ポリボナッチ標準盤の転倒数と逆メジャーインデックス

青山学院大学　理工学部　物理数理学科
15109065　関口 啓　西山研究室

平成 26 年 2 月 20 日

目 次

1　研究の目的ー転倒数とメジャーインデックスー

この論文では、置換の分布をテーマにしている。本研究を行ったきっかけは、卒業研究でフィボナッチ標準盤に関する、置換についての論文 [Ki] を読み、その性質に興味を持ったことである。その論文で紹介されていた標準盤は限定された形 (フィボナッチ標準盤という) であったため、それを一般化することを研究の目標とした。

さらに詳しく説明するために、まずは置換について説明しよう。n 次の置換群を S_n とし、置換 $\sigma \in S_n$ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と書くことにする。置換群に関しては [Na] を参照して欲しい。置換 σ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ からそれ自身への全単射と思うことができるが、$\sigma(i)$ は i の σ による像を表している。また、列 $\sigma(1)\ \sigma(2)\ \cdots\ \sigma(n)$ は $1, \cdots, n$ の順列であるが、しばしばこの順列を用いて σ 自身を表す。

第 2 章で紹介する **転倒数** と **(逆) メジャーインデックス** ((inverse) major index) は、それぞれまったく別の方法で定義されていて、同じ置換 σ に対し、異なる値になることが多い。ところが、置換群 S_n 上において、これらの値の確率分布は等しくなることが知られている [Fo]。詳しくは定理 3.9 で述べる。転倒数もメジャーインデックスも組合わせ論で古くから研究されている、置換群 S_n 上の関数である。特に転倒数は置換の"長さ (length)"と呼ばれることもある。また、メジャーインデックスを変形させて charge と呼ぶこともある [Te]。

今回は置換 σ から決まる量 $\mathrm{Lmap}(\sigma)$ で置換群を類別する。実は、転倒数と逆メジャーインデックス分布は $\mathrm{Lmap}(\sigma)$ によって統制されており、その図形的な表示がフィボナッチ標準盤として表れているのである。

定理では $\mathrm{Lmap}(\sigma)$ によって決まる合同類上において転倒数と逆メジャーインデックスが等分布になることを紹介する。また、その合同類の一部を、図形を用いて組み合わせ論的に表現したフィボナッチ標準盤を研究し、それを一般化したポリボナッチ標準盤を発見した。ポリボナッチ標準盤に更に"相対順序"と呼ばれる条件を課した盤でも両者が等分布になっていることを発見したのだが、その性質を詳しく研究する時間がなく、この論文には載せられなかった。

2 転倒数とメジャーインデックス

n 個の自然数 $1, 2, \cdots, n$ を並び替える変換を (n 次の) 置換という。例えば $1 \mapsto i_1,\ 2 \mapsto i_2,\ \ \cdots,\ n \mapsto i_n$ のとき、この置換を $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ と書く。つまり $\sigma(k) = i_k$ である。 n 次の置換の全体は写像の合成を積として群をなすが、これを n 次の置換群と呼び S_n で表す。S_n はしばしば対称群とも呼ばれる [Na, § 3.2]。

以下、断りがない限り i, j, k, l, m, n などは自然数を表すとする。

2.1 置換の転倒数

定義 2.1. 置換 $\sigma \in S_n$ に対し $i < j, \sigma(i) > \sigma(j)$ であるようなペア (i, j) を**転倒**と呼ぶ。置換 σ における転倒の総数を**転倒数** $\mathrm{inv}(\sigma)$ という。

$$\mathrm{inv}(\sigma) := \sharp\{(i, j) \mid i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j)\} \tag{1}$$

である。転倒数を置換 σ の長さと呼ぶこともある [Te]。

例 2.2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき転倒は

$$\begin{aligned}&(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\&(2,4),(2,5),(2,6),\\&(3,4),(3,5),(3,6),\\&(4,5)\end{aligned}$$

の 12 個。よって $\mathrm{inv}(\sigma) = 12$ である。

定理 2.3. 置換 $\sigma \in S_n$ と、その逆置換 $\sigma^{-1} \in S_n$ の転倒数は等しい。

$$\mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma^{-1}) \quad (\sigma \in S_n) \tag{2}$$

例 2.4. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき 逆置換 $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ なので σ^{-1} の転倒は

$$\begin{aligned}&(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),\\&(1,4),(2,4),(3,4),\\&(1,5),(2,5),(3,5),\\&(1,2)\end{aligned}$$

の 12 個。よって σ^{-1} の転倒数は $\mathrm{inv}(\sigma^{-1}) = 12$ である。例 2.2 より $\mathrm{inv}(\sigma) = 12$ だから確かに $\mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma^{-1})$ となっている。

[証明]. 置換 $\sigma \in S_n$ の 転倒数は定義 2.1 より

$$\mathrm{inv}(\sigma) = \sharp\{(i,j) \mid i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

である。ここで $\sigma^{-1}(k) = j,\ \sigma^{-1}(l) = i$ とおくと $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma$ は恒等写像なので $\sigma^{-1}(\sigma(i)) = i (1 \leq i \leq n)$。つまり $\sigma(i) = \sigma(\sigma^{-1}(l)) = l,\ \sigma(j) = \sigma(\sigma^{-1}(k)) = k$ であるので、逆置換の転倒数は

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}(\sigma^{-1}) &= \sharp\{(k,l) \mid k < l, \sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(l)\}\\&= \sharp\{(\sigma(j),\sigma(i)) \mid \sigma(j) < \sigma(i),\ j > i\}\end{aligned}$$

つまり逆置換 σ^{-1} の転倒の集合は $\{(\sigma(j),\sigma(i)) \mid \sigma(j)<\sigma(i),\ j>i\}$ である。また、置換 σ の転倒の集合は $\{(i,j) \mid i<j,\ \sigma(i)>\sigma(j)\}$ である。これらはペアを決める条件が同じなため、元は違ってもその個数は等しい。したがって $\mathrm{inv}(\sigma)=\mathrm{inv}(\sigma^{-1})$ が成り立つ。□

$\mathrm{inv}(\sigma)$ に関して母関数を考える。$\Phi(q)=\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} q^{\mathrm{inv}(\sigma)}$ を転倒数の母関数と呼ぶ。

$$\Phi(q)=a_0q^0+a_1q^1+a_2q^2+\cdot+a_Nq^N$$

と書くと、a_ℓ は転倒数 ℓ の置換の個数に等しい。つまり

$$a_\ell=\sharp\{\sigma\in S_n \mid \mathrm{inv}(\sigma)=\ell\}$$

である。

系 2.5. 転倒数と逆転頭数の分布は等しい。

$$\Phi(q)=\sum_{\sigma\in S_n} q^{\mathrm{inv}(\sigma)}=\sum_{\sigma\in S_n} q^{\mathrm{inv}(\sigma^{-1})}\ .$$

