有理数の小数展開における循環節の不思議

青山学院大学　理工学部　物理数理学科
学籍番号：15108038　氏名：関野　優一 (西山研究室)

February 20, 2014

Contents

1　研究目的 —有理数の循環小数表示の研究—

この論文では、有理数 $r/p \ (0 < r < p)$ の小数表示の循環節の性質を研究する。本研究を行った動機は、私がセミナーで用いた教科書 ([飯高]) に載っていた、2 分割和の定理に興味をもったことである。2 分割和とは、有理数を循環小数表示した時、循環節の長さが偶数ならば、その循環節を二つに区切り、和をとったものをいう。2 分割和はいちじるしい性質を持つことが [飯高, § 7.1] で紹介されている。

定理 1.1 (2 分割和の定理 (Midy の定理)[Midy])**.** $g \geq 2$ を整数、p を素数とする時、真分数 r/p を g 進数展開すると、循環節の長さが偶数ならばその 2 分割和には $g-1$ が並ぶ。

例えば、10 進数展開では

$$\begin{aligned}
1/7 &= 0.\dot{1}4285\dot{7} \rightarrow 142 + 857 = 999 \\
2/7 &= 0.\dot{2}8571\dot{4} \rightarrow 285 + 714 = 999 \\
3/7 &= 0.\dot{4}2857\dot{1} \rightarrow 428 + 571 = 999 \\
4/7 &= 0.\dot{5}7142\dot{8} \rightarrow 571 + 428 = 999 \\
5/7 &= 0.\dot{7}1428\dot{5} \rightarrow 714 + 285 = 999 \\
6/7 &= 0.\dot{8}5714\dot{2} \rightarrow 857 + 142 = 999
\end{aligned}$$

のような例がある。これを一般化して次のような定理も成り立つ ([飯高, § 7.4])。

定理 1.2 (3 分割和の定理)**.** 分母が素数 p の時、真分数 r/p を 10 進数展開すると、循環節の長さが 3 の倍数ならその 3 分割和は $99 \cdots 9$ の倍数になる。

例として

$$\begin{aligned}
1/7 &= 0.\dot{1}4285\dot{7} \rightarrow 14 + 28 + 57 = 99 \\
2/7 &= 0.\dot{2}8571\dot{4} \rightarrow 28 + 57 + 14 = 99 \\
3/7 &= 0.\dot{4}2857\dot{1} \rightarrow 42 + 85 + 71 = 99 * 2 \\
4/7 &= 0.\dot{5}7142\dot{8} \rightarrow 57 + 14 + 28 = 99 \\
5/7 &= 0.\dot{7}1428\dot{5} \rightarrow 71 + 42 + 85 = 99 * 2 \\
6/7 &= 0.\dot{8}5714\dot{2} \rightarrow 85 + 71 + 42 = 99 * 2
\end{aligned}$$

などがあげられる。

ここでは 10 進数展開の形で定理を書いているが一般の g 進数展開でも同様に成り立つことや、 3 分割和だけでなく 5 分割和などへの一般化も [飯高] では研究されている。

一方、2 分割和だけでなく 2 分割差についても考える事ができ、[飯高] にも紹介されてはいるが、証明は与えられていない。本研究では、次の 2 分割差の定理を証明することを目標とする。

定理 1.3 (2 分割差の定理). 真分数 $r/2^n$ を 5 進数展開すると、循環節の長さが偶数なら、その 2 分割差の絶対値は 5 進数表記で $222\cdots223$ となる。

例をあげると次のようなものがある。

$$
\begin{aligned}
1/2^5 &= 0.\dot{0}034231\dot{2} \to |0034 - 2312| = 2223 \\
3/2^5 &= 0.\dot{0}213244\dot{1} \to |0213 - 2441| = 2223 \\
5/2^5 &= 0.\dot{0}342312\dot{0} \to |0342 - 3120| = 2223 \\
7/2^5 &= 0.\dot{1}021324\dot{4} \to |1021 - 3244| = 2223 \\
9/2^5 &= 0.\dot{1}200342\dot{3} \to |1200 - 3423| = 2223 \\
9/2^6 &= 0.\dot{0}02242113100143\dot{4} \to |03224211 - 31001434| = 22222223 \\
59/2^6 &= 0.\dot{4}30104122023313\dot{4} \to |43010412 - 20233134| = 22222223
\end{aligned}
$$

