

穴のあいた格子多角形における
ピックの公式

荒堀夏彦

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科
学籍番号：15111007 西山研究室 2015年2月20日

目次

1	序論	3
2	ピックの公式	4
2.1	格子多角形	4
2.2	ピックの公式の初等的証明	4
2.3	基本三角形	7
2.4	オイラーの公式からピックの公式を導く	8
3	ユニモジュラー変換	9
3.1	整数格子	9
3.2	ユニモジュラー行列	10
3.3	ユニモジュラー変換の例	12
4	12点定理	13
4.1	ユニモジュラー列	13
4.2	双対格子多角形	18
4.3	凸でない格子多角形における12点定理	21
5	穴が開いた図形におけるピックの公式	22
5.1	穴が1個の場合	22
5.2	穴が N 個の場合	23
5.3	穴が N 個あいた格子多角形におけるオイラーの公式とピックの公式	25
5.4	格子多角形に島がある場合	27
5.5	一般のオイラーの公式から一般のピックの公式の証明	29
6	正六角形格子におけるピックの公式	29
6.1	正三角形格子におけるピックの公式	30
6.2	正六角形格子でのピックの公式	31
7	参考文献	31

1 序論

本論文の目的は、多角形の面積を表す公式であるピックの公式について述べ、一般化することである。

私がピックの公式を研究テーマに選んだ動機は、教員免許を取得するための講義でピックの公式を学び、それ以来ピックの公式に興味をもち、大学4年生のセミナーでたまたまピックの公式が載っている教科書を読んだからである。ピックの公式とは、すべての頂点が格子点である多角形(格子多角形)の面積をその図形上の格子点の数を数えることによって求める公式である。

本論では、そのピックの公式から派生して、格子多角形のいろいろな性質を述べる。例えば、行列式が1の行列による一次変換で整数格子から整数格子への全単射を導く、ユニモジュラー変換という平面上の変換がある。この変換は図形の角度は保たないが、格子点の数の情報は保つので、ピックの公式より面積を保つことを証明することができる。(3章参照)

ユニモジュラー変換と関連してユニモジュラー列というものもある。これは内部に唯一つ格子点をもつ格子多角形を考えて、その内部点から辺上の格子点へのベクトルと、隣り合う格子点へのベクトルとが整数格子の基であるようなベクトル列であるが、このユニモジュラー列については12点定理と呼ばれる興味深い定理が成り立つことが知られている。(4章、定理4.8参照)

5章と6章では、ピックの公式で考える格子多角形に穴があいている場合や、穴の中に島がある場合にピックの公式がどう変化していくかをオイラー標数と関連付けて考えたり、六角形を敷き詰めた六角形格子の場合に、色々な公式がどう変化していくのかを考察する。

例えば、穴が N 個あいた格子多角形におけるピックの公式は次のようになることがわかった。(本文、定理5.5参照)

(穴が N 個あいた格子多角形におけるピックの公式)

穴が N 個開いている格子多角形 X の面積 $\text{Area}(X)$ は X の内部の格子点の数 $I(X)$ と辺上の格子点の数 $B(X)$ を用いて

$$\text{Area}(X) = I(X) + \frac{1}{2}B(X) - \chi(X)$$

と表される。ここで $\chi(X) = 1 - N$ は X のオイラー標数を表す。

証明にはオイラーの公式を用いる。

正六角形格子におけるピックの公式は色々と例を計算して考えたが、時間不足で結果には至らなかったため、これは今後の課題としたい。

2 ピックの公式

普通、多角形の面積を計算するときは、いくつかの三角形や四角形に分割して、辺の長さなどを使って計算する。だが、ピックの公式は多角形上の格子点の数をを用いて面積を表す公式である。まずはピックの公式で扱う図形がどのようなものか述べる。

2.1 格子多角形

座標平面上の格子点全体の集合を \mathbb{Z}^2 と表し整数格子という (詳しくは 3.1 章参照)。格子多角形とは、座標平面上で、頂点が格子点 (つまり、 x 座標と y 座標がともに整数である点) である多角形のことである。多角形は凹んでいてもよいが、境界は単純閉曲線の共通部分のない和であるものを考える。

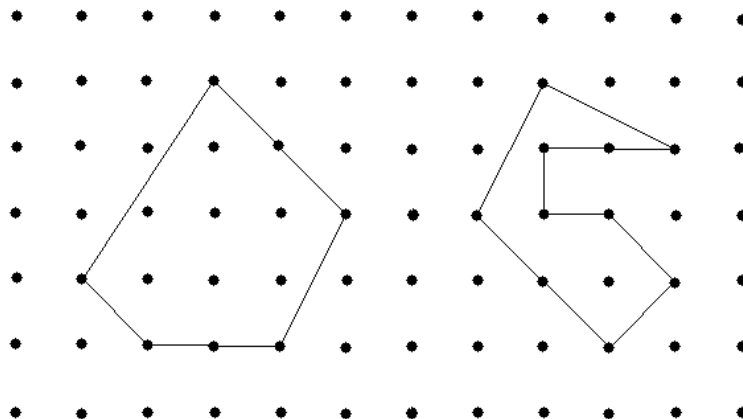


図 2.1: 格子多角形の例

2.2 ピックの公式の初等的証明

以下しばらくの間は、単に格子多角形というと、連結で境界がただ一つの単純閉曲線であるものを考えることにする。

定理 2.1 (ピックの公式). 格子多角形 P の面積 $\text{Area}(P)$ は、 P の内部の格子点の数 $I(P)$ と辺上の格子点の数 $B(P)$ を用いて

$$\text{Area}(P) = I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1$$

と表される。

[証明]. ここでは参考文献 [1] の証明を紹介する。多角形 P 上の格子点から、 P を見渡した角度 (ラジアン) を 2π で割った値を $w(q)$ とする。 $w(q)$ は q を中心とした十分小さな円 $S(q)$ を描くとき、 $S(q)$ 全体と P との交わりの部分の面積比でもある。 q が P の内点ならば $w(q) = 1$ 、 q が辺上の点で頂点でなければ $w(q) = \frac{1}{2}$ 、 q が直角の頂点ならば $w(q) = \frac{1}{4}$ である。 P に対し

$$W(P) = \sum_{q: P \text{ の格子点}} w(P)$$

と定める。上の和において q は P 上の格子点をすべて動く。次の補題が証明の鍵となる。

補題 2.2. $W(P) = \text{Area}(P)$

[証明]. 格子多角形 P が図 2.2(1) のように 2 つの格子多角形 P_1 と P_2 に分割されているとき、 $w(q)$ の定義より

$$\begin{aligned} W(P) &= \sum_{q_1 \in P_1} w(q_1) + \sum_{q_2 \in P_2} w(q_2) \\ &= W(P_1) + W(P_2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

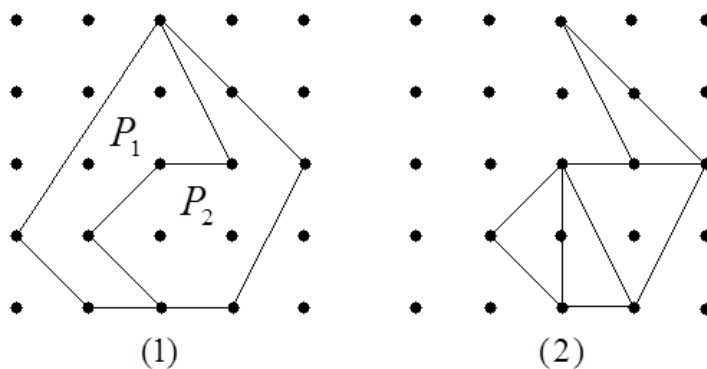


図 2.2: 分割された格子多角形

一方、積分による面積の定義からも明らかに

$$\text{Area}(P) = \text{Area}(P_1) + \text{Area}(P_2) \tag{2.2}$$

が成り立つ。どんな格子多角形も図 2.2(2) のように格子三角形に分割することができるから、 W と Area の加法性 (式 (2.1)、式 (2.2)) より、格子三角形 P に対して補題を示せばよい。

まず、 P が図 2.3(1) にあるような格子直角三角形である場合を考える。このとき、 P は図 2.3(2) にある格子長方形の半分である。図 2.3(2) にあるような格子長方形 P' に関して、容易にチェックできるように $W(P') = \text{Area}(P')$ であり、 W と Area の加法性より $W(P') = 2W(P), \text{Area}(P') = 2\text{Area}(P)$ であるから、図 2.3(1) にあるような格子直角三角形 P に対して補題は成立する。