2.2 メジャーインデックスと逆メジャーインデックス

メジャーインデックス $\mathrm{maj}(\sigma)$ (major index) は組合わせ論で古くから研究されている置換群 S_n 上の関数である。逆メジャーインデックス $\mathrm{imaj}(\sigma)$ (inverse major index) は $\mathrm{imaj}(\sigma)=\mathrm{maj}(\sigma^{-1})$ という性質を持っていることが知られている (定理 2.9)。この節では、(逆) メジャーインデックスの定義や、その性質を紹介する。

定義 2.6. メジャーインデックスと逆メジャーインデックスは、それぞれ **下降集合** $\mathrm{Des}(\sigma)$ (descent set) と **逆下降集合** $\mathrm{Ides}(\sigma)$ (inverse descent set) の元の総和である。置換 $\sigma\in S_n$ に対し $\sigma(i)>\sigma(i+1)$ であるような i の集合を**下降集合** $\mathrm{Des}(\sigma)$ (descent set) という。$\sigma(k)+1$ が $\sigma(k)$ の左側にあるような $\sigma(k)$ の集合を**逆下降集合** $\mathrm{Ides}(\sigma)$ (inverse descent set) という。また $\mathrm{Des}(\sigma)$ の元の総和を $\mathrm{maj}(\sigma)$ と書いて**メジャーインデックス** (major index) と呼ぶ。同様に $\mathrm{Ides}(\sigma)$ の元の総和を $\mathrm{imaj}(\sigma)$ と書いて**逆メジャーインデックス** (inverse major index) と呼ぶ。それぞれの定義を式で書くと以下のようになる。置換 $\sigma\in S_n$ に対して、

$$\mathrm{Des}(\sigma):=\{i \mid \sigma(i)>\sigma(i+1)\} \tag{3}$$

$$\mathrm{Ides}(\sigma):=\{i \mid i=\sigma(k),\ i+1=\sigma(l),\ k>l\} \tag{4}$$

$$\mathrm{maj}(\sigma):=\sum_{i\in\mathrm{Des}(\sigma)} i \tag{5}$$

$$\mathrm{imaj}(\sigma):=\sum_{i\in\mathrm{Ides}(\sigma)} i \tag{6}$$

である。

例 2.7. 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{aligned} \mathrm{Des}(\sigma) &= \{1, 3, 4\} \\ \mathrm{Ides}(\sigma) &= \{1, 3, 5\} \\ \mathrm{maj}(\sigma) &= 1 + 3 + 4 = 8 \\ \mathrm{imaj}(\sigma) &= 1 + 3 + 5 = 9 \end{aligned}$$

この置換 σ は例 2.2 と同じものであるが $\mathrm{inv}(\sigma) = 12$ より転倒数とメジャーインデックスと逆メジャーインデックスは等しくないことがわかる。

定理 2.8. 任意の置換 $\sigma \in S_n$ の逆下降集合は逆置換 $\sigma^{-1} \in S_n$ の下降集合と等しい。

$$\mathrm{Ides}(\sigma) = \mathrm{Des}(\sigma^{-1}) \quad (\sigma \in S_n) \tag{7}$$

[証明]. 任意の置換 $\sigma \in S_n$ の逆下降集合は

$$\mathrm{Ides}(\sigma) = \{i \mid i = \sigma(k),\ i + 1 = \sigma(l),\ k > l\}$$

であったから

$$k = \sigma^{-1}(\sigma(k)) = \sigma^{-1}(i) > l = \sigma^{-1}(\sigma(l)) = \sigma^{-1}(i + 1)$$

が成り立つ。よって $\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(i + 1)$ と表せる。したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{Ides}(\sigma) &= \{i \mid i = \sigma(k),\ i + 1 = \sigma(l),\ k > l\} \\ &= \{i \mid \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(i + 1)\} = \mathrm{Des}(\sigma^{-1}) \end{aligned}$$

である。 □

定理 2.9. 任意の置換 $\sigma \in S_n$ の逆メジャーインデックスは逆置換 $\sigma^{-1} \in S_n$ のメジャーインデックスと等しい。

$$\mathrm{imaj}(\sigma) = \mathrm{maj}(\sigma^{-1}) \quad (\sigma \in S_n) \tag{8}$$

[証明]. 定理 2.8 より明らかである。 □

$\mathrm{maj}(\sigma)$ に関しても $\mathrm{inv}(\sigma)$ 同様に母関数を考えることができるが、実は両者が等しいことを以下で証明する。

2.3 Lmap 集合

定義 2.10. 置換 $\sigma \in S_n$ と $1 \leq i \leq n$ に対して、任意の $1 \leq k \leq i$ を考えたとき、$\sigma(k) \leq \sigma(i)$ ならば i を σ の **Lmap**(**L**eft-to-right **ma**ximum **p**lace) と呼び、$\sigma(i)$ を σ の **Lmal** (**L**eft-to-right **ma**ximum **l**etter) と呼ぶ。 また、任意の $i \leq k \leq n$ を考えたとき $\sigma(k) \geq \sigma(i)$ ならば i を σ の **Rmip**(**R**ight-to-left **mi**nimum **p**lace) と呼び、$\sigma(i)$ を σ の **Rmil**(**R**ight-to-left **mi**nimum **l**etter) と呼ぶ。そして、σ の Lmap の集合を σ の Lmap 集合と呼ぶ。同様にして、Lmal 集合、Rmip 集合、Rmil 集合と呼び、それぞれ $\mathrm{Lmap}(\sigma),\ \mathrm{Lmal}(\sigma),\ \mathrm{Rmip}(\sigma),\ \mathrm{Rmil}(\sigma)$ と書く。式で書くと、$1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq n$ に対して、

$$\mathrm{Lmap}(\sigma) := \{i \mid 1 \leq k \leq i \leq n,\ \sigma(k) \leq \sigma(i)\} \tag{9}$$

$$\mathrm{Lmal}(\sigma) := \{\sigma(i) \mid 1 \leq k \leq i \leq n,\ \sigma(k) \leq \sigma(i)\} \tag{10}$$

$$\mathrm{Rmip}(\sigma) := \{i \mid 1 \leq i \leq k \leq n,\ \sigma(k) \geq \sigma(i)\} \tag{11}$$

$$\mathrm{Rmil}(\sigma) := \{\sigma(i) \mid 1 \leq i \leq k \leq n,\ \sigma(k) \geq \sigma(i)\} \tag{12}$$

である。ちなみに $\sigma(i)$ と $\sigma(k)$ は置換 $\sigma \in S_n$ の定義より相異なる自然数なので $\sigma(i) = \sigma(k)$ となるのは $i = k$ のときのみである。

例 2.11. 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ のとき

$$\mathrm{Lmap}(\sigma) = \{1, 3, 4, 5\}$$
$$\mathrm{Lmal}(\sigma) = \{2, 3, 5, 6\}$$
$$\mathrm{Rmip}(\sigma) = \{2, 3, 6\}$$
$$\mathrm{Rmil}(\sigma) = \{1, 3, 4\}$$