この論文の構成は、この第 1 章を含め、全 6 章からなっている。第 2 章では、本研究の基礎である循環小数の基本的な性質について解説する。第 3 章で 2 分割和の定理の紹介と証明、第 4 章で 3 分割和の定理の紹介と証明、第 5 章で 2 分割差の定理の紹介と証明を行い、本研究のまとめと将来の展望を第 6 章に記している。

2 純環小数の循環節の性質

定義 2.1 (純循環小数). ある桁から先で同じ数字の列が無限に繰り返される小数を**循環小数**という。また、小数第 1 位から循環が始まるものを**純循環小数**、第 2 位以降から始まるものを**混合循環小数**という。本論文では断り無く循環小数と記した場合、それは純循環小数であるとする。

真分数 r/p の分母 p に関する剰余環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を考える。g を p と互いに素な数とすると、g は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の単元となる。$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ を考え、$g \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ の位数を ord g で表わす。

定理 2.2. p を素数とする。上の記号の下に、$\sharp(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = p - 1$ であって、位数 $\mathrm{ord}\, g$ は $p - 1$ の約数である。

この定理の証明にはラグランジュの定理を使う。

定理 2.3. (ラグランジュの定理) 有限群 G の部分群 H に関して

$$|G| = [G : H] \cdot |H|$$

が成り立つ

Proof. γH を G の H に関する左コセットとする。このとき写像 $\varphi : H \to \gamma H$ を左から γ を掛ける写像として定義する。つまり $\varphi(\xi) = \gamma\xi \quad (\xi \in H)$ である。左から γ^{-1} を掛ける写像が γ の逆写像となるので、 φ は全単射である。これで全ての $\gamma \in G$ について $|\gamma H| = |H|$ が成り立つことがわかる。$G = \sum_{j\in J} \gamma_j H$ だから

$$|G| = \sum_{j\in J} |\gamma_j H| = \sum_{j\in J} |H| = |J||H| = [G : H] \cdot |H|$$

これによりラグランジュの定理が証明された。 □

定理 2.4. p と g が互いに素な時、分数 r/p の g 進数展開は循環節の長さが $L = \operatorname{ord} g$ の循環小数となる。

Proof. $g^L = e$ となる最小の自然数 L を g の位数といって $L = \operatorname{ord} g$ と書く。

既約な真分数 r/p を g 進数展開する。gr を p で割り、その商を q_1 余りを r_1 とおくと

$$rg = pq_1 + r_1 \tag{1}$$

となる。そしてこれを繰り返すと

$$\begin{aligned} rg &= pq_1 + r_1 \\ r_1 g &= pq_2 + r_2 \\ r_2 g &= pq_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_j g &= pq_{j+1} + r_{j+1} \end{aligned} \tag{2}$$

これらの式を p を法としてみると

$$\begin{aligned} rg &\equiv r_1 \pmod p \\ r_1 g &\equiv r_2 \pmod p \\ r_2 g &\equiv r_3 \pmod p \\ &\vdots \\ r_j g &\equiv r_{j+1} \pmod p \end{aligned}$$

$rg \equiv r_1$ を $r_1 g \equiv r_2 \pmod p$ に代入すると

$$g^2 r \equiv r_2 \pmod p \tag{3}$$

を得る。同様にして帰納法を用いると $j \geq 1$ に対して $r_j \equiv g^j r$ であることが容易にわかる。このことから $r = r_0$ とすると、循環節は p を法とした、

