X^n\text{”}$$

後半の部分が，

$$\begin{aligned} F_{A_m}(Y) &= \text{“}Y^m\text{”} \\ F_{B_n}(Y, Z) &= \text{“}YZ(Y+Z)^{m-1}\text{”} \\ F_{C_m}(Y, Z, X) &= \text{“}YZX(Y+Z+X)^{m-1}\text{”} \end{aligned}$$

であることを考えれば，時間コストは，

$$\begin{aligned} &\text{“}X^n(Y^m + YZ(Y+Z)^{m-1} + YZX(Y+Z+X)^{m-1})\text{”} \\ &= \text{“}X^nYZ(Y+Z)^{m-1} + X^{n+1}YZ(X+Y+Z)^{m-1}\text{”} \\ &= \max\left\{ \begin{array}{l} nX + Y + Z + (m-1)\max\{Y, Z\}, \\ (n+1)X + Y + Z + (m-1)\max\{X, Y, Z\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

である．ここで，第 1 式目の Y^m は $Y^m < Y^mZ$ となるため省く．

(イ) 次に，中段の有向辺 $e(Y \to Z)$ を通る下図の部分グラフを考える．

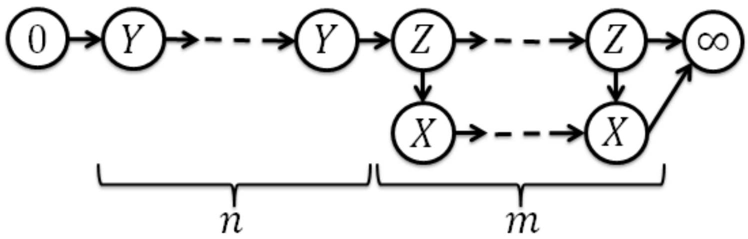

図 13. 中段の有向辺を通るグラフ 1 (前半が $A_n(Y)$)

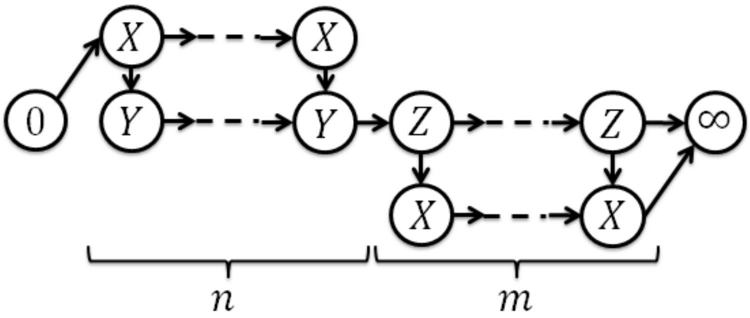

図 14. 中段の有向辺を通るグラフ 2 (前半が $B_n(X,Y)$)

有向辺 $e(Y \to Z)$ 以降は 6.2 節で考えた，$A_m(Z)$, $B_m(Z,X)$ に分解し，前半の部分もやはり，$A_n(Y)$, $B_n(X,Y)$ を通ることになるのでこれを場合分けしよう．図 13 のグラフの前半の部分は，

$$F_{A_n}(Y) = \text{“}Y^n\text{”}$$

後半の部分が，

$$F_{A_m}(Z) = \text{“}Z^m\text{”}$$
$$F_{B_m}(Z,X) = \text{“}ZX(Z+X)^{m-1}\text{”}$$

であったことから，グラフの記号と紛らわしいが，記号を濫用して

$$A_n(Y) = Y^n$$
$$B_n(X,Y) = XY(X+Y)^{n-1}$$
$$A_m(Z) = Z^m$$
$$B_m(Z,X) = ZX(Z+X)^{m-1}$$