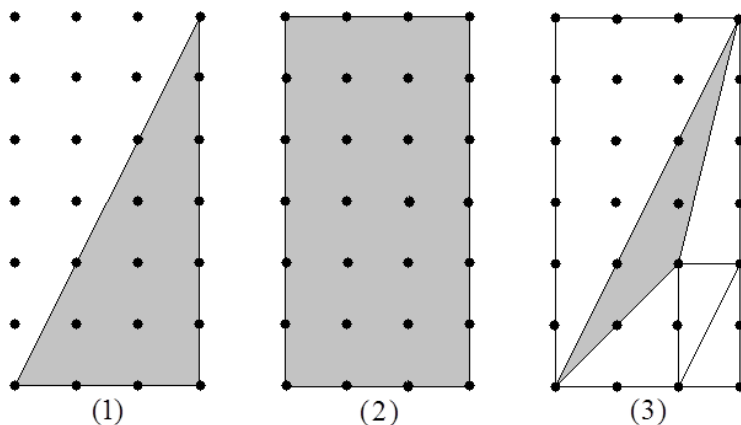


図 2.3:

一般の格子三角形 P は、図 2.3(3) にあるように格子長方形から格子直角三角形を取り除いたものと思えるから、上の事実と W と Area の加法性より、一般の格子三角形に対しても補題が成立し、結局すべての格子多角形に対して補題が成立する。□

以上の準備の下に、ピックの公式の証明を完成させる。 P 上の格子点 q から P を見渡した角度 (ラジアン) を $\theta(q)$ と書く。定義より $\theta(q) = 2\pi w(q)$ である。 q が P の辺上にあるが頂点でない格子点であるとき $\theta(q) = \pi$ であり、 P の頂点の数を c とすと P の内角の和は $(c-2)\pi$ であるから (凹んでいてもよい)、 P の辺上の格子点の集合を B と表すと

$$\sum_{q \in B} \theta(q) = (B(P) - 2)\pi$$

したがって、 P の内部にある格子点の集合を I と表すと

$$\begin{aligned} W(P) &= \sum_{q \in I} w(q) + \sum_{q \in B} w(q) \\ &= I(P) + \frac{1}{2\pi} \sum_{q \in B} \theta(q) \\ &= I(P) + \frac{1}{2\pi} (B(P) - 2)\pi \\ &= I(P) + \frac{1}{2} B(P) - 1 \end{aligned}$$

これと補題を合わせればピックの公式がしたがう。□

2.3 基本三角形

頂点以外に格子点を持たない格子三角形を基本三角形 (または極小三角形) という。図 2.4(1) は基本三角形であるが、図 2.4(2) は基本三角形でない。

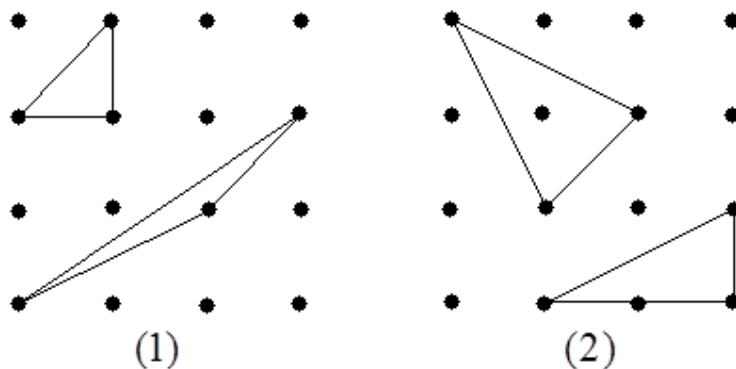


図 2.4: 基本三角形

命題 2.3. 基本三角形 \Leftrightarrow 面積 $\frac{1}{2}$ の格子三角形

[証明]. (\Rightarrow の証明) 格子多角形 P が基本三角形ならば

$$I(P) = 0, B(P) = 3$$

なので、ピックの公式より、面積は

$$\text{Area}(P) = 0 + \frac{1}{2} \times 3 - 1 = \frac{1}{2}$$

である。

(\Leftarrow の証明) 格子多角形 P の面積が $\frac{1}{2}$ ならば、 P の 3 つの頂点は格子点であるから $B(P) \geq 3$ で $\text{Area}(P) \geq \frac{1}{2}$ となる。ちょうど面積が $\frac{1}{2}$ になるには $I(P) = 0$ かつ $B(P) = 3$ でなければならない。つまり内部に格子点はなく、辺上には頂点しかない。よって、 P は基本三角形である。 \square

2.4 オイラーの公式からピックの公式を導く

オイラーの公式とピックの公式には密接な関係があり、オイラーの公式からピックの公式、ピックの公式からオイラーの公式を導くことができる。ここではオイラーの公式からピックの公式を導く。まず平面グラフに対するオイラーの公式を紹介する。平面グラフとは、どの 2 つの辺も端点以外に交点をもたない平面上のグラフのことである。平面グラフによって区切られてきた、有限の広がりをもった部分を面という。

定理 2.4 (オイラーの公式). 連結な平面グラフ G の頂点の数、辺の数、面の数をそれぞれ $V(G), E(G), F(G)$ とおくと、次が成立する。

$$V(G) - E(G) + F(G) = 1 \quad (*)$$

証明は参考文献 [1] の定理 3.3 を参照してほしい。

[ピックの公式のオイラーの公式を用いた証明]. 格子多角形 P が与えられたとき、図 2.5 のように P を基本三角形に分割すると平面グラフができる。それを G と表す。

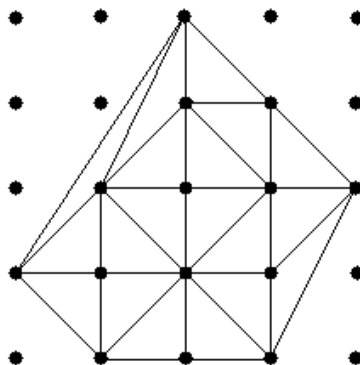


図 2.5: 格子多角形の基本三角形への分割

G の頂点は P 上にある格子点、 G の辺は頂点を結んでできる線分、 G の面

は基本三角形である。したがって

$$V(G) = I(P) + B(P), \quad E(G) = \frac{1}{2}(3F(G) + B(P))$$

これらをオイラーの公式 (式*) に代入する。

$$\begin{aligned} 1 &= V(G) - E(G) + F(G) \\ &= I(P) + B(P) - \frac{1}{2}(3F(G) + B(P)) + F(G) \\ &= I(P) + \frac{1}{2}B(P) - \frac{1}{2}F(G) \\ \therefore \frac{1}{2}F(G) &= I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1 \end{aligned}$$

ここで命題 2.3 より、左辺は P の面積と一致するから、ピックの公式がしたがう。 \square

3 ユニモジュラー変換

ユニモジュラー変換とは簡単に言うと、行列により格子の基底を取り換えるような変換のことである。ユニモジュラー変換は、一般に角度は保たないが、格子多角形を格子多角形に移し、格子点の数の情報を保つ。したがってピックの公式よりユニモジュラー変換しても面積は変わらない。

3.1 整数格子

座標平面上の格子点全体の集合を \mathbb{Z}^2 と表し整数格子というのであった。また、 \mathbb{Z}^2 の 2 つの元 a, b に対しての任意の元 $z \in \mathbb{Z}^2$ が 2 つの元 a, b の整数係数の 1 次結合で書ける時、つまり $z = sa + tb$ となる整数 s, t が存在するとき、その 2 つの元 a, b の組を \mathbb{Z}^2 の基 (または基底) という。

補題 3.1. 整数 a, b, c, d が $ad - bc = \pm 1$ を満たすとき、座標平面上のすべての格子点 $z \in \mathbb{Z}^2$ は

$$z = s(a, c) + t(b, d) \quad (s, t \text{ はある整数})$$

と表される。

[証明]. まず、原点と点 $A(a, c)$, 点 $B(b, d)$, 点 $(a + b, c + d)$ を頂点とする平行四辺形 Q を考える。 Q の面積は $|ad - bc| = 1$ である。 Q の向かい合う頂点を線分で結んで格子三角形に分けると、それぞれの三角形の面積は $\frac{1}{2}$ である。従って、命題 2.3 より、それらの格子三角形には頂点以外に格子点はない。つまり Q には頂点以外には格子点は存在しない。