定理 2.12. 置換 $\sigma \in S_n$ に対し次が成り立つ。

$$\mathrm{Lmap}(\sigma) = \mathrm{Rmil}(\sigma^{-1}) \tag{13}$$

[証明]. 置換 $\sigma \in S_n$ に対し Lmap(m 個) を $i_j (1 \leq j \leq m, i_1 < i_2 < \cdots < i_m)$ とすると $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_m)$, $i_1 = 1$, $\sigma(i_m) = n$ つまり

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & 2 & \cdots & i_2 & i_2+1 & \cdots & i_3-1 & \cdots & i_m & i_m+1 & \cdots & n \\ \sigma(i_1) & \underbrace{\sigma(2) \quad \cdots}_{\sigma_{i_1}\text{ より小さい}} & & \sigma(i_2) & \underbrace{\sigma(i_2+1) \quad \cdots \quad \sigma(i_3-1)}_{\sigma(i_2)\text{ より小さい}} & & & \cdots & \sigma(i_m) & \underbrace{\sigma(i_m+1) \quad \cdots \quad \sigma(n)}_{\sigma_{i_m}\text{ より小さい}} & & \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \cdots & \sigma(i_1) & \cdots & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_{m-1}) & \cdots & \sigma(i_m) \\ \underbrace{\cdots}_{i_1\text{より大きい}} & i_1 & \underbrace{\cdots}_{i_2\text{より大きい}} & i_2 & \cdots & i_{m-1} & \underbrace{\cdots}_{i_m\text{より大きい}} & i_m \end{pmatrix}$$

よって

$$\mathrm{Rmil}(\sigma^{-1}) = \{i_j \mid 1 \le j \le m\} \qquad \text{また} \qquad \mathrm{Lmap}(\sigma) = \{i_j \mid 1 \le j \le m\}$$

と書ける。したがって $\mathrm{Lmap}(\sigma) = \mathrm{Rmil}(\sigma^{-1})$ である。 □

3 Foata 全単射と Foata-Schützenberger 全単射

3.1 Foata 全単射

定義 3.1. 置換 $\sigma \in S_n$ に対し、次の手順によって定義された、置換 $\phi(\sigma)$ を対応させる写像 $\phi : S_n \to S_n$ を考える。以下、簡単のため置換 σ を順列で表示して $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2)\,\cdots\,\sigma(n)$ と表すこととする。

まず $w_1 := \sigma(1)$ とおく。以下、長さ i の数字の列 $w_i (1 \le i \le k)$ が与えられたとして、長さ $(k+1)$ の列 w_{k+1} を次のように構成する。

1. w_k の最後尾の数字が $\sigma(k+1)$ より大きい場合、w_k 内の $\sigma(k+1)$ より大きい全ての数字の後ろに縦線を入れて w_k をいくつかのブロックに分割する。同様に、w_k の最後尾の数字が $\sigma(k+1)$ よ小さい場合には、w_k 内の $\sigma(k+1)$ より小さい全ての数字の後ろに縦線を入れる。

2. w_k の各ブロック内において最後尾の数字を最初に移動させるような巡回置換を施し、その後縦線を取り除き結合しなおす。そして列の最後尾に $\sigma(k+1)$ を挿入したものを w_{k+1} とする。

ステップ 1、2 を繰り返す。$\sigma(n)$ を挿入したとき手順は終了する。つまり $\phi(\sigma) := w_n$ である。

例 3.2. $n = 7,\ \sigma = 3\ 4\ 1\ 2\ 7\ 6\ 5$ の場合 :

$$
\begin{array}{ll}
w_1 = 3 \mid & \sigma(2) = 4 \\
w_2 = 3 \mid 4 \mid & \sigma(3) = 1 \\
w_3 = 3 \quad 4 \quad 1 \mid & \sigma(4) = 2 \\
w_4 = 1 \mid 3 \mid 4 \mid 2 \mid & \sigma(5) = 7 \\
w_5 = 1 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 7 \mid & \sigma(6) = 6 \\
w_6 = 7 \mid 1 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 6 \mid & \sigma(7) = 5 \\
w_7 = 7 \quad 6 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 5 = \phi(\sigma) &
\end{array}
$$

実はこの写像 $\phi : S_n \to S_n$ は全単射である。これを **Foata 全単射**と呼ぶ [Fo]。

次に別の写像 $\rho : S_n \to S_n$ を以下のように定める (実は ρ は ϕ の逆写像になっていることを後で示す)。置換 $\sigma \in S_n$ に対し $\rho(\sigma)$ を次の手順で構成する。

$v_{n-1} = \sigma(1)\ \sigma(2)\ \cdots\ \sigma(n-1),\ t_1 = t(n) = \sigma(n)$ とおく。以下、長さ $(n-i)$ の数字の列 $v_{n-i}(1 \leq i \leq k)$ が与えられたとして、長さ $(k+1)$ の列 t_{k+1} を次のように構成する。

1. v_{n-k} の先頭の数字が $t(n-k+1)$ より大きい場合、v_k 内の $t(k+1)$ より大きいすべての数字の前に縦線を入れてブロックをつくり v_k を分割する。同様に、v_{n-k} の先頭の数字が $t(n-k+1)$ より小さい場合には、v_k 内の $t(k+1)$ より小さいすべての数字の前に縦線を入れる。

2. 各ブロック内において先頭の文字を最後尾に移動させるような巡回置換を施し、その後縦線を取り除き結合しなおす。そして列の最後尾の数字を取り除いたものを v_{n-k-1} 、取り除いた数字を $t(n-k)$ 、t_k の先頭に $t(n-k)$ を挿入したものを t_{k+1} とする。

ステップ 1、2 を繰り返す。$t_n = t(1)\ t(2)\ \cdots t(n)$ が作られたとき手順は終了する。つまり $\rho(\sigma) := t_n$ である。

例 3.3. $n=7,\ \sigma = 7\ 6\ 1\ 3\ 4\ 2\ 5$ の場合 :

$$\begin{array}{lr}
v_6 = \mid 7 \mid 6\ \ 1\ \ 3\ \ 4\ \ 2 & t(7)=5 \\
v_5 = \mid 7\ \ 1\ \ 3\ \ 4\ \ 2 & t(6)=6 \\
v_4 = \mid 1 \mid 3 \mid 4 \mid 2 & t(5)=7 \\
v_3 = \mid 1\ \ 3\ \ 4 & t(4)=2 \\
v_2 = \mid 3 \mid 4 & t(3)=1 \\
v_1 = \mid 3 & t(2)=4 \\
 & t(1)=3
\end{array}$$