などと書くことにする．時間コストを表すトロピカル多項式は，

$$\begin{aligned}
&B_n(X,Y)(A_m(Z)+B_m(Z,X))\\
&=XY(X+Y)^{n-1}(Z^m+ZX(Z+X)^{m-1})\\
&\sim XY(X^{n-1}+Y^{n-1})(Z^m+ZX(Z^{m-1}+X^{m-1}))\\
&=(X^nY+Y^nX)(Z^m+Z^mX+ZX^m)
\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}
&\text{“}(X^nY+Y^nX)(Z^m+Z^mX+ZX^m)\text{”}\\
&\text{“}(X^nY+Y^nX)(Z^mX+ZX^m)\text{”}\\
&=\max\{nX+Y,nY+X\}+\max\{mZ+X,Z+mX\}
\end{aligned}$$

である．ここで，第 1 式目の Z^m は，$Z^m<Z^mX$ となるため省く．
　また，図 14 のグラフは，前半部分は，

$$F_{B_n}(X,Y)=\text{“}XY(X+Y)^{n-1}\text{”}$$

後半の部分が，

$$\begin{aligned}
F_{A_m}(Z)&=\text{“}Z^m\text{”}\\
F_{B_m}(Z,X)&=\text{“}ZX(Z+X)^{m-1}\text{”}
\end{aligned}$$

であるから，時間コストを表すトロピカル多項式は，

$$\begin{aligned}
&A_n(Y)A_m(Z)+A_n(Y)B_m(Z,X)\\
&=A_n(Y)(A_m(Z)+B_m(Z,X))
\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}
&\text{“}A_n(Y)(A_m(Z)+B_m(Z,X))\text{”}\\
&=\text{“}Y^n(Z^m+ZX(Z+X)^{m-1})\text{”}\\
&=nY+(Z+X)+(m-1)\max\{Z,X\}
\end{aligned}$$