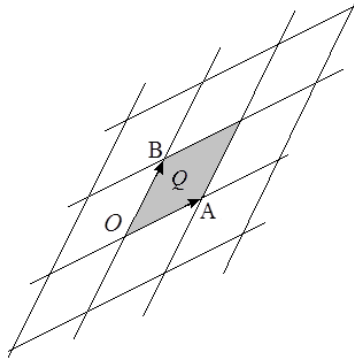


図 3.1: 点 $(a+b, c+d)$ を頂点とする平行四辺形 Q

そこでベクトル \vec{OA} の定める直線を、ベクトル \vec{OB} 方向に整数倍平行移動したものと、ベクトル \vec{OB} の定める直線を、ベクトル \vec{OA} 方向に整数倍平行移動したもので作られる格子模様を考える。この格子に含まれる直線の交点の座標は $s(a, c) + t(b, d)$ (s, t はある整数) と表せるから、すべて格子点である。

もし、これらの格子点以外に格子点があれば、それらをベクトル \vec{OA} と \vec{OB} の適当な整数倍分平行移動すれば、平行四辺形 Q の頂点以外の点にくるが、その点も格子点であるから最初の考察に矛盾する。したがって補題がしたがう。 \square

\mathbb{Z}^2 の元を (x, y) と横ベクトルとして表すことも多いが、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と縦ベクトルとして表すことも多い。以後この章では、 \mathbb{Z}^2 の元を縦ベクトルで表記する。

3.2 ユニモジュラー行列

命題 3.2. a, b, c, d を整数とする。このとき次の 4 つは同値である。

- (1) $ad - bc = \pm 1$
- (2) 座標平面において、点 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と点 $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ および原点を頂点とする格子三角形は基本三角形である。
- (3) 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ は整数格子 \mathbb{Z}^2 の基である。
- (4) 2 次の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が定める座標平面の一次変換は、整数格子 \mathbb{Z}^2 の間の全単射を導く。

命題 3.2(4) にある行列をユニモジュラー行列という。また、(1)(2)(3) の同値性については 3.1 章に書いてある。

[(1) → (4) の証明]. 座標平面上の一次変換

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \rightarrow s \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

は a, b, c, d が整数であるから格子点を格子点に移す。また、逆変換は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるが、 $ad-bc = \pm 1$ であるので、上記の逆変換を与える行列の成分はすべて整数である。よって、この逆変換も格子点を格子点に移すから、この一次変換は整数格子 \mathbb{Z}^2 の間の全単射であることがわかる。

□

ユニモジュラー変換は、一般に角度は保たないが、格子多角形を格子多角形に移し命題 3.2(4) より、格子点の数の情報を保つ。つまり、 P を格子多角形、 f をユニモジュラー変換とすると、 P を f で移した像 $f(P)$ は再び格子多角形で

$$I(f(P)) = I(P), B(f(P)) = B(P)$$

が成立する。さらに次が成り立つ。

補題 3.3. ユニモジュラー変換は格子多角形の面積を保つ。

[証明]. 格子多角形 P は図 2.2(2) のように格子三角形に分割されるから、格子三角形について補題を証明すればよい。さらに平行移動は面積を保つので、格子三角形の 1 つの頂点が原点である場合に証明すればよい。そこで P を原点を頂点にもつ格子三角形とし、残りの 2 点を $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ とする。 P の面積 $\frac{1}{2} |\det(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|$ である。ここで、 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ は 2 点 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を並べて得られる 2 次の行列を表し、 \det は行列式を表す。

ユニモジュラー行列 M が定めるユニモジュラー変換 f_M により、 P は原点と $M\mathbf{p}_1, M\mathbf{p}_2$ を頂点とする格子多角形に移る。したがって

$$\begin{aligned} f_M(P) \text{ の面積} &= \frac{1}{2} |\det(M\mathbf{p}_1, M\mathbf{p}_2)| \\ &= \frac{1}{2} |\det(M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2))| \\ &= \frac{1}{2} |\det M \det(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)| \\ &= \frac{1}{2} |\det(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)| \\ &= P \text{ の面積} \end{aligned}$$

となる。ここで最後から2つ目の等号は $\det M = \pm 1$ よりしたがう。 \square

3.3 ユニモジュラー変換の例

ここでユニモジュラー変換の例を $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で見てみる。この行列は命題 3.2 を満たしているのでユニモジュラー行列である。

図 3.2 のように P を原点、 $(1,0), (1,2)$ を頂点とする格子三角形 (青い三角形) とすると、変換で移した先は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

原点、 $(1,0), (3,2)$ を頂点とする格子三角形 (緑の三角形) になる。2つの格子三角形の格子点の情報は同じであり、面積も同じである。

赤い格子は、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を基底とした格子であり、赤い格子で見ると、緑の三角形は原点、 $(1,0), (1,2)$ を頂点とする格子三角形になっている。

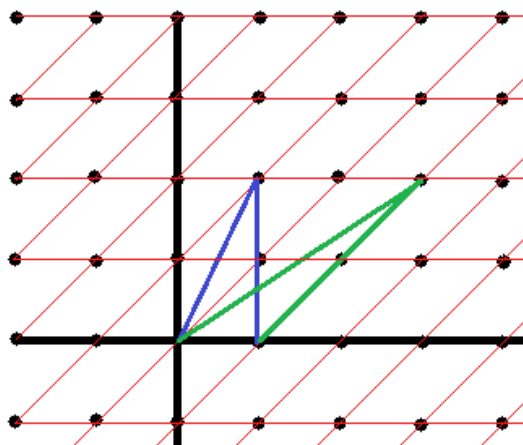


図 3.2: ユニモジュラー変換の例

2つの格子多角形が整数ベクトル分の平行移動とユニモジュラー変換で移りあうとき、格子同値とよぶ。格子同値な格子多角形では格子点の数と面積は同じであるから、ピックの公式のように、格子多角形上の格子点の数や面積を問題にする場合、格子同値な格子多角形は同じものと見なしてよい。

4 12点定理

内部に格子点を唯一つだけもつ格子凸多角形 P に対して、12点定理という定理が成り立つ。この章ではそれを紹介する。定理自体は簡単だが、証明のために多数の公式を使う。まずはそれらの公式を紹介する。

4.1 ユニモジュラー列

内部に唯一つ格子点を持つ格子凸多角形 P を考える。平行移動すれば原点が内部の点と思ってよい。 P の境界上の格子点を反時計回りに $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ (d は P の境界上にある格子点の数) とすると、原点と $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}$ ($i = 1, \dots, d$) の3点を頂点とする格子三角形は基本三角形であるから、 $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}$ は整数格子 \mathbb{Z}^2 の基となっている。ここで $\mathbf{p}_{d+1} = \mathbf{p}_1$ と了解する。

定義 4.1. 整数ベクトルの列 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ において、隣り合うベクトル $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}$ ($i = 1, \dots, d$) が \mathbb{Z}^2 の基になっているとき、そのベクトル列をユニモジュラー列という。

ユニモジュラー列 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ において、各 $i = 1, \dots, d$ に対して、ベクトル \mathbf{p}_i を正の方向に π ラジアン未満回転した方向に \mathbf{p}_{i+1} があるとき、ユニモジュラー列は反時計回りに回転しているという。同様に $i = 1, \dots, d$ に対して、ベクトル \mathbf{p}_i を負の方向に π ラジアン未満回転した方向に \mathbf{p}_{i+1} があるとき、ユニモジュラー列は時計回りに回転しているという。

補題 4.2. 反時計回りに回転しているユニモジュラー列 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ において、 $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であったとすると、 $d = 3$ のとき $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ であり、 $d = 4$ のとき $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix}$ で b か c のどちらかが0である。

[証明]. $d = 3$ のとき、 $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおくと

$$1 = \det(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = -a, \quad 1 = \det(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1) = -b$$

よって、 $a = -1, b = -1$ である。

$d = 4$ のとき、 $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とおくと

$$1 = \det(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = -a, \quad 1 = \det(\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_1) = -d, \quad 1 = \det(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = ad - bc$$

よって、 $a = -1, d = -1, bc = 0$ が成り立つ。 \square

内部に唯一つ格子点をもつ格子凸多角形の境界上の格子点からユニモジュラー列が得られるが、図 4.1(1) のようにユニモジュラー列から得られる格子多角形は必ずしも凸とは限らない。また、図 4.1(2) のようにユニモジュラー列は何回転してもよいし、反時計回りと時計回りが混じっていてもよい。以後しばらくは $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ は反時計回りにちょうど 1 回転しているユニモジュラー列とする。