初項 r 、公比 g の等比数列だとわかる。しかし、余りは p 未満なので $p-1$ 個の値しか取りえないため、必ず同じ余りが出る。よって $m<n$ が存在して $r_m=r_n$ となる。ここで p を法としてみると

$$rg^m \equiv r_m = r_n \equiv rg^n$$

よって

$$rg^m - rg^n \equiv (g^m - g^n)r \equiv 0 \pmod p$$

r と p は互いに素なので

$$g^m - g^n \equiv 0$$

g と p も互いに素なので g には逆元 $v = g{-}1$ が存在する。

$$g^n v^n \equiv 1$$

この式の両辺に g^{m-n} を掛けると

$$g^m v^n \equiv g^{m-n}$$

となり

$$(g^m - g^n)v^n \equiv g^m v^n - g^n v^n \equiv g^{m-n} - 1 \equiv 0$$

これより

$$g^{m-n} \equiv 1$$

を得る。このような $m-n$ は色々あるがその中で最小の自然数を L とすると

$$g^L \equiv 1 \tag{4}$$

である。このような L を g の位数と呼び

$$\operatorname{ord} g = L \tag{5}$$

で表わす。p が素数であること、およびラグランジュの定理 (2.3) から $\operatorname{ord} g$ は $p-1$ の約数になっている。 □

3　2 分割和の定理（Midy の定理）

この章では 2 分割和の定理について考察する。

定理 3.1 (2 分割和の定理（Midy の定理)[Midy]). 分母が素数 p の時、真分数 r/p を g 進数展開すると、循環節の長さが偶数ならその 2 分割和には $g-1$ が並ぶ。

2 分割和の定理の例

$$\begin{aligned}
1/7 &= 0.\dot{1}4285\dot{7} \to 142+857=999\\
2/7 &= 0.\dot{2}8571\dot{4} \to 285+714=999\\
3/7 &= 0.\dot{4}2857\dot{1} \to 428+571=999\\
4/7 &= 0.\dot{5}7142\dot{8} \to 571+428=999\\
5/7 &= 0.\dot{7}1428\dot{5} \to 714+285=999\\
6/7 &= 0.\dot{8}5714\dot{2} \to 857+142=999
\end{aligned}$$

Proof. 2 分割和の定理の証明を行う。循環節の長さを偶数 $2m$ とする。これより

$$g^L \equiv g^{2m} \equiv 1 \pmod p$$

つまり $L = \operatorname{ord} g = 2m$ である。そこで $x = g^m$ とおくと $x^2 \equiv 1 \pmod p$ となる。L を最小の値としているため $x \neq 1$ である。また

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \equiv 0 \pmod p$$

なので、$x \equiv -1$ となり $g^m \equiv x$ であったから $g^m \equiv -1$ となる。$r_k = g^k r$ のため　$r_m \equiv g^m \pmod p$ より

$$r_{m+k} \equiv g^m r_k \equiv -r_k \pmod p, \qquad \therefore \quad r_{m+k} + r_m \equiv 0 \pmod p$$

である。そこで $R_k := r_{m+k} + r_k$ とおくと R_k は p の倍数であり、また r_k, r_{m+k} は p で割った余りなので $0 < r_{m+k} < p$ および $0 < r_k < p$ より

$$0 < R_k = r_{m+k} + r_k < p + p = 2p$$

よって任意の k に対して $R_k = p$ が成り立つ。すると等式（2）より 2 分割和の k 桁目を $Q_k = q_{k+m} + q_k$ とおく。

$$\begin{aligned}
Q_k = q_{k+m} + q_k &= (r_{k+m+1} g - r_{k+m})/p + (r_{k-i} g - r_k)/p\\
&= ((r_{k+m-1} + r_{k-1})g - (r_{k+m} + r_k))/p\\
&= (R_{k-1} g - R_k)/p\\
&= g - 1
\end{aligned}$$

よって

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_m = g - 1$$

が成り立つ。 □

4　3 分割和の定理

この章では 3 分割和の定理について考察する。

定理 4.1 (3 分割和の定理)**.** 分母が素数 p の時、真分数 r/p を 10 進数展開すると、3 の倍数ならその 3 分割和は $99\cdots9$ の倍数になる。