$\rho(\sigma) = 3\ 4\ 1\ 2\ 7\ 6\ 5$ である。

定理 3.4. 写像 ρ は写像 ϕ の逆写像を与える。したがって $\phi : S_n \to S_n$ は全単射である。

[証明]. 写像 ϕ の第 $(n-1)$ 回目の操作を考える。置換 $\sigma = \sigma(1)\ \sigma(2)\ \cdots\ \sigma(n)$ 、数字の列 $w_{n-1} = a_1\ a_2\ \cdots\ a_{n-1}$ とおくと、
$a_{n-1} > \sigma(n)$ のとき w_{n-1} 内に $\sigma(n)$ より大きい数字が m 個あるとすると、${}^{\forall}a_{i_j} > \sigma(n),\ a_{i_m} = a_{n-1} = \sigma(n-1)$

$$\begin{array}{rcl}
w_{n-1} & = & a_1 \cdots a_{i_1-1}\ a_{i_1} a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}\ a_{i_2}\ \cdots\ a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}\ a_{i_m} \\
 & \mapsto & a_1 \cdots a_{i_1-1}\ a_{i_1} \mid a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}\ a_{i_2} \mid \cdots \mid a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}\ a_{i_m} \mid \\
 & \mapsto & a_{i_1}\ a_1 \cdots a_{i_1-1} \mid a_{i_2}\ a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1} \mid \cdots \mid a_{i_m}\ a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1} \mid \\
 & \mapsto & a_{i_1}\ a_1 \cdots a_{i_1-1}\ a_{i_2}\ a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}\ \cdots\ a_{i_m}\ a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}\ \sigma(n) \\
 & = & w_n = \phi(\sigma)
\end{array}$$

($a_{n-1} < \sigma(n)$ の場合は、$\sigma(n)$ より小さい数字が ℓ 個あるとして同様の操作を行う。)

このときステップ 2 より w_{n-1} 内で生成された各ブロックの最初の文字は必ず $\sigma(n)$ より大きい。($a_{n-1} < \sigma(n)$ の場合は、w_{n-1} 内で生成された各ブロックの最初の文字は必ず $\sigma(n)$ より小さい。) また、写像 ϕ の定義より $w_k (1 \leq k \leq n)$ の最後尾の数字は $\sigma(k)$ である。よって写像 $\rho(\phi(\sigma))$ は
$t(n) = \sigma(n)$

$$\begin{array}{rcl}
v_{n-1} & = & a_{i_1}\ a_1 \cdots a_{i_1-1}\ a_{i_2}\ a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}\ \cdots\ a_{i_m}\ a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1} \\
 & \mapsto & \mid a_{i_1}\ a_1 \cdots a_{i_1-1} \mid a_{i_2}\ a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1} \mid \cdots \mid a_{i_m}\ a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1} \\
 & \mapsto & \mid a_1 \cdots a_{i_1-1}\ a_{i_1} \mid a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}\ a_{i_2} \mid \cdots \mid a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}\ a_{i_m} \\
 & \mapsto & a_1 \cdots a_{i_1-1}\ a_{i_1}\ a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}\ a_{i_2}\ \cdots\ a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}\ a_{i_m}
\end{array}$$

この形は明らかに w_{n-1} である。したがって

$$\begin{aligned} v_{n-2} &= a_1 \cdots a_{i_1-1}\ a_{i_1}a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}\ a_{i_2}\ \cdots\ a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1} \\ t(n-1) &= a_{i_m} = \sigma(n-1), \quad t_2 = t(n-1)\ t(n) \end{aligned}$$

このまま操作を続ければ帰納的に

$$\rho(\phi(\sigma)) = t_n = t(1)\ t(2) \cdots t(n) = \sigma(1)\ \sigma(2) \cdots \sigma(n) = \sigma$$

となる。よって $\rho(\phi(\sigma)) = \sigma$ が成り立つ。

また、$\phi(\rho(\sigma)) = \sigma$ に関しては同様なので証明を割愛する。よって写像 Ψ は写像 ϕ の逆写像である。つまり、写像 ϕ は全単射である。 □

定理 3.5. 置換 $\sigma \in S_n$ に対し Foata 全単射 $\phi(\sigma)$ は写す前の置換 σ のメジャーインデックスと写した後の置換 $\phi(\sigma)$ の転倒数が等しい。また、逆下降集合と Rmil 集合を維持する。式で書くと以下のようになる。

$$\mathrm{maj}(\sigma) = \mathrm{inv}(\phi(\sigma)) \tag{14}$$

$$\mathrm{Ides}(\sigma) = \mathrm{Ides}(\phi(\sigma)) \tag{15}$$

$$\mathrm{Rmil}(\sigma) = \mathrm{Rmil}(\phi(\sigma)) \tag{16}$$

[証明]. 数学的帰納法を用いて証明する。$\sigma \in S_n$ に対して、

$$\sigma_i := \sigma(1)\ \sigma(2) \cdots \sigma(i) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

とする。

(14) の証明

写像 ϕ の操作を考える。1 回目の操作では $w_1 = \sigma(1)$ より $w_2 = \sigma(1)\ \sigma(2) = \sigma_2$ である。

(i) $\sigma(1) < \sigma(2)$ のとき $\mathrm{inv}(w_2) = 0,\ \mathrm{maj}(\sigma_2) = 0$ なので $\mathrm{inv}(w_2) = \mathrm{maj}(\sigma_2)$ である。

(ii) $\sigma(1) > \sigma(2)$ のとき $\mathrm{inv}(w_2) = 1,\ \mathrm{maj}(\sigma_2) = 1$ なので $\mathrm{inv}(w_2) = \mathrm{maj}(\sigma_2)$ である。

よって 1 回目の操作では、$\mathrm{inv}(w_2) = \mathrm{maj}(\sigma_2)$ が成り立つ。$(k-1)$ 回目の操作で $w_k = a_1\ a_2\ \cdots\ a_k$ が与えられたとする。このとき、$\mathrm{maj}(\sigma_k) = \mathrm{inv}(w_k)$ が成り立つと仮定すると、k 回目の操作は以下のようになる。

(i) $a_k > \sigma(k+1)$ のとき w_k 内の $\sigma(k+1)$ より大きい数字が m 個あったとする。それらの数字を $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$ で表す。つまり $a_{i_j} > \sigma(k+1) \quad (1 \leq j \leq m)$ である。

$$
\begin{aligned}
w_k \mapsto \quad & \underbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より小さい}\\(p_1\text{ 個})}} a_{i_1} \mid \underbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より小さい}\\(p_2\text{ 個})}} a_{i_2} \mid \cdots \mid \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より小さい}\\(p_m\text{ 個})}} a_{i_m} \mid \\
& (a_{i_m} = a_k = \sigma(k)) \\
\mapsto \quad & a_{i_1} \underbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より小さい}\\(p_1\text{ 個})}} \mid a_{i_2} \underbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より小さい}\\(p_2\text{ 個})}} \mid \cdots \mid a_{i_m} \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より小さい}\\(p_m\text{ 個})}} \mid \\
\mapsto \quad & a_{i_1} \underbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より小さい}\\(p_1\text{ 個})}} a_{i_2} \underbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より小さい}\\(p_2\text{ 個})}} \cdots \; a_{i_m} \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より小さい}\\(p_m\text{ 個})}} \sigma(k+1) = w_{k+1}
\end{aligned}
$$