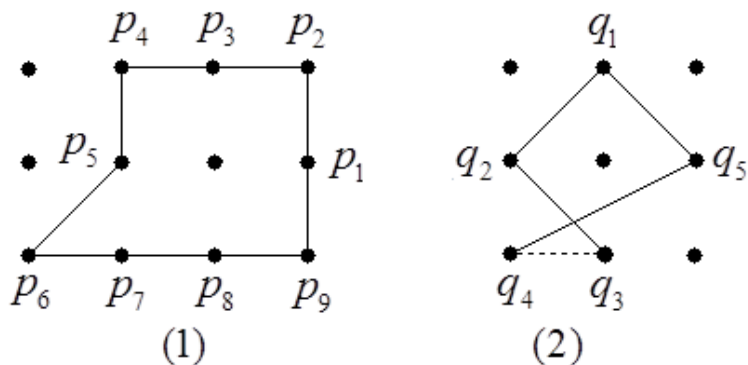


図 4.1: ユニモジュラー列

定理 4.3. 反時計回りに回転しているユニモジュラー列 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ が原点のまわりをちょうど一周するならば

$$3d - \sum_{i=1}^d a_i = 12$$

が成立する。

a_i を次のように定める。 $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i$ は \mathbb{Z}^2 の基であるから、 $\mathbf{p}_{i+1} = b_i \mathbf{p}_{i-1} + a_i \mathbf{p}_i$ ($a_i, b_i \in \mathbb{Z}$) と表すことができる。それを使い

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= 0 \times \mathbf{p}_{i-1} + a_i \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_{i+1} &= b_i \mathbf{p}_{i-1} + a_i \mathbf{p}_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

これを行列で表すと

$$(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}) = (\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i) \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ 1 & a_i \end{pmatrix}$$

となる。両辺の行列式をとると

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}) &= \det(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i) \det \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ 1 & a_i \end{pmatrix} \\ &= -b_i \det(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i) \end{aligned} \quad (4.2)$$

だが $\det(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}) = \det(\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i) = 1$ なので $b_i = -1$ である。これを式 (4.1) に代入すると

$$\mathbf{p}_{i+1} = -\mathbf{p}_{i-1} + a_i \mathbf{p}_i$$

$$\therefore \mathbf{p}_{i+1} + \mathbf{p}_{i-1} = a_i \mathbf{p}_i \quad (4.3)$$

定理 4.3 は補題 4.5 の後で証明する。

$M = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ とすると、 $\det M = 1$ であるから、命題 3.2 よりベクトル列 $M^{-1}\mathbf{p}_1, \dots, M^{-1}\mathbf{p}_d$ は再びユニモジュラー列になる。 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ が反時計回りにちょうど一回転しているなら、 $M^{-1}\mathbf{p}_1, \dots, M^{-1}\mathbf{p}_d$ もそうであり、式 (4.3) より a_i は変わらない。したがって、定理 4.3 において $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と仮定してもよい。

このことと補題 4.2 を用いて $d = 3, 4$ の場合に定理 4.3 を確かめる。

(ア) $d = 3$ のとき： $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ である。

式 (4.3) に代入して a_i を求める。

$$i=1 \text{ のとき、} \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = a_1 \mathbf{p}_1 \text{ より、} a_1 = -1$$

$$i=2 \text{ のとき、} \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 = a_2 \mathbf{p}_2 \text{ より、} a_2 = -1$$

$$i=3 \text{ のとき、} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = a_3 \mathbf{p}_3 \text{ より、} a_3 = -1$$

よって、 $3 \times 3 - (-1 - 1 - 1) = 12$ であるから定理は成立する。

(イ) $d = 4$ のとき： $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix}$,

$bc = 0$ である。

式 (4.3) に代入して a_i を求める。

$$i=1 \text{ のとき、} \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4 = a_1 \mathbf{p}_1 \text{ より、} a_1 = c$$

$$i=2 \text{ のとき、} \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 = a_2 \mathbf{p}_2 \text{ より、} a_2 = b$$

$$i=3 \text{ のとき、} \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_2 = a_3 \mathbf{p}_3 \text{ より、} a_3 = -c$$

$$i=4 \text{ のとき、} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 = a_4 \mathbf{p}_4 \text{ より、} a_4 = -b$$

よって、 $3 \times 4 - (c + b - c - b) = 12$ であるから定理は成立する。

補題 4.4. ユニモジュラー列 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ の連続する 3 つのベクトル $\mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{j+1}$ において、 \mathbf{p}_j の長さが最大とすると、 a_j は 0 か ± 1 である。

[証明]. p_j の長さが最大だから

$$\|\mathbf{p}_{j+1}\| + \|\mathbf{p}_{j-1}\| \leq 2\|\mathbf{p}_j\| \quad (4.4)$$

三角不等式

$$\|\mathbf{p}_{j+1} + \mathbf{p}_{j-1}\| \leq \|\mathbf{p}_{j+1}\| + \|\mathbf{p}_{j-1}\| \quad (4.5)$$

に式 (4.3)

$$\mathbf{p}_{j+1} + \mathbf{p}_{j-1} = a_j \mathbf{p}_j$$

を代入すると

$$\begin{aligned} |a_j| \|\mathbf{p}_j\| &= \|a_j \mathbf{p}_j\| = \|\mathbf{p}_{j+1} + \mathbf{p}_{j-1}\| \leq \|\mathbf{p}_{j+1}\| + \|\mathbf{p}_{j-1}\| \leq 2\|\mathbf{p}_j\| \quad (4.6) \\ |a_j| \|\mathbf{p}_j\| &\leq 2\|\mathbf{p}_j\|, \quad \therefore |a_j| \leq 2 \end{aligned}$$

$|a_j| = 2$ のとき式 (4.6) は等号でなければならないから \mathbf{p}_{j+1} と \mathbf{p}_{j-1} は平行でなければならないが、式 (4.3) より \mathbf{p}_j とも平行でなければならないが、これは $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ がユニモジュラー列であることに反する。よって $|a_j| \leq 1$ である。□

\mathbf{p}_{j-1} から \mathbf{p}_j を経由して \mathbf{p}_{j+1} に至る回転角は $a_j = 0$ のときは π ラジアン、 $a_j = -1$ のときは π ラジアンより大きい。また $a_j = 1$ のときは π ラジアン未満となる。このことに注意すれば次が成り立つ。

補題 4.5. 反時計回りにちょうど 1 回転しているユニモジュラー列 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d$ において $d \geq 5$ ならば $\mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k$ となる $1 \leq k \leq d$ が存在する。

[証明]. $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d$ のうち長さが最大のものをとり、必要ならば番号を付け替えて、それを \mathbf{p}_2 とする。3 つのベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を考えると、補題 4.4 より、 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 = a_2 \mathbf{p}_2$ ($a_2 = 0, \pm 1$) が成り立つ。 $a_2 = 1$ なら補題は成り立つ。 $a_2 = 0$ のときは、 $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_1$ であり $a_2 = -1$ のときは、 $\mathbf{p}_3 = -(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ である。ユニモジュラー変換で移すと $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ はそれぞれ基本ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に移る。以下 $a_2 = 0, -1$ で場合分けして考える。 $a_2 = 0$ のとき $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_1 = -\mathbf{e}_1$ (図 4.2(1)) であって、 $a_2 = -1$ のとき $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (図 4.2(2)) となる。

以下 $\mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k$ となるような k が存在しないとして $d \geq 4$ となることを示そう。

$a_2 = 0$ のとき、 \mathbf{p}_3 から \mathbf{p}_1 の間に最大のベクトル \mathbf{p}_i をとってくる。格子点であるから長さは 1 以上のものしかない。 \mathbf{p}_i の両隣と比較すると、 \mathbf{p}_i が最

大の長さを持つので、 $a_i \neq 1$ より補題 4.5 の直前に述べたことから、なす角が π 以上となる。したがって $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_{i+1}$ は \mathbf{p}_3 と \mathbf{p}_1 に一致する。よってベクトルは 4 本となる。