と計算できる．ここで，第 2 式目の Z^m は，$Z^m<Z^mX$ となるため省く．

(ウ) 最後に，下段の有向辺 $e(Z\to X)$ を通る場合を考える．

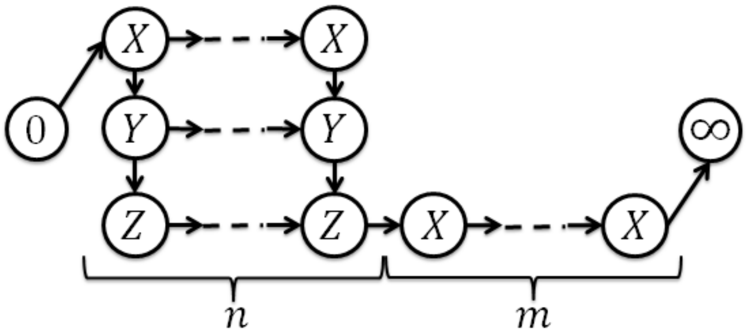

図 15. 下段の有向辺を通るグラフ 1

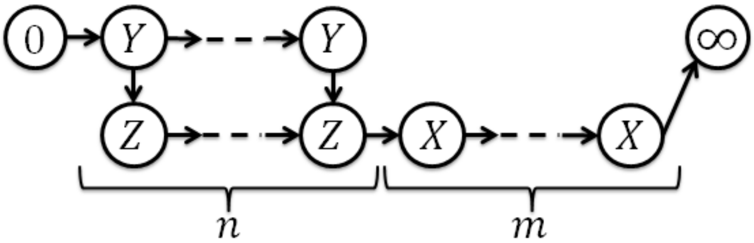

図 16. 下段の有向辺を通るグラフ 2

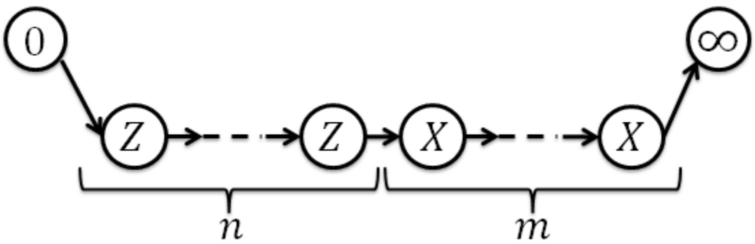

図 17. 下段の有向辺を通るグラフ 3

有向辺 $e(Z \to X)$ 以降は 6.2 節で考えた，$A_m(X)$ に分解し，前半の部分もやはり，$A_n(X)$ ，$B_n(Y,Z)$ ，$C_n(X,Y,Z)$ を通ることになるのでこれを場合分けしよう．図 15 のグラフの前半の部分は,

$$F_{C_n}(X,Y,Z) = \text{``}XYZ(X+Y+Z)^{n-1}\text{''}$$

後半部分が,

$$F_{A_m}(X) = \text{``}X^m\text{''}$$

であるから，時間コストを表すトロピカル多項式は,

$$C_n(X,Y,Z)A_m(X)$$

だから,

$$\begin{aligned}&\text{“}C_n(X,Y,Z)A_m(X)\text{”}\\&= \text{“}XYZ(X+Y+Z)^{n-1}X^m\text{”}\\&= (X+Y+Z)+(n-1)\max\{X,Y,Z\}+mX\end{aligned}$$

である．図 16 のグラフの前半部分は,

$$F_{B_n}(Y,Z) = \text{“}YZ(Y+Z)^{n-1}\text{”}$$

後半部分が,

$$F_{A_m}(X) = \text{“}X^m\text{”}$$

であるから，時間コストを表すトロピカル多項式は,

$$B_n(Y,Z)A_m(X)$$

だから,

$$\begin{aligned}&\text{“}B_n(Y,Z)A_m(X)\text{”}\\&= \text{“}YZ(Y+Z)^{n-1}X^m\text{”}\\&= (Y+Z)+(n-1)\max\{Y,Z\}+mX\end{aligned}$$

である．図 17 のグラフの前半部分は,

$$F_{A_n}(Z) = \text{“}X^n\text{”}$$

後半部分が,

$$F_{A_m}(X) = \text{“}X^m\text{”}$$

であるから，時間コストを表すトロピカル多項式は,

$$A_n(Z)A_m(X)$$

だから,

$$\begin{aligned}&\text{“}A_n(Z)A_m(X)\text{”}\\&= \text{“}Z^nX^m\text{”}\\&= nZ+mX\end{aligned}$$

である．以上で (ア),(イ),(ウ) の場合分けが終了した．次節でこれをまとめる．

6.4 ネットワーク図 $K_{n,m}$ の最短完了時間とトロピカル多項式

前節で $K_{n,m}$ を図 8 のグラフとおいた．したがって，$K_{n,m}$ はこのネットワーク図に存在するすべてのパスを含む．また，前節の (ア),(イ),(ウ) で考えて，グラフの中に共通のパスはない．このネットワーク図の最短完了時間 $F_{K_{n,m}}$ は今までの計算結果を合わせると，次のように計算で求めることができる．

$$
\begin{aligned}
F_{K_{n,m}}(X,Y,Z) = \text{“}&(A_n(X)(A_m(Y)+B_m(Y,Z)+C_m(Y,Z,X)) \qquad (\leftarrow (\text{ア}))\\
&+\ B_n(X,Y)(A_m(Z)+B_m(Z,X))+\ A_n(Y)(A_m(Z)+B_m(Z,X)) \qquad (\leftarrow (\text{イ}))\\
&+\ C_n(X,Y,Z)A_m(X)+\ B_n(Y,Z)A_m(X)+\ A_n(Z)A_m(X))\text{”} \qquad (\leftarrow (\text{ウ}))
\end{aligned}
$$

$$
= \max\left\{\begin{array}{l}
\text{“}A_n(X)(A_m(Y)+B_m(Y,Z)+C_m(Y,Z,X))\text{”},\\
\text{“}B_n(X,Y)(A_m(Z)+B_m(Z,X))\text{”},\\
\text{“}A_n(Y)(A_m(Z)+B_m(Z,X))\text{”},\ \text{“}C_n(X,Y,Z)A_m(X)\text{”},\\
\text{“}B_n(Y,Z)A_m(X)\text{”},\ \text{“}A_n(Z)A_m(X)\text{”}
\end{array}\right\}
$$