3 分割和の定理の例

$$\begin{aligned}
1/7 &= 0.\dot{1}4285\dot{7} \to 14 + 28 + 57 = 99 \\
2/7 &= 0.\dot{2}8571\dot{4} \to 28 + 57 + 14 = 99 \\
3/7 &= 0.\dot{4}2857\dot{1} \to 42 + 85 + 71 = 99 * 2 \\
4/7 &= 0.\dot{5}7142\dot{8} \to 57 + 14 + 28 = 99 \\
5/7 &= 0.\dot{7}1428\dot{5} \to 71 + 42 + 85 = 99 * 2 \\
6/7 &= 0.\dot{8}5714\dot{2} \to 85 + 71 + 42 = 99 * 2
\end{aligned}$$

Proof. 循環節の長さを $L = 3m$ とする。これより $g^L \equiv g^{3m} \equiv 1 \pmod{p}$ である。循環節を $q_1q_2q_3\cdots q_{3m}$ と表わす。3 分割された最初の循環節を g 進数表記の普通の数として考えると

$$\sum_{j=1}^{m} g^{m-j} q_j \leftrightarrow q_1q_2q_3\cdots q_m$$

のように表わすことができる。同様に $q_{m+1}q_{m+2}\cdots q_{2m}$ と $q_{2m+1}q_{2m+2}\cdots q_{3m}$ も普通の数として表わし和をとると

$$\sum_{j=1}^{m} g^{m-j} q_j + \sum_{j=1}^{m} g^{m-j} q_{j+m} + \sum_{j=1}^{m} g^{m-j} q_{j+2m} = \sum_{j=1}^{m} g^{m-j} (q_j + q_{j+m} + q_{j+2m}) \tag{6}$$

が 3 分割和がある。これが g^{m-1} または $2g^{m-1}$ に一致することを示そう。

$$g^{3m} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$g^m = y$ とおくと

$$(y^3 - 1) = (y-1)(y^2+y+1) \equiv 0 \pmod{p}$$

となる。$L = \operatorname{ord} g$ なので g^k は $k = 3m$ の時初めて 1 になるから

$$y = g^m \neq 1$$

よって

$$y^2 + y + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

より

$$g^{2m} + g^m + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

を得る。これより

$$R_j := r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} \equiv r_j(1 + g^m + g^{2m}) \equiv 0 \pmod{p}$$

よって $r_j + r_{j+m} + r_{j+2m}$ は p の倍数なので

$$R_j = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} = k_j p \qquad (\exists k_j \in \mathbb{Z}) \tag{7}$$

と書ける。 r_j は余りなので $0 < r_j < p$ であるから

$$0 < k_j p = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} < 3p$$

となり k_j は 1 または 2 となる。 $Q_j = q_j + q_{j+m} + q_{j+2m}$ とおくと、等式 (2) より

$$gR_j = pQ_{j+1} + R_{j+1}$$

等式 (7) より

$$gk_j p = pQ_{j+1} + k_{j+1} p$$

両辺を p で割ると

$$gk_j = Q_{j+1} + k_{j+1}$$

となる。したがって

$$Q_j = gk_{j-1} - k_j$$

が成り立つが、この両辺に g^{m-j} を掛けて和をとると

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j g^{m-j} = \sum_{j=1}^{m} g^{m-j+1} k_{j-1} - \sum_{j=1}^{m} g^{m-j} k_j$$

を得る。第 1 項の和 $\sum_{j=1}^{m} g^{m-j+1} k_{j-1}$ の式の $j-1$ をあらためて j とおくと、上の式は

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j g^{m-j} = \sum_{j=0}^{m-1} g^{m-j} k_j - \sum_{j=1}^{m} g^{m-j} k_j$$

となり、右辺の第 1 項の $j=0$ と第 2 項の $j=m$ の項のみが残る。よって

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j g^{m-j} = g^m k_0 - g^0 k_m$$

$k_0 p = r_0 + r_{0+m} + r_{0+2m} = r_{3m} + r_m + r_{m+m} = k_m p$ より $k_0 = k_m$ となる。したがって