$a_2 = -1$ のとき、 \mathbf{p}_3 から \mathbf{p}_1 の間に長さが $\sqrt{2}$ 以上のベクトルがあったとすると、最大の長さを持つベクトルを \mathbf{p}_i として、 $a_i = 0$ のときと同様に考えると、両隣のベクトルがなす角は π 以上となる。しかしこれは \mathbf{p}_3 と \mathbf{p}_1 のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ であることに反する。だから、長さが $\sqrt{2}$ 未満のベクトルしか存在しない。ベクトルの終点は格子点なので、これは $-\mathbf{e}_2$ となり、他にはないからベクトルが 4 本となる。

以上で $\mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k$ となる k が存在しなければ、 $d \leq 4$ ということがわかり、背理法より、 $d \geq 5$ ならば $\mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k$ となる $1 \leq k \leq d$ が存在することが示せた。□

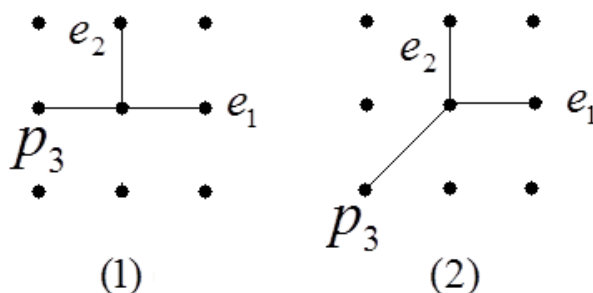


図 4.2: ユニモジュラー変換後の図

[定理 4.3 の証明]. d についての数学的帰納法で示す。 $d = 3, 4$ の場合が正しいことは、すでに確かめた。以下 $d \geq 5$ とし、ベクトルの数が $d - 1$ のユニモジュラー列に対しては定理が成立していると仮定する。

$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ を反時計回りにちょうど一回転しているユニモジュラー列とする。 $d \geq 5$ であるから補題 4.5 より、 $\mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k$ となる $1 \leq k \leq d$ が存在する。このとき

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_{k+1}) &= \det(\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1}) \\ &= \det(\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_k) - \det(\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_{k-1}) = 1 \end{aligned}$$

より、与えられたユニモジュラー列から \mathbf{p}_k を除いた部分ベクトル列 $\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_{k+1} \dots \mathbf{p}_d$ もユニモジュラー列となる。さらに

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{k-2} + \mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{p}_{k-2} + (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1}) = (a_{k-1} - 1)\mathbf{p}_{k-1} \\ \mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{p}_{k+2} &= (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k+1}) + \mathbf{p}_{k+2} = (a_{k+1} - 1)\mathbf{p}_{k+1} \end{aligned}$$

より、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d$ では a_1, a_2, \dots, a_d であった整数列は、 \mathbf{p}_k を取り除いた部分ユニモジューラー列 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_d$ では

$$a_1, \dots, a_{k-2}, a_{k-1} - 1, a_{k+1} - 1, a_{k+2}, \dots, a_d$$

となる。よって、元の式に $d = d - 1$ と a_k を代入すると

$$12 = 3(d - 1) - \left(\sum_{i=1}^{k-2} a_i + a_{k-1} - 1 + a_{k+1} - 1 + \sum_{i=k+2}^d a_i \right) - a_k + 1$$

ここで、 $a_k = 1$ を足し引きし補っている。

$$(上式) = 3d - 3 - \sum_{i=1}^d a_i + 3 = 3d - \sum_{i=1}^d a_i$$

この式は、ベクトル数が d のユニモジューラー列に対して定理が成立していることを示しているから、数学的帰納法が成立し、定理の証明が完成した。□

4.2 双対格子多角形

補題 4.6. すべての i に対して $a_i \leq 2$ が成り立つ。また、ある i に対して $a_i = 2$ となる必要十分条件は、3点 $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}$ が同一直線上にあることである。

[証明]. $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i$ は \mathbb{Z}^2 の基であるから、原点と $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i$ を頂点とする三角形は基本三角形である。ここで \mathbf{p}_{i-1} と \mathbf{p}_i を結ぶ線分の外向き (原点側ではない) 整数法線ベクトル \mathbf{u} をとると

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_{i-1} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_i \rangle = 1$$

が成り立つ。ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は平面 \mathbb{R}^2 における通常の内積を表す。式 (4.3) の両辺において \mathbf{u} との内積をとると

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_{i+1} + \mathbf{p}_{i-1} \rangle &= \langle \mathbf{u}, a_i \mathbf{p}_{i-1} \rangle \\ \therefore \langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_{i+1} \rangle + 1 &= a_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

を得る。式 (4.3) と P が凸であることより \mathbf{p}_{i+1} は半平面 $\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle \leq 1\}$ 上にある。つまり、 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_{i+1} \rangle \leq 1$ である。したがって、式 (4.7) より

$$a_i = 1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_{i+1} \rangle \leq 1 + 1 = 2$$

を得る。またこの証明より、 $a_i = 2$ となるのは $\langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_{i+1} \rangle = 1$ であるときであり、3点 $\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}$ が $\langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle = 1$ で定まる直線上にあるときであることがわかる。□

原点のみを内部格子点にもつ格子凸多角形 P に対し、その双対格子凸多角形 P^\vee を次のように定める。

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i \quad (i = 1, \dots, d) \quad (4.8)$$

ただし $\mathbf{p}_{d+1} = \mathbf{p}_1$ とおいた。 d 個の格子点の列 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_d$ では、 \mathbf{q}_i と \mathbf{q}_{i+1} が一致することがあるが、もしそうでなければ、原点を中心として \mathbf{q}_i を反時計回りに π ラジアン未満回転した方に \mathbf{q}_{i+1} があり、 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_d$ も原点のまわりをちょうど 1 回転している。このとき、 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_d$ を順に結んで得られる格子多角形が、 P の双対格子多角形 P^\vee である。

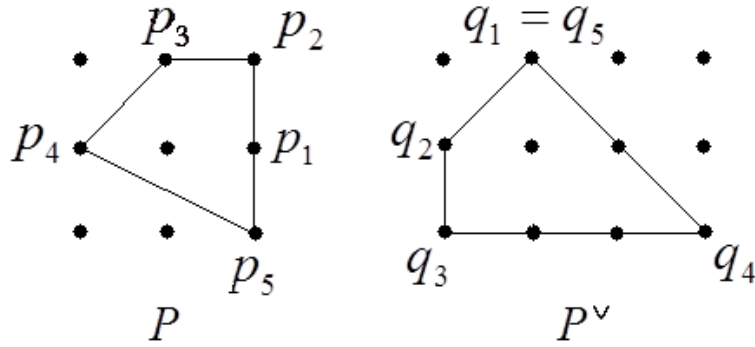


図 4.3: 格子凸多角形 P とその双対格子凸多角形 P^\vee

補題 4.7. 双対格子凸多角形 P^\vee も原点のみを内部格子点にもつ格子凸多角形である。

[証明]. 式 (4.8) より

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1} &= (\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) \\ &= \mathbf{p}_{i+1} + \mathbf{p}_{i-1} - 2\mathbf{p}_i \\ &= (a_i - 2)\mathbf{p}_i \end{aligned} \quad (4.9)$$

ここで最後の等式は式 (4.3) を使っている。また

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i-1}) &= \det(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i) \\ &= \det(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}, a_i\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1} - \mathbf{p}_i) \\ &= \det(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i-1}) + \det(-\mathbf{p}_{i-1}, (a_i - 1)\mathbf{p}_i) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + \det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_i & a_i - 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= 1 - (a_i - 1) = 2 - a_i \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここで補題 4.6 より $a_i \leq 2$ である。したがって $a_i = 2$ ならば式 (4.9) より $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{i-1}$ だが、 $a_i \leq 2$ ならば、式 (4.10) より $\det(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i) > 0$ であるから \mathbf{q}_i は \mathbf{q}_{i-1} を原点を中心に反時計回りに π ラジアン未満回転した方向にある。さらに、 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d$ が原点のまわりをちょうど 1 回転しているから、式 (4.9) より $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_d$ も原点のまわりをちょうど 1 回転していることがわかる。

次に凸になることを示す。証明のアイデアは補題 4.6 の証明と同じである。点列 $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_d$ の異なる 3 点 $\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}$ に注目する。式 (4.9)、式 (4.10) より原点と $\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i$ を頂点とする格子三角形上の頂点以外の格子点はあれば \mathbf{q}_{i-1} と \mathbf{q}_i を端点とする辺上にしかない。したがって、 \mathbf{q}_{i-1} と \mathbf{q}_i を結ぶ線分の外向き法線ベクトル \mathbf{v} をとると

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_{i-1} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_i \rangle = 1 \quad (4.11)$$