となる．このトロピカル多項式 $F_{K_{n,m}(X,Y,Z)}$ の一つ一つの項を計算すると第 1 項目は,

$$
\begin{aligned}
&\text{“}A_n(X)(A_m(Y)+B_m(Y,Z)+C_m(Y,Z,X))\text{”}\\
&= nX+\max\{Z+mY, Y+mZ, Z+X+mY, Y+X+mZ, Y+Z+mX\}\\
&= \max\{Z+(n+1)X+mY, Y+(n+1)X+mZ, Y+Z+(n+m)X\}
\end{aligned}
$$

第 2 項目は,

$$
\begin{aligned}
&\text{“}B_n(X,Y)(A_m(Z)+B_m(Z,X))\text{”}\\
&= \max\{nX+Y, nY+X\}+\max\{mZ+X, Z+mX\}\\
&= \max\left\{\begin{array}{l}
(n+1)X+Y+mZ, (n+m)X+Y+Z,\\
2X+nY+mZ, (1+m)X+nY+Z
\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

第 3 項目は,

$$
\begin{aligned}
&\text{“}A_n(Y)(A_m(Z)+B_m(Z,X))\text{”}\\
&= nY+\max\{mZ, (Z+X)+(m-1)\max\{Z,X\}\}\\
&= \max\{nY+X+mZ, nY+Z+mX\}
\end{aligned}
$$

第 4，5，6 項目を $A_m(X)$ でまとめて計算すると,

$$
\begin{aligned}
&\text{“}C_n(X,Y,Z)A_m(X)+B_n(Y,Z)A_m(X)+A_n(Z)A_m(X)\text{”}\\
&= mX+\max\left\{\begin{array}{l}
(Y+Z)+(n-1)\max\{Y,Z\},\\
(X+Y+Z)+(n-1)\max\{X,Y,Z\}
\end{array}\right\}\\
&= \max\{(m+n)X+Y+Z, (m+1)X+Z+nY, (m+1)X+Y+nZ\}
\end{aligned}
$$

となることがわかる．ここで第 1, 2 項目の計算結果として得られる

$$Y+(n+1)X+mZ,\ Y+Z+(n+m)X,\ (n+m)X+Y+Z,\ (1+m)X+nY+Z$$

の項は重複しているので同じ最大値を与える．第 3 項目は，

$$\begin{aligned} nY+X+mZ &< nY+X+(m+1)Z \\ nY+Z+mX &< nY+Z+(m+1)X \end{aligned}$$

となるため，全 12 種類のパスの内 6 種類のパスを省くことで，

$$\begin{aligned} F_{K_{n,m}} &= \text{“}X^{n+1}Y^mZ+X^{n+1}YZ^m+X^2Y^nZ^m \\ &\quad +X^{m+n}YZ+X^{m+1}ZY^n+X^{m+1}YZ^n\text{”} \\ &= \max\left\{\begin{array}{l} Z+(n+1)X+mY,\ (n+1)X+Y+mZ, \\ 2X+nY+mZ,\ (m+n)X+Y+Z, \\ (m+1)X+Z+nY,\ (m+1)X+Y+nZ \end{array}\right\} \end{aligned}$$