$^{\forall}a_{i_j} > \sigma(k+1)$ より各ブロックにおいて a_{i_j} が先頭へ移動すると順序が逆転するペアが p_i 個増えるので転倒数は p_j だけ増加する。つまり全体では転倒数は $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$ だけ増加することになる。さらに $\sigma(k+1)$ より大きい数字 a_{i_j} は全体で m 個存在するため $\sigma(k+1)$ を最後尾に挿入すると順序が逆転するペアが m 個増える。つまり転倒数は m だけ増加する。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{inv}(w_{k+1}) &= \mathrm{inv}(w_k) + \sum_{i=1}^{m} p_i + m \\
&= \mathrm{inv}(w_k) + (k-m) + m \\
&= \mathrm{inv}(w_k) + k
\end{aligned}
$$

$\sigma(k) > \sigma(k+1)$ より、メジャーインデックスは k だけ増えて

$$
\mathrm{maj}(\sigma_{k+1}) = \mathrm{maj}(\sigma_k) + k
$$

となる。また仮定より $\mathrm{inv}(w_k) = \mathrm{maj}(\sigma_k)$ である。したがって $\mathrm{inv}(w_{k+1}) = \mathrm{maj}(\sigma_{k+1})$ である。

(ii) $a_k < \sigma(k+1)$ のとき w_k 内の $\sigma(k+1)$ より小さい数字が m 個あったとする。それ

らの数字を $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$ で表す。つまり ${}^\forall a_{i_j} < \sigma(k+1) \quad (1 \leq j \leq m)$ である。

$$w_k \mapsto \quad \underbrace{a_1 \ \cdots \ a_{i_1-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より大きい} \\ (p_1\text{ 個})}} a_{i_1} \mid \underbrace{a_{i_1+1} \ \cdots \ a_{i_2-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より大きい} \\ (p_2\text{ 個})}} a_{i_2} \mid \cdots \mid \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \ \cdots \ a_{i_m-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より大きい} \\ (p_m\text{ 個})}} a_{i_m} \mid$$

$$(a_{i_m} = a_k = \sigma(k))$$

$$\mapsto \quad a_{i_1} \underbrace{a_1 \ \cdots \ a_{i_1-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より大きい} \\ (p_1\text{ 個})}} \mid a_{i_2} \underbrace{a_{i_1+1} \ \cdots \ a_{i_2-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より大きい} \\ (p_2\text{ 個})}} \mid \cdots \mid a_{i_m} \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \ \cdots \ a_{i_m-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より大きい} \\ (p_m\text{ 個})}} \mid$$

$$\mapsto \quad a_{i_1} \underbrace{a_1 \ \cdots \ a_{i_1-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より大きい} \\ (p_1\text{ 個})}} a_{i_2} \underbrace{a_{i_1+1} \ \cdots \ a_{i_2-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より大きい} \\ (p_2\text{ 個})}} \cdots \ a_{i_m} \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \ \cdots \ a_{i_m-1}}_{\substack{\sigma(k+1)\text{ より大きい} \\ (p_m\text{ 個})}} \sigma(k+1) = w_{k+1}$$

${}^\forall a_{i_j} < \sigma(k+1)$ なので各ブロック内において a_{i_j} が先頭へ移動すると順序が逆転しているペアが p_j 個減ることになる。よって転倒数は p_j だけ減少する。つまり全体では転倒数は $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$ だけ減少する。さらに各ブロック内に $\sigma(k+1)$ より大きいものは p_j 個存在している。つまり全体では $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$ 個存在していることになる。よって $\sigma(k+1)$ を最後尾に挿入すると順序が逆転しているペアが $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$ 個だけ増える。よって転倒数は $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$ だけ増加する。したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{inv}(w_{k+1}) &= \mathrm{inv}(w_k) - \sum_{i=1}^{m} p_i + \sum_{i=1}^{m} p_i \\ &= \mathrm{inv}(w_k) \end{aligned}$$

$\sigma(k) < \sigma(k+1)$ よりメジャーインデックスは変わらないので $\mathrm{maj}(\sigma_{k+1}) = \mathrm{maj}(\sigma_k)$ となる。また仮定より $\mathrm{inv}(w_k) = \mathrm{maj}(\sigma_k)$ である。したがって $\mathrm{inv}(w_{k+1}) = \mathrm{maj}(\sigma_{k+1})$ といえる。

よって i、ii より k 回目の操作によって w_{k+1} が与えられたとき

$$\mathrm{maj}(\sigma_{k+1}) = \mathrm{inv}(w_{k+1}), \quad \sigma_n = \sigma, \quad w_n = \phi(\sigma)$$

なので、帰納法より $\mathrm{maj}(\sigma) = \mathrm{inv}(\phi(\sigma))$ が成り立つ。 $\square$

(15) の証明

写像 ϕ の操作を考える。1 回目の操作では $w_1=\sigma(1)$ より $w_2=\sigma(1)\ \sigma(2)=\sigma_2$ である。よって　$\mathrm{Ides}(w_2)=\mathrm{Ides}(\sigma_2)$ である。

$(k-1)$ 回目の操作で $w_k=a_1\ a_2\ \cdots\ a_k$ が与えられたとする。このとき、$\mathrm{Ides}(\sigma_k)=\mathrm{Ides}(w_k)$ が成り立つと仮定すると、k 回目の操作は以下のようになる。

操作中に作られた w_k のブロックを左から $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_m$ とし、中身に循環置換を施した後のブロックを左から $P'_1,\ P'_2,\ \cdots,\ P'_m$ とする。

(i) $a_k>\sigma(k+1)$ のとき w_k 内の $\sigma(k+1)$ より大きい数字が m 個あったとする。それらの数字を $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$ で表す。つまり $a_{i_j}>\sigma(k+1)\quad(1\leq j\leq m)$

$$
\begin{aligned}
w_k &= a_1 \cdots a_{i_1-1}\ a_{i_1}\ a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}\ a_{i_2}\ \cdots\ a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}\ a_{i_m}\ (a_{i_m}=a_k=\sigma(k))\\
&\mapsto \underbrace{\overbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} a_{i_1}}_{P_1} \mid \underbrace{\overbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} a_{i_2}}_{P_2} \mid \cdots \mid \underbrace{\overbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} a_{i_m}}_{P_m} \mid\\
&\mapsto \underbrace{a_{i_1}\overbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より小さい}}}_{P'_1} \mid \underbrace{a_{i_2}\overbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より小さい}}}_{P'_2} \mid \cdots \mid \underbrace{a_{i_m}\overbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より小さい}}}_{P'_m} \mid \quad (=w'_k\text{とおく})
\end{aligned}
$$