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j g^{m-j} = k_0 (g^m - 1)$$

が成り立つ。これが示したかったことであった。 □

5　2 分割差の定理

この章では二分割差について考察する。まず 2 分割差の例をあげておこう。

$$\begin{aligned}
1/2^5 &= 0.\dot{0}034231\dot{2} \to |0034 - 2312| = 2223 \\
3/2^5 &= 0.\dot{0}213244\dot{1} \to |0213 - 2441| = 2223 \\
5/2^5 &= 0.\dot{0}342312\dot{0} \to |0342 - 3120| = 2223 \\
7/2^5 &= 0.\dot{1}021324\dot{4} \to |1021 - 3244| = 2223 \\
9/2^5 &= 0.\dot{1}200342\dot{3} \to |1200 - 3423| = 2223 \\
9/2^6 &= 0.\dot{0}02242113100143\dot{4} \to |03224211 - 31001434| = 22222223 \\
59/2^6 &= 0.\dot{4}30104122023313\dot{4} \to |43010412 - 20233134| = 22222223
\end{aligned}$$

このように $r/2^n$(r は奇数) の形の 5 進数展開は著しい性質をもっている。これを証明する。そのためにまず補題を準備する。

補題 5.1. $n \geq 3$ に対して $5^{2^{n-3}} = a_n 2^{n-1} + 1$ となるような奇数 a_n が存在する。

Proof. n に関する数学的帰納法で証明を行う。(I) $n = 3$ のとき

$$5 = 2^2 + 1$$

なので $a_3 = 1$ ととれる。(II) n に対して $5^{2^{n-3}} = a_n 2^{n-1} + 1$ が成り立つと仮定して $n+1$ のときにも成り立つことを示す。

$$\begin{aligned}
5^{2^{(n+1)-3}} &= 5^{2^{n-2}} \\
&= (5^{2^{n-3}})^2 \\
&= (a_n 2^{n-1} + 1)^2 \quad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\
&= (a_n 2^{n-1})^2 + 2a_n 2^{n-1} + 1 \\
&= {a_n}^2 2^{2n-2} + a_n 2^n + 1 \\
&= 2^n a_n (a_n 2^{n-2} + 1) + 1
\end{aligned}$$

を得る。$n \geq 3$ より $n - 2 > 0$ だから 2^{n-2} は偶数である。奇数と奇数の積は奇数だから $a_n(a_n 2^{n-2} + 1)$ は奇数である。よって $a_{n+1} = a_n(a_n 2^{n-2} + 1)$ とおくと

$$5^{2^{(n+1)-3}} = a_n 2^{n-1} + 1$$

となり、数学的帰納法により補題 5.1 は証明された。 □

補題 5.2. 循環節の長さ L は $L = 2^{n-2}$ となる。

Proof. 乗法群 $G := (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times = \{a \mid a \text{ は } 2^n \text{ と互いに素 }\} = \{a \mid a \text{ は奇数の数 }\}$ より

$$g \in G |G| = 2^{n-1}$$
$$\operatorname{ord} g = 2^k$$

補題 5.1 より

$$5^{2^k} = a_{k+3} 2^{k+2} + 1$$

$k + 2 < n$ で成り立つ。よって $k + 2 = n$ より

$$\operatorname{ord} g = 2^{n-2}$$

となり、等式 (2.4) により補題 5.1 は証明された。 □

定理 5.3 (2 分割差の定理)**.** 真分数 $r/2^n$ を 5 進数展開すると、循環節の長さが偶数なら、その 2 分割差の絶対値は 5 進数表記で $222\cdots223$ となる。

Proof. 5 進数表記 $q_1q_2\cdots q_m$ を数に直すと、$\sum_{k=1}^{m} 5^{m-k}q_k$ となる。したがって定理を示すには

$$\left|\sum_{k=1}^{m} 5^{m-k}q_k - \sum_{k=1}^{m} 5^{m-k}q_{k+m}\right| = 222\cdots223 \tag{8}$$

を証明すればよい。そこで (2.4) と同様に

$$g = 5, \qquad p = 2^n$$

とおく。等式 (3) は p が素数でないときでも成り立つので、等式 (3) より

$$r_k \equiv 5^k r \pmod{p} \tag{9}$$

を得る。また等式 (2) より

$$\begin{aligned} 5r_k &= 2^n q_{k+1} + r_{k+1} \\ 5r_{k+m} &= 2^n q_{k+1+m} + r_{k+1+m} \end{aligned}$$