となる．これでトロピカル多項式の計算により，3 段並列梯子型ネットワーク図の最短完了時間を簡潔に表すことができた．以上をまとめて，

定理 6.1. 時間コストが X, Y, Z の 3 種類の作業が n 列つづき，その後ろに時間コストが入れ替わって，Y, Z, X である作業が m 列あるようなネットワーク図 $K_{n,m}$ の最短完了時間 $F_{K_{n,m}}$ は，

$$F_{K_{n,m}} = \max\left\{\begin{array}{l} Z+(n+1)X+mY,\ (n+1)X+Y+mZ, \\ 2X+nY+mZ,\ (m+n)X+Y+Z, \\ (m+1)X+Z+nY,\ (m+1)X+Y+nZ \end{array}\right\}$$

と表される．

6.5 トロピカル曲線による可視化

3 段並列梯子型ネットワーク図についてトロピカル曲線を描いて可視化することを考える．3 変数を扱うと非常に複雑のになるので，$n=5, m=7$ の場合で $Y=1$ を定数とした以下のグラフを考えよう．($Y=1$ とすることによって一般性は失われない．)

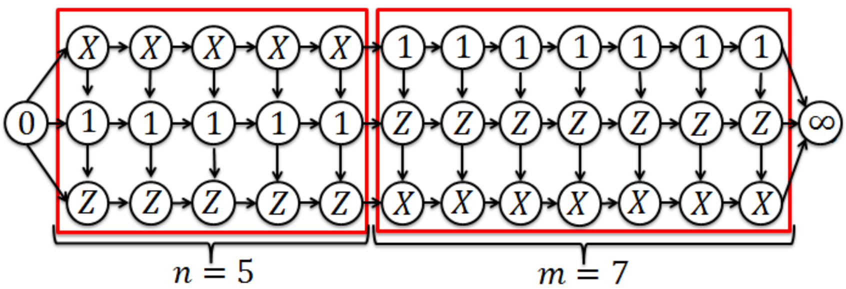

図 18. 規則的なネットワーク図 3

この場合の最短完了時間は定理 6.1 より，

$$F(X,Z)=\max\left\{\begin{array}{l} 6X+Z+7,\ 6X+7Z+1 \\ 2X+7Z+5,\ 12X+Z+1 \\ 8X+Z+5,\ 8X+5Z+1 \end{array}\right\}$$

となる．このトロピカル曲線を実際に書いてみよう．

トロピカル曲線は，$F(X,Z)$ が最大値を与える 1 次式が複数存在する部分を (X,Z) 平面に正射影した線分と直線からなる図形であった．そこで，最短完了時間を与えるようなトロピカル多項式が同時に最大値をとるような部分を計算して求めることにする．一次式が 6 個あり，それを比較するには 2 つの組が 15 通りあるが，$(X,Z>0)$ の範囲では，X,Z の大小関係で場合分けできる．

(ア) 時間コスト X,Z が非常に大きい場合

時間コストが X,Z である頂点を多く通るパスが臨界パスになるため，

$$6X+7Z+1,\ 12X+Z+1,\ 8X+5Z+1$$

という一次式を比較すればよい．

(イ) 時間コスト X が非常に大きく，時間コスト Z が非常に小さい場合

X の頂点を多く通り，Z の頂点をなるべく通らないパスが臨界パスになる．この場合は，

$$12X+Z+1$$

しかない．

(ウ) 時間コスト Z が非常に大きく，時間コスト X が非常に小さい場合

X の頂点をなるべく通らず，Z の頂点を多く通るパスが臨界パスになるため，

$$2X+7Z+5,\ 6X+7Z+1$$

という一次式を比較すればよい．

(エ) 時間コスト X,Z が非常に小さい場合

X,Z である頂点をなるべく通らないパスが臨界パスになる．

$$6X+Z+7,\ 2X+7Z+5$$

という一次式を比較すればよい．

結局，次の 3 組の大小に帰着する．(計算は省く．)

$$\begin{aligned} (ア) と (ウ), (イ) と (エ) の比較 : 6X+Z+7 &= 12X+Z+1 \\ (ウ) と (エ) の比較 : 6X+Z+7 &= 2X+7Z+5 \\ (ア) と (イ) の比較 : 6X+7Z+1 &= 12X+Z+1 \end{aligned}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
X - 1 &= 0 \\
2X - 3Z + 1 &= 0 \\
-X + Z &= 0
\end{aligned}
$$