が成り立つ。よって

$$\langle \mathbf{v}, (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}) \rangle = 0$$

式 (4.9) より

$$\begin{aligned} (a_i - 2)\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_i \rangle &= 0 \\ \therefore \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_i \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

式 (4.8) と式 (4.11) より

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_i \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_{i+1} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_i \rangle \end{aligned}$$

式 (4.12) より、 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_i \rangle = 0$ なので

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_{i+1} \rangle = 1 \quad (4.13)$$

一方、式 (4.9) より $\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i = (a_{i+1} - 2)\mathbf{p}_{i+1}$ であるがこの式の両辺において \mathbf{v} との内積をとると

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i \rangle = (a_{i+1} - 2)\langle \mathbf{v}, \mathbf{p}_{i+1} \rangle$$

となり式 (4.13) より

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_{i+1} \rangle - 1 = a_{i+1} - 2$$

$a_{i+1} \leq 2$ より

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{q}_{i+1} \rangle \leq 1 \quad (4.14)$$

が成り立つ。この不等式と式 (4.11) は \mathbf{q}_i と \mathbf{q}_{i-1} を結んだ線分の原点側の半平面 $\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle \leq 1\}$ 上に \mathbf{q}_{i+1} があることを示しており、これは P^\vee が凸であることを意味する。□

定理 4.8 (12 点定理). P を原点のみを内部格子点にもつ格子凸多角形、 P^\vee をその双対格子凸多角形とする。このとき

$$B(P) + B(P^\vee) = 12$$

が成立する。

[証明]. $B(P)$ は $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d$ の数であるから d 個である。 $B(P^\vee)$ は境界上の格子点で区切られて得られる基本線分の数と格子点の数が一致することから (基本線分とは、格子点を端点に持ち途中には格子点を持たない線分のことである)

$$\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1} = (a_i - 2)\mathbf{p}_i$$

より \mathbf{q}_i と \mathbf{q}_{i-1} を結ぶ線分上には $2 - a_i$ 個の基本線分がある。よって

$$B(P^\vee) = \sum_{i=1}^d (2 - a_i) = 2d - \sum_{i=1}^d a_i$$

一方 $B(P) = d$ であったから

$$B(P) + B(P^\vee) = d + 2d - \sum_{i=1}^d a_i = 3d - \sum_{i=1}^d a_i$$

定理 4.3 より

$$3d - \sum_{i=1}^d a_i = 12$$

だから $B(P) + B(P^\vee) = 12$ が成り立つ。 □

4.3 凸でない格子多角形における 12 点定理

原点のみを内部格子点にもつ格子多角形 P が凸とは限らない場合も、双対格子多角形 P^\vee が定義できるが、境界が自己交叉をもってしまう。例えば、図 4.1(1) の格子多角形の双対格子多角形図 4.1(2) は自己交叉をもった格子多角形になっている。この場合、境界上の格子点の数の和は 14 となり、12 点定理は成り立たない。しかし、境界上の格子点を数えるのではなく、辺に符号をつけ、符号込みで数えると 12 点定理は成立する。

正確には、 \mathbf{q}_{i-1} と \mathbf{q}_i を端点とする区間上にある各基本線分に、 \mathbf{q}_i が \mathbf{q}_{i-1} の反時計回りにあるとき +、時計回りにあるとき - と符号をつけ (図 4.1(2) では実線の辺が +、点線の辺が - の符号をもつ)、各線分を符号込みで数えると、12 点定理が成り立つ。

5 穴が開いた図形におけるピックの公式

ピックの公式の一般化として、扱う格子多角形に穴が開いている場合を考える。穴があいた格子多角形とは、頂点は格子点で、辺は直線、境界は交わらないものである。

5.1 穴が1個の場合

まずは穴が1つの場合（境界が2つの単純閉曲線の和）を考える。穴は図5.1のように格子多角形 P の境界には触れていないものとする。穴が境界に触れている場合、図5.2(1)のように格子多角形になっていないか、図5.2(2)(3)のように境界を取り除くとただ一つの格子多角形として考えられる場合かのどちらかである。

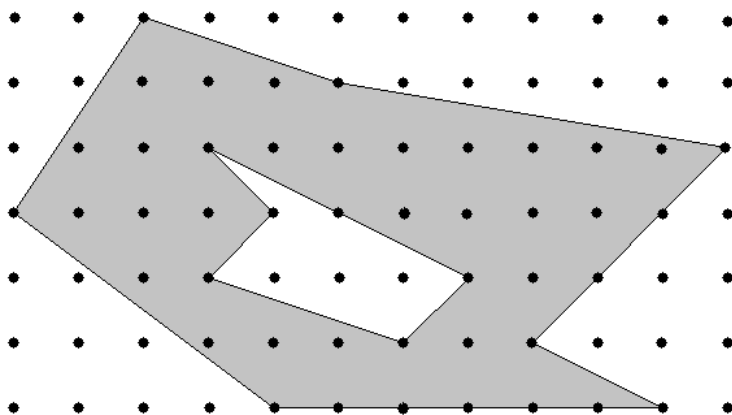


図 5.1: 穴のあいた格子多角形の例

定理 5.1 (穴が1つの図形でのピックの公式). 穴が1つ開いている図形 X の面積 $\text{Area}(X)$ は、 X の内部の格子点の数 $I(X)$ と辺上の格子点の数 $B(X)$ を用いて

$$\text{Area}(X) = I(X) + \frac{1}{2}B(X)$$

と表される。

[証明]. 穴のあいている格子多角形を X とし、穴をうめた格子多角形を P 、その中の穴を Q とする。 P, Q は穴のあいていない格子多角形なので、ピッ

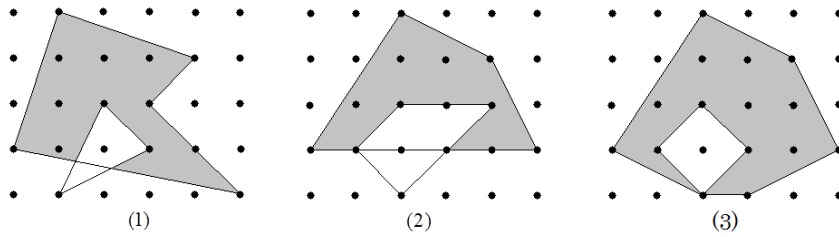


図 5.2: 例外

クの公式 (定理 2.1) より

$$\text{Area}(P) = I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1, \quad \text{Area}(Q) = I(Q) + \frac{1}{2}B(Q) - 1$$

が成り立っている。したがって X の面積は

$$\begin{aligned} \text{Area}(X) &= \text{Area}(P) - \text{Area}(Q) \\ &= I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1 - (I(Q) + \frac{1}{2}B(Q) - 1) \\ &= I(P) - I(Q) + \frac{1}{2}(B(P) - B(Q)) \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} (X \text{ の内部の点の数}) &= I(X) = I(P) - (I(Q) + B(Q)), \\ (X \text{ の辺上の点の数}) &= B(X) = B(P) + B(Q) \end{aligned}$$

だから

$$\text{Area}(X) = I(X) + \frac{1}{2}B(X)$$

となり定理がしたがう。 □

5.2 穴が N 個の場合

穴が 1 個のときと同様にして計算していくと、ある法則が見えてくる。

定理 5.2 (穴が N 個あいた格子多角形におけるピックの公式). 穴が N 個開いている格子多角形 X の面積 $\text{Area}(X)$ は X の内部の格子点の数 $I(X)$ と辺上の格子点の数 $B(X)$ を用いて