ここで $\mathrm{Ides}(P'_j)$ について考える。P_j 内で $\sigma(k+1)$ より大きい数字は a_{i_j} のみであるため、P_j 内で最大の数字は a_j である。つまり $\mathrm{Ides}(P'_j)\neq\mathrm{Ides}(P_j)$ ならば P_j 内に $a_{i_j}-1$ が存在するはずである。よって $a_{i_j}-1<\sigma(k+1)$ また、$a_{i_j}>\sigma(k+1)\Rightarrow a_{i_j}-1\geq\sigma(k+1)$ である。よって矛盾するので $\mathrm{Ides}(P'_j)=\mathrm{Ides}(P_j)\Rightarrow\mathrm{Ides}(w'_k)=\mathrm{Ides}(w_k)$ である。さらに操作を続けると

$$w_k \mapsto a_{i_1}\ a_1 \cdots a_{i_1-1}\ a_{i_2}\ a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}\ \cdots\ a_{i_m}\ a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}\ \sigma(k+1)=w_{k+1}$$

w_k 内に $a_t=\sigma(k+1)+1\ \ (1\leq t\leq k)$ が存在するならば

$$\mathrm{Ides}(w_{k+1})=\mathrm{Ides}(w_k)\cup\{\sigma(k+1)\},\ \mathrm{Ides}(\sigma_{k+1})=\mathrm{Ides}(\sigma_k)\cup\{\sigma(k+1)\}$$

と表せる。存在しないならば

$$\mathrm{Ides}(w_{k+1})=\mathrm{Ides}(w_k),\ \mathrm{Ides}(\sigma_{k+1})=\mathrm{Ides}(\sigma_k)$$

と表せる。仮定より $\mathrm{Ides}(w_k)=\mathrm{Ides}(\sigma_k)$ なので $\mathrm{Ides}(w_{k+1})=\mathrm{Ides}(\sigma_{k+1})$ である。

(ii) $a_k<\sigma(k+1)$ のとき w_k 内の $\sigma(k+1)$ より小さい数字が m 個あったとする。それ

らの数字を $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$ で表す。つまり $a_{i_j} < \sigma(k+1) \quad (1 \leq j \leq m)$

$$w_k = a_1 \cdots a_{i_1-1}\ a_{i_1}\ a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}\ a_{i_2}\ \cdots\ a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}\ a_{i_m} \quad (a_{i_m} = a_k = \sigma(k))$$

$$\mapsto \underbrace{\overbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より大きい}} a_{i_1}}_{P_1} \mid \underbrace{\overbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より大きい}} a_{i_2}}_{P_2} \mid \cdots \mid \underbrace{\overbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より大きい}} a_{i_m}}_{P_m} \mid$$

$$\mapsto \underbrace{a_{i_1} \overbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より大きい}}}_{P'_1} \mid \underbrace{a_{i_2} \overbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より大きい}}}_{P'_2} \mid \cdots \mid \underbrace{a_{i_m} \overbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}^{\sigma(k+1)\text{ より大きい}}}_{P'_m} \mid \quad (= w'_k\text{とおく})$$

ここで $\mathrm{Ides}(P'_j)$ について考える。P_j 内で $\sigma(k+1)$ より小さい数字は a_{i_j} のみであるため、P_j 内で最小の数字は a_j である。つまり $\mathrm{Ides}(P'_j) \neq \mathrm{Ides}(P_j)$ ならば P_j 内に $a_{i_j}+1$ が存在するはずである。よって $a_{i_j}+1 > \sigma(k+1)$ である。また、$a_{i_j} < \sigma(k+1) \Rightarrow a_{i_j}+1 \leq \sigma(k+1)$ と表せる。よって矛盾するので $\mathrm{Ides}(P'_j) = \mathrm{Ides}(P_j) \Rightarrow \mathrm{Ides}(w'_k) = \mathrm{Ides}(w_k)$ である。さらに操作を続けると

$$w_k \mapsto a_{i_1}a_1 \cdots a_{i_1-1}a_{i_2}a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}\ \cdots\ a_{i_m}a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}\sigma(k+1) = w_{k+1}$$

w_k 内に $a_t = \sigma(k+1)+1 \quad (1 \leq t \leq k)$ が存在するならば

$$\mathrm{Ides}(w_{k+1}) = \mathrm{Ides}(w_k) \cup \{\sigma(k+1)\},\ \mathrm{Ides}(\sigma_{k+1}) = \mathrm{Ides}(\sigma_k) \cup \{\sigma(k+1)\}$$

と表せる。存在しないならば

$$\mathrm{Ides}(w_{k+1}) = \mathrm{Ides}(w_k),\ \mathrm{Ides}(\sigma_{k+1}) = \mathrm{Ides}(\sigma_k)$$

と表せる。仮定より $\mathrm{Ides}(w_k) = \mathrm{Ides}(\sigma_k)$ なので $\mathrm{Ides}(w_{k+1}) = \mathrm{Ides}(\sigma_{k+1})$ である。

よって k 回目の操作によって w_{k+1} が与えられたとき、 $\mathrm{Ides}(\sigma_{k+1}) = \mathrm{Ides}(w_{k+1}),\ \sigma_n = \sigma,\ w_n = \phi(\sigma)$ なので帰納法より $\mathrm{Ides}(\sigma) = \mathrm{Ides}(\phi(\sigma))$ である。 □

(16) の証明

写像 ϕ の操作を考える。1 回目の操作では $w_1 = \sigma_1$ より $w_2 = \sigma(1)\ \sigma(2) = \sigma_2$ である。よって $\mathrm{Rmil}(\sigma_2) = \mathrm{Rmil}(w_2)$ である。$(k-1)$ 回目の操作で $w_k = a_1\ a_2\ \cdots\ a_k$ が与えられたとする。このとき、$\mathrm{Rmil}(\sigma_k) = \mathrm{Rmil}(w_k)$ が成り立つと仮定すると、k 回目の操作は以下のようになる。

(i) $a_k > \sigma(k+1)$ のとき w_k 内の $\sigma(k+1)$ より大きい数字が m 個あったとする。それ

らの数字を $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$ で表す。つまり $a_{i_j} > \sigma(k+1) \quad (1 \leq j \leq m)$ とし

$$
\begin{aligned}
w_k &= \underbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} a_{i_1} \underbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} a_{i_2} \ \cdots \ \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} a_{i_m} \quad (a_{i_m} = a_k = \sigma(k)) \\
&\mapsto \underbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} a_{i_1} \mid \underbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} a_{i_2} \mid \cdots \mid \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} a_{i_m} \mid
\end{aligned}
$$

このとき最後尾にある a_{i_m} は定義より必ず $\mathrm{Rmil}(w_k)$ の元となるが、各ブロック内で $\sigma(k+1)$ より大きい数字は a_{i_j} のみなので a_{i_j} はブロック内で最大の数字である。つまり $a_{i_j} (j \neq m)$ は $\mathrm{Rmil}(w_k)$ に含まれない。そして、a_{i_m-1} は a_{i_m} より小さいので $\mathrm{Rmil}(w_k)$ に含まれる。$\mathrm{Rmil}(\sigma_k) = \mathrm{Rmil}(w_k)$ より $\mathrm{Rmil}(\sigma_k)$ も同様。操作を進めると

$$
w_k \mapsto a_{i_1} \underbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} \mid a_{i_2} \underbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} \mid \cdots \mid a_{i_m} \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} \mid \quad (= {w'}_k \text{とおく})
$$