という 3 種類の直線を書くことができる．これらの直線の一部がトロピカル曲線となる．よってこれらを図示すると、以下のグラフになる．トロピカル曲線は以下の太線部分である．

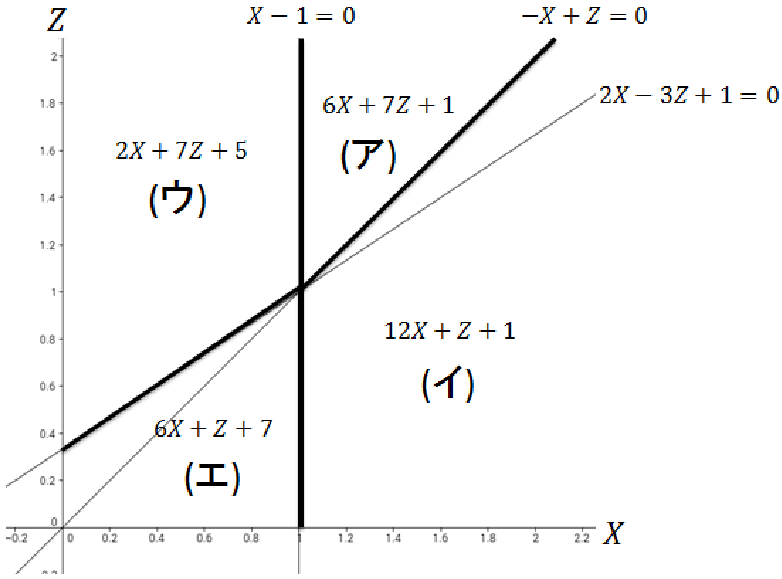

図 19.3 段並列梯子型ネットワーク図のトロピカル曲線

したがって，可視化することで，3 段並列梯子型ネットワーク図の最短完了時間は，

$$
d_{5,7} = \left(\begin{array}{l}
6X + Z + 7 \ (0 \le \frac{3Z-1}{2} \le X \le 1), \\
6X + 7Z + 1 \ (1 \le X \le Z), \\
12X + Z + 1 \ (1 \le Z \le X), \\
2X + 7Z + 5 \ (0 \le X \le 1, 0 \le X \le \frac{3Z-1}{2})
\end{array} \right)
$$

となることがわかる．

また，臨界パスは

- $6X + Z + 7$ の場合：
  $0 \to X \to X \to X \to X \to X \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \downarrow Z \to X \to \infty$
- $6X + 7Z + 1$ の場合：
  $0 \to X \to X \to X \to X \to X \downarrow 1 \to Z \to Z \to Z \to Z \to Z \to Z \to Z \downarrow X \to \infty$
- $12X + Z + 1$ の場合：
  $0 \to X \to X \to X \to X \to X \downarrow 1 \to Z \to X \to X \to X \to X \to X \to X \to X \to \infty$

- $2X + 7Z + 5$ の場合：
  $0 \to X \downarrow 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to Z \to Z \to Z \to Z \to Z \to Z \to Z \downarrow X \to \infty$

と図 18 のネットワーク図の頂点を通る.

7　参考文献

参考文献

[1] 小林正典，トロピカル幾何による工程計画問題の可視化,「計測と制御」 第 52 巻 第 12 号，2013 年 12 号.

[2] Masanori Kobayashi and Shinsuke Odagiri,Tropical geometry of PERT, *Journal of Math-for-Industry*, Vol. 5(2013), pp. 145-149.

[3] 枡田幹也・福川由貴子,「格子から見える数学」日本評論社 (2013).