$$\text{Area}(X) = I(X) + \frac{1}{2}B(X) - 1 + N$$

と表される。

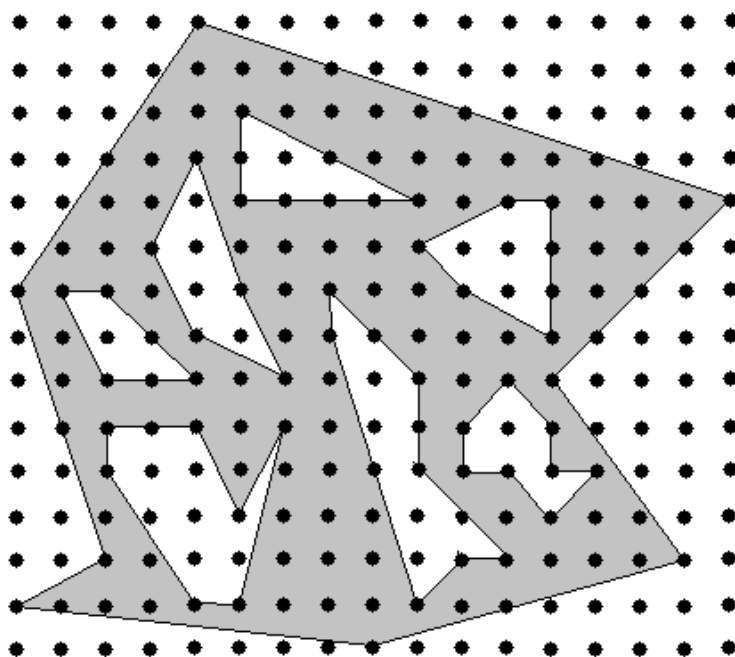


図 5.3: 穴が N 個あいた格子多角形

[証明]. 穴のあいている格子多角形を X とし、穴をうめた格子多角形を P 、その中の穴を Q_1, \dots, Q_N とする。ピックの公式 (定理 2.1) より

$$\begin{aligned} \text{Area}(P) &= I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1 \\ \sum_{i=1}^N \text{Area}(Q_i) &= \sum_{i=1}^N \left(I(Q_i) + \frac{1}{2}B(Q_i) - 1 \right) \end{aligned}$$

が成り立っている。したがって、 X の面積は

$$\begin{aligned} \text{Area}(X) &= \text{Area}(P) - \sum_{i=1}^N \text{Area}(Q_i) \\ &= I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1 - \sum_{i=1}^N \left(I(Q_i) + \frac{1}{2}B(Q_i) - 1 \right) \\ &= I(P) - \sum_{i=1}^N I(Q_i) + \frac{1}{2} \left(B(P) - \sum_{i=1}^N B(Q_i) \right) - 1 + N \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} (X \text{ の内部の点の数}) = I(X) &= I(P) - \sum_{i=1}^N \left(I(Q_i) + B(Q_i) \right) \\ (X \text{ の辺上の点の数}) = B(X) &= B(P) + \sum_{i=1}^N B(Q_i) \end{aligned}$$

だから

$$\text{Area}(X) = I(X) + \frac{1}{2}B(X) - 1 + N$$

となり定理がしたがう。 □

5.3 穴が N 個あいた格子多角形におけるオイラーの公式とピックの公式

ピックの公式からオイラーの公式を導くことは 2.4 節ですで行っている。ここでは、穴が N 個あいた格子多角形でのオイラーの公式から、穴が N 個あいた格子多角形でのピックの公式を導く。

定理 5.3 (穴が N 個あいた格子多角形におけるオイラーの公式). 平面グラフ G の頂点の数、辺の数、面の数をそれぞれ $V(G)$ 、 $E(G)$ 、 $F(G)$ とおくと、次が成立する。

$$V(G) - E(G) + F(G) = 1 - N$$

一般の図形に対するオイラー標数の定義とオイラーの公式の証明については、参考文献 [2] の定理 3.10 と定理 4.13 を参照して欲しい。

このオイラーの公式から穴が N 個あいた格子多角形におけるピックの公式を導く。

[定理 5.2 の証明]. 格子多角形 P に N 個の穴があいているとき、図 5.4 のように P を基本三角形に分割すると平面グラフができる。それを G と表す。

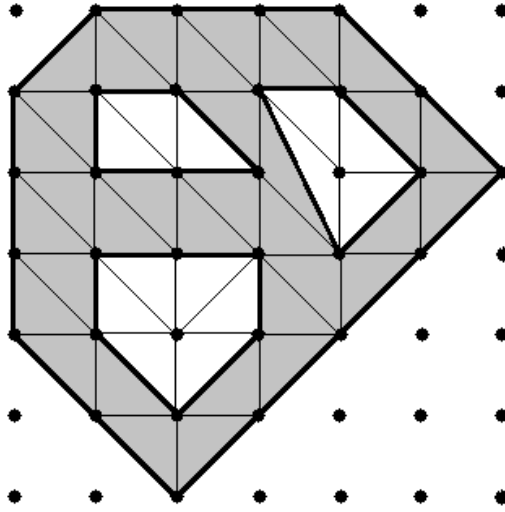


図 5.4: 穴が N 個あいた格子多角形

平面グラフ G 、穴をうめた格子多角形を P 、穴の部分の格子多角形を Q_1, \dots, Q_N とすると

$$V(G) = I(P) + B(P) - \sum_{i=1}^N I(Q_i),$$

$$E(G) = \frac{1}{2}(3F(P) + B(P)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (3F(Q_i) + B(Q_i)) + \sum_{i=1}^N B(Q_i),$$

$$F(G) = F(P) - \sum_{i=1}^N F(Q_i)$$

これらを穴が N 個あいた図形でのオイラーの公式 (定理 5.3) に代入する。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= I(P) + B(P) - \sum_{i=1}^N I(Q_i) \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{2}(3F(P) + B(P)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (3F(Q_i) + B(Q_i)) + \sum_{i=1}^N B(Q_i) \right\} \\ &\quad + F(P) - \sum_{i=1}^N F(Q_i) \end{aligned}$$

ここで、 $I(G)$ 、 $B(G)$ は

$$I(G) = I(P) - \sum_{i=1}^N (I(Q_i) + B(Q_i)),$$

$$B(G) = B(P) + \sum_{i=1}^N B(Q_i)$$

である。この式を使って左辺を整理すると

$$I(G) + \frac{1}{2}B(G) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^N F(Q_i) - F(P)\right) = 1 - N$$

ここで $\frac{1}{2}(F(P) - \sum_{i=1}^N F(Q_i))$ は求めたい面積と一致する。よって

$$\text{Area}(G) = I(G) + \frac{1}{2}B(G) - 1 + N$$

となり、公式がしたがう。 □

5.4 格子多角形に島がある場合

格子多角形の中に島がある場合を考える。色のついた部分が求めたい面積である。島は図 5.5 のように、複数存在してもよいし、島に穴が空いていてその中に島がまた存在してもよい。

やはり先ほどと同じように穴の数が重要になるのだが、穴の数え方がここでは少し特殊である。境界の外側に 1 点、内側に 1 点、適当な点を取り、その 2 点を端点とする曲線を書く。このとき、境界を通過する最小の数をその穴のレベルとする。図 5.5 では、境界を表す記号、例えば Q_3 の下つきの数字 3 はレベルを表している。

定理 5.4 (島がある格子多角形におけるピックの公式). 穴の中に島がある格子多角形 X の面積 $\text{Area}(X)$ は X の内部の格子点の数 $I(X)$ と辺上の格子点の数 $B(X)$ を用いて