ここで $\mathrm{Rmil}({w'}_k)$ について考える。$a_{i_m} (= \sigma(k))$ が最後尾ではなくなったため $a_{i_j} \notin \mathrm{Rmil}({w'}_k)$ となる。a_{i_m-1} は最後尾なので $a_{i_m-1} \in \mathrm{Rmil}({w'}_k)$ である。a_{i_j} 以外の数字の順番は変わらないので $\mathrm{Rmil}({w'}_k) = \mathrm{Rmil}(w_k) \setminus \{\sigma(k)\}$ となる。さらに操作を続けて

$$
w_k \mapsto a_{i_1} \underbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} a_{i_2} \underbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} \cdots \ a_{i_m} \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より小さい}} \sigma(k+1) = w_{k+1}
$$

$\sigma(k+1)$ は最後尾で $a_{i_m-1} < \sigma(k+1)$ より $\sigma(k+1) \in \mathrm{Rmil}(w_{k+1})$, $a_{i_m-1} \in \mathrm{Rmil}(w_{k+1})$ よって

$$
\mathrm{Rmil}(w_{k+1}) = \mathrm{Rmil}({w'}_k) \cup \{\sigma(k+1)\} = (\mathrm{Rmil}(w_k) \setminus \{\sigma(k)\}) \cup \{\sigma(k+1)\}
$$

となる。$\mathrm{Rmil}(\sigma_k)$ の元は a_{i_j} 以外全て $\sigma(k+1)$ より小さいので $\sigma(k) = a_{i_m} > \sigma(k+1)$ より

$$
\mathrm{Rmil}(\sigma_{k+1}) = (\mathrm{Rmil}(\sigma_k) \setminus \{\sigma(k)\}) \cup \{\sigma(k+1)\}
$$

仮定より、$\mathrm{Rmil}(w_k) = \mathrm{Rmil}(\sigma_k)$ なので

$$
\mathrm{Rmil}(w_{k+1}) = \mathrm{Rmil}(\sigma_{k+1})
$$

(ii) $a_k < \sigma(k+1)$ のとき w_k 内の $\sigma(k+1)$ より小さい数字が m 個あったとする。それらの数字を $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$ で表す。つまり $a_{i_j} > \sigma(k+1) \quad (1 \leq j \leq m)$ である。

また、$v_m = a_{i_1}\ a_{i_2}\ \cdots\ a_{i_m}$ とし、次のように考える。 まず、

$$w_k = \underbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より大きい}} a_{i_1}\ \underbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より大きい}} a_{i_2}\ \cdots\ \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より大きい}} a_{i_m} \quad (a_{i_m} = a_k = \sigma(k))$$

と表せる。このとき Rmil 集合の定義から、$\sigma(K+1)$ より大きい数字は Rmil の元にはならない。つまり、$\mathrm{Rmil}(w_k) = \mathrm{Rmil}(v_m)$ である。操作を続けると

$$w_k \mapsto a_{i_1}\ \underbrace{a_1 \cdots a_{i_1-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より大きい}} a_{i_2}\ \underbrace{a_{i_1+1} \cdots a_{i_2-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より大きい}} \cdots\ a_{i_m}\ \underbrace{a_{i_{m-1}+1} \cdots a_{i_m-1}}_{\sigma(k+1)\text{ より大きい}} \sigma(k+1) = w_{k+1}$$

となる。このとき、$a_{i_m} = \sigma(k) < \sigma(k+1)$ より

$$\mathrm{Rmil}(w_{k+1}) = \mathrm{Rmil}(v_m) \cup \{\sigma(k+1)\} = \mathrm{Rmil}(w_k) \cup \{\sigma(k+1)\}$$
$$\mathrm{Rmil}(\sigma_{k+1}) = \mathrm{Rmil}(\sigma_k) \cup \{\sigma(k+1)\}$$

である。仮定より、$\mathrm{Rmil}(w_k) = \mathrm{Rmil}(\sigma_k)$ なので

$$\mathrm{Rmil}(w_{k+1}) = \mathrm{Rmil}(\sigma_{k+1})$$

である。

よって k 回目の操作によって w_{k+1} が与えられたとき、

$$\mathrm{Rmil}(\sigma_{k+1}) = \mathrm{Rmil}(w_{k+1}), \quad \sigma_n = \sigma, \quad w_n = \phi(\sigma)$$

なので帰納法より $\mathrm{Rmil}(\sigma) = \mathrm{Rmil}(\phi(\sigma))$ が成り立つ。 □

3.2 Foata-Schützenberger 全単射

定義 3.6. 置換 $\sigma \in S_n$ に対し $\mathbf{i}(\sigma) = \sigma^{-1}, \Psi = \mathbf{i} \circ \phi \circ \mathbf{i}$ とすると、写像 Ψ は明らかに全単射である。この写像を Foata-Schützenberger 全単射と呼ぶ。

定理 3.7. 全単射 Ψ は写す前の置換 σ の逆メジャーインデックスと写した後の置換 $\phi(\sigma)$ の転倒数が等しい。また、下降集合と Lmap 集合を維持する。式で表すと

$$\mathrm{Des}(\sigma) = \mathrm{Des}(\Psi(\sigma)) \tag{17}$$
$$\mathrm{Lmap}(\sigma) = \mathrm{Lmap}(\Psi(\sigma)) \tag{18}$$
$$\mathrm{imaj}(\sigma) = \mathrm{inv}(\Psi(\sigma)) \tag{19}$$

と書ける。

[証明].
(17) の証明
定理 2.8 より $\mathrm{Ides}(\sigma) = \mathrm{Des}(\mathbf{i}(\sigma))$ である。また、定理 3.5(15) より $\mathrm{Ides}(\sigma) = \mathrm{Ides}(\phi(\sigma))$ である。よって

$$\mathrm{Des}(\sigma) = \mathrm{Ides}(\mathbf{i}(\sigma)) = \mathrm{Ides}(\phi \circ \mathbf{i}(\sigma)) = \mathrm{Des}(\mathbf{i} \circ \phi \circ \mathbf{i}(\sigma))$$

となる。したがって $\mathrm{Des}(\sigma) = \mathrm{Des}(\Psi(\sigma))$ が示された。 □
(18) の証明
定理3.5(16) より $\mathrm{Rmil}(\sigma) = \mathrm{Rmil}(\phi(\sigma))$ である。また、定理2.12 より $\mathrm{Lmap}(\sigma) = \mathrm{Rmil}(\mathbf{i}(\sigma))$ である。よって

$$\mathrm{Lmap}(\sigma) = \mathrm{Rmil}(\mathbf{i}\sigma) = \mathrm{Rmil}(\phi \circ \mathbf{i}(\sigma)) = \mathrm{Lmap}(\mathbf{i} \circ \phi \circ \mathbf{i}(\sigma))$$