この式を片々引くと

$$5(r_k - r_{k+m}) = 2^n(q_{k+1} - q_{k+1+m}) + r_{k+1} - r_{k+1+m}$$

上式の両辺に、 2^n を掛けて和をとると、

$$\begin{aligned} &2^n \sum_{k=1}^{m} 5^{m-k}(q_k - q_{k+m}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} 5^{m-(k-1)}(r_{k-1} - r_{k-1+m}) - \sum_{k=1}^{m} 5^{m-k}(r_k - r_{k+m}) \end{aligned}$$

を得る。上式の第 1 項の和 $\sum_{k=1}^{m} 5^{m-(k-1)}(r_{k-1} - r_{k-1+m})$ の $k-1$ をあらためて k とおきなおすと

$$2^n \sum_{k=1}^{m} 5^{m-k}(q_k - q_{k+m}) = \sum_{k=0}^{m-1} 5^{m-k}(r_k - r_{k+m}) - \sum_{k=1}^{m} 5^{m-k}(r_k - r_{k+m})$$

となる。右辺の第 1 項の $k=0$ と第 2 項の $k=m$ が残り、

$$\begin{aligned} 2^n \sum_{k=1}^{m} 5^{m-k}(q_k - q_{k+m}) &= 5^m(r_0 - r_k) - 5^0(r_m - r_0) \\ &= 5^m(r_0 - r_m) - (r_m - r_0) \\ &= (5^m + 1)(r_0 - r_m) \end{aligned}$$

を得る。
次に $r_0 - r_m$ について考える。$r = r_0$ および等式 (9) より

$$\begin{aligned} r - r_m &\equiv r - r5^m \pmod{2^n} \\ &\equiv -r(5^m - 1) \pmod{2^n} \end{aligned}$$

よってある整数 b が存在して

$$r - r_m = b2^n - r(5^m - 1)$$

と書ける。さらに $5^m - 1$ について考えよう。補題 5.1 より

$$5^m - 1 = a_n 2^{n-1}$$

となる奇数 a_n が存在する。よって

$$r - r_m = b2^n - ra_n 2^{n-1}$$

ra_n は奇数だから $ra_n = 2l - 1$ とおくと

$$\begin{aligned} b2^n - ra_n 2n - 1 &= b2^n - (2l-1)2^n - 1 \\ &= (b-l)2^n + 2^{n-1} \\ &\equiv 2^{n-1} \pmod{2^n} \end{aligned}$$

r, r_m は余りなので $0 < r, r_m < 2^n$ よって

$$|r - r_m| < 2^n \tag{10}$$

である。$r = r_m$ とすると、余りが同じだから循環節の長さが m となり $L = 3m$ であったことに矛盾するので、$r - r_m \neq 0$ である。従って 10 より

$$r - r_m = \pm 2^{n-1}$$

よって

$$(r - r_m)(5^m + 1) = \pm 2^{n-1}(5^m + 1)$$

以上より

$$2^n \sum_{k=1}^{m} 5^{m-k}(q_k - q_{k+m}) = \pm 2^{n-1}(5^m + 1)$$

両辺を 2^n で割ると

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=1}^{m} 5^{m-k}(q_k - q_{k+m})\Big| &= 2^{n-1}(5^m + 1)/2^n \\ &= (5^m + 1)/2 = 222\cdots223 \end{aligned}$$

となる。これが示したかったことであった。 $\square$

6　今後の展開

本研究で循環節に関する性質を 3 つ紹介した。しかし、循環節にはまだまだ多くの性質を秘めている可能性がある。本研究での性質は循環節を分割し和か差をとるものであったが、今後は、積や商について考えてみると面白いかもしれない。

References

[飯高] 飯高 茂「環論、これはおもしろい」(共立出版,2013).

[Midy] E.Midy, De Quelques Proprietes des Nombres et des Fractions Decimales Periodiques (Nantes,1836).