$$\text{Area}(X) = I(X) + \frac{1}{2}B(X) - N_1 + N_2 - N_3 + \dots$$

と表される。このとき N_k を k レベルの穴の数とする。

[証明]. レベル k の境界で囲まれた格子多角形を $Y_1^k, Y_2^k, Y_3^k, \dots, Y_{N_k}^k$ と

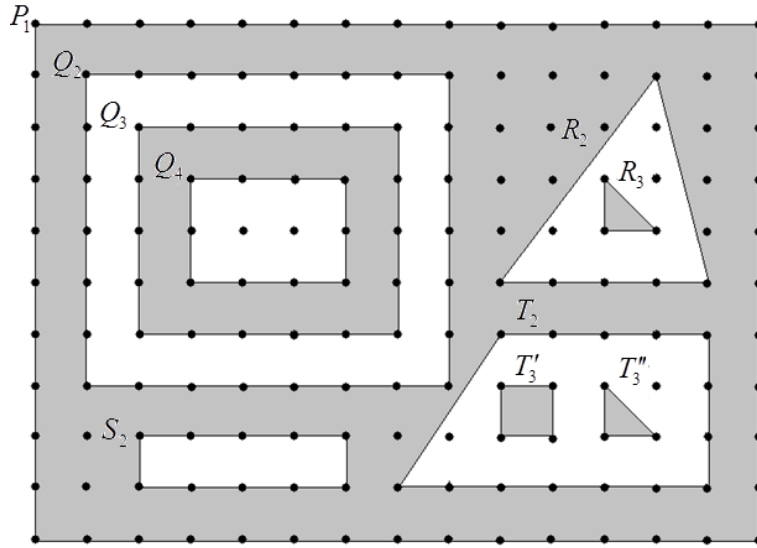


図 5.5: 穴の中に島がある図形

表す。

$$\sum_{i=1}^{N_k} \text{Area}(Y_i^k) \text{ を } k \text{ レベルの格子多角形の面積、}$$

$$\sum_{i=1}^{N_k} I(Y_i^k) \text{ を } k \text{ レベルの穴の内部の格子点の数、}$$

$$\sum_{i=1}^{N_k} B(Y_i^k) \text{ を } k \text{ レベルの穴の境界上の格子点の数}$$

とする。ピックの公式 (定理 2.1) より求めたい面積 $\text{Area}(X)$ は

$$\begin{aligned} \text{Area}(X) &= \sum_{i=1}^{N_1} \text{Area}(Y_i^1) - \sum_{i=1}^{N_2} \text{Area}(Y_i^2) + \sum_{i=1}^{N_3} \text{Area}(Y_i^3) - \sum_{i=1}^{N_4} \text{Area}(Y_i^4) + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} (I(Y_i^1) + \frac{1}{2}B(Y_i^1) - 1) - \sum_{i=1}^{N_2} (I(Y_i^2) + \frac{1}{2}B(Y_i^2) - 1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_3} (I(Y_i^3) + \frac{1}{2}B(Y_i^3) - 1) - \sum_{i=1}^{N_4} (I(Y_i^4) + \frac{1}{2}B(Y_i^4) - 1) + \dots \end{aligned}$$

が成り立っている。ここで

$$\begin{aligned} I(X) &= \sum_{i=1}^{N_1} I(Y_i^1) - \sum_{i=1}^{N_2} (I(Y_i^2) + B(Y_i^2)) + \sum_{i=1}^{N_3} I(Y_i^3) - \sum_{i=1}^{N_4} (I(Y_i^4) + B(Y_i^4)) + \dots \\ B(X) &= \sum_{i=1}^{N_1} B(Y_i^1) + \sum_{i=1}^{N_2} B(Y_i^2) + \sum_{i=1}^{N_3} B(Y_i^3) + \sum_{i=1}^{N_4} B(Y_i^4) + \dots \end{aligned}$$

を使って式を変形すると

$$\text{Area}(X) = I(X) + \frac{1}{2}B(X) - N_1 + N_2 - N_3 + N_4 - \dots$$

となり公式がしたがう。□

5.5 一般のオイラーの公式から一般のピックの公式の証明

一般のオイラーの公式からピックの公式を導く。

定理 5.5. 格子多角形 P で境界が単純閉曲線の交わりのない和であるようなものを考える。このとき、 P の面積 $\text{Area}(P)$ は P の内部の格子点の数 $I(P)$ と辺上の格子点の数 $B(P)$ を用いて

$$\text{Area}(P) = I(P) + \frac{1}{2}B(P) - \chi(P)$$

と表される。 $\chi(P)$ はオイラーの公式 $V(G) - E(G) + F(G) = \chi(P)$ によって表される数である。

[証明]. オイラーの公式 $V(G) - E(G) + F(G) = \chi(P)$ に

$$V(G) = I(P) + B(P), E(G) = \frac{1}{2}(3F(P) + B(P)), F(G) = 2 \text{Area}(P)$$

を代入する。よって

$$\text{Area}(P) = I(P) + \frac{1}{2}B(P) - \chi(P)$$

が成り立つ。□

このことと格子多角形に島がある場合定理 5.4 から、

$$\chi(X) = N_1 - N_2 + N_3 - N_4 + \dots$$

ということがわかる。

6 正六角形格子におけるピックの公式

正多角形の中で平面をタイル張りのように敷き詰められる図形は、正三角形、正方形、正六角形の3つである。

一辺が1の正六角形を平面に敷き詰めた、図 6.1 のような正六角形格子を考える。多くの蜂の巣の構造が、このようになっていることからハニカム構造と呼ばれる。

正六角形格子におけるピックの公式を求めたかったが、結論には至らなかった。なので、その途中経過をこの章で紹介する。

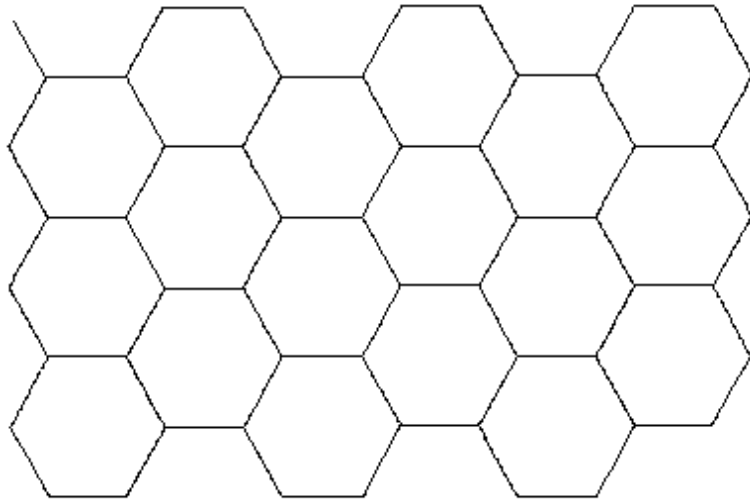


図 6.1: ハニカム構造

6.1 正三角形格子におけるピックの公式

六角形を考える前に図 6.2 のような正三角形格子を考える。

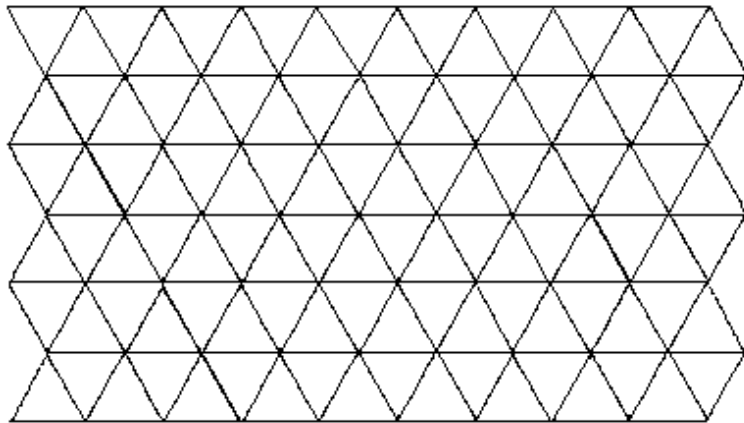


図 6.2: 正三角形格子

基本三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ である。 $\sqrt{3}$ がでてきたことから、正三角形格子

ではピックの公式は、そのままの形では成り立たないことがわかる。そこで新たに正三角形格子におけるピックの公式を考える。

定理 6.1 (正三角格子におけるピックの公式). 格子多角形 P の面積 $\text{Area}(P)$ は P の内部の格子点の数 $I(P)$ と辺上の格子点の数 $B(P)$ を用いて

$$\text{Area}(P) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(I(P) + \frac{1}{2}B(P) - 1 \right)$$

と表される。

[証明]. 格子多角形 P 上の格子点から、 P を見渡した角度を $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ で割った値を $w(P)$ とする。あとは定理 2.1 のときと同様に計算を進めていくと、正三角形格子におけるピックの公式が求まる。□

6.2 正六角形格子でのピックの公式

正六角形の中心に格子点を補うと正六角形格子は、正三角形格子となる。そこで次が成り立つ。

定理 6.2 (正六角格子におけるピックの公式). 格子多角形 P の面積 $\text{Area}(P)$ は、六角形の中心に格子点を補うと、もともとの六角形格子上で、 P の内部の格子点になる格子点の数を $I_1(P)$ 、 P の辺上の格子点になる格子点の数を $B_1(P)$ 、補った六角形の中心で P の内部の格子点になる格子点の数を $I_2(P)$ 、 P の辺上の格子点になる格子点の数を $B_2(P)$ 、とすると

$$\text{Area}(P) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(I_1(P) + I_2(P) + \frac{1}{2}(B_1(P) + B_2(P)) - 1 \right)$$

と表される。

だがこれは正三角形格子におけるピックの公式と変わらない。そこで、この $I_2(P)$ と $B_2(P)$ を使わずに面積を表したいのだが、私の研究ではその方法にいたらなかった。これは今後の課題である。

7 参考文献

- [1] 柘田幹也・福川由貴子, 「格子からみえる数学」, 日本評論社, 2013
- [2] 田村一郎, 「トポロジー」, 岩波全書, 岩波書店, 1972