となる。したがって $\mathrm{Lmap}(\sigma) = \mathrm{Lmap}(\Psi(\sigma))$ が示された。 □
(19) の証明
定理 2.9 より $\mathrm{imaj}(\sigma) = \mathrm{maj}(\mathbf{i}(\sigma))$ である。また、定理 3.5(14) より $\mathrm{maj}(\sigma) = \mathrm{inv}(\phi(\sigma))$ である。さらに、定理 2.3 より $\mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{inv}(\mathbf{i}(\sigma))$ である。よって

$$\mathrm{imaj}(\sigma) = \mathrm{maj}(\mathbf{i}(\sigma)) = \mathrm{inv}(\phi \circ \mathbf{i}(\sigma)) = \mathrm{inv}(\mathbf{i} \circ \phi \circ \mathbf{i}(\sigma))$$

となる。したがって $\mathrm{imaj}(\sigma) = \mathrm{inv}(\Psi(\sigma))$ が示された。 □

3.3 置換群 S_n における転倒数と (逆) メジャーインデックス

定理 3.8. 任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対し、転倒数と (逆) メジャーインデックスは等分布である [Ma]。母関数で表示すると次のように書ける。

$$\sum_{\sigma \in S_n} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} = \sum_{\sigma \in S_n} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} \tag{20}$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} q^{\mathrm{imaj}(\sigma)} = \sum_{\sigma \in S_n} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} \tag{21}$$

[証明].
(20) の証明　置換 $\sigma,\ \phi(\sigma) \in S_n$ に対し、定理 3.5(14) より $\mathrm{maj}(\sigma) = \mathrm{inv}(\phi(\sigma))$ である。また、定理 3.4 より写像 $\phi : S_n \to S_n$ は全単射である。よって、 $\mathrm{maj}(\sigma)$ と、それと等しい $\mathrm{inv}(\phi(\sigma))$ が必ず 1 対 1 で対応している。したがって、転倒数が等しい値をとる置換

の分布と、メジャーインデックスが等しい値をとる置換の数の分布は同じである。つまり、 S_n 上で両者は等分布である。よって母関数で表示すると

$$\sum_{\sigma \in S_n} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} = \sum_{\sigma \in S_n} q^{\mathrm{inv}(\sigma)}$$

である。 □

<u>(21) の証明.</u>　全単射 Ψ について (20) の証明と同様に考えればよい。 □

3.4 置換群の部分集合における転倒数と逆メジャーインデックス

置換群 S_n 上において転倒数と (逆) メジャーインデックスが等分布であることは前の節でわかった。そこで、置換群 S_n をいくつかの集合に分割し、新しくできた部分集合上での分布を見てみる。

定理 3.9. Lmap 集合が等しい置換の集合を合同類 $L \subset S_n$ として、置換群を類別する。合同類 L 上で転倒数と逆メジャーインデックスは等分布である。

$$\begin{aligned} & L := \{\sigma \in S_n \mid \text{Lmap 集合が等しい}\} \subset S_n \\ & \Longrightarrow \sum_{\sigma \in L} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} = \sum_{\sigma \in L} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} \end{aligned} \tag{22}$$

[証明]. 定理 3.7(18),(19) より、全単射 $\Psi : S_n \to S_n$ によって写される置換は写す前と後で lmap 集合は等しい。かつ、写す前の置換の逆メジャーインデックスと、写した後の置換の転倒数は等しい。よって Lmap 集合が等しい全ての置換を集めた合同類 L 上では転倒数と逆メジャーインデックスは等分布である。 □

さらに別の部分集合について考える。n 個の相異なる数字の列に対して隣接する 2 つの組 ($n-1$ 個ある) の大小関係を指定した順列を考えよう。このような大小関係を 1 つ指定することを順列に相対順序を指定するといい、隣接する数字の $n-1$ 組の大小関係の並びを相対指数と呼ぶ。

例 3.10. $\sigma = 3\ 1\ 7\ 5\ 4\ 2\ 6$ と $\tau = 4\ 3\ 6\ 5\ 2\ 1\ 7$ は同じ相対順序を持ち、相対指数は $><>>><$ である。(これを $+-+++-$ などと書くこともある。)

定理 3.11. 置換を数字の列として考えたとき、$3>1<7>5>4>2<6,\quad 4>3<6>5>2>1<7$ のように、相対順序が同じであるような置換の集合を合同類 $D\in S_n$ として、置換群を類別する。合同類 D 上で転倒数と逆メジャーインデックスは等分布である。

$$\begin{aligned} &D := \{\sigma\in S_n \mid \text{相対順序が等しい}\}\subset S_n \\ &\Longrightarrow \sum_{\sigma\in D} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} = \sum_{\sigma\in D} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} \end{aligned} \tag{23}$$

[証明]. 相対順序を考えるにあたって、上昇集合というものを新たに定義づける。置換 $\sigma\in S_n$ に対し $\sigma(i)<\sigma(i+1)$ であるような i の集合を**上昇集合** $\mathrm{Asc}(\sigma)$ (ascent set) と呼ぶことにする。つまり、

$$\mathrm{Asc}(\sigma) := \{i \mid \sigma(i)<\sigma(i+1)\}$$
$$(\mathrm{Des}(\sigma) := \{i \mid \sigma(i)>\sigma(i+1)\})$$

である。また、全単射 Ψ は上昇集合を維持する。つまり、

$$\mathrm{Asc}(\sigma)=\mathrm{Asc}(\Psi(\sigma))$$

である。この式の証明は、全単射 Ψ が下降集合を維持する (定理 3.7(17)) ことの証明と同様の考えでできるので割愛する。以上のことから、全単射 Ψ は、下降集合の定義から $\sigma(i)>\sigma(i+1)$ であるような $\sigma(i)$ の位置 i を維持し、上昇集合の定義から $\sigma(i)<\sigma(i+1)$ であるような $\sigma(i)$ の位置 i も維持することがわかる。これは $>$ の位置と $<$ の位置が変わらないことを意味している。したがって、全単射 Ψ は相対順序を維持し、さらに、写す前の置換の逆メジャーインデックスと、写した後の置換の転倒数は等しい。よって、相対順序が同じであるようなすべての置換を集めた合同類 D 上では転倒数と逆メジャーインデックスは等分布である。 □

4 フィボナッチ図形

4.1 フィボナッチ図形の定義

合同類 L を図形を用いて組み合わせ論的に表現する。まずはその図形がどのようなものかを紹介する。

定義 4.1. 1 と 2 の数字の並びをシェイプ μ とし、シェイプを形成する全ての 1, 2 の合計を大きさ $|\mu|$ とする

定義 4.2. 与えられたシェイプ μ の 1 を$\square$, 2 を$\begin{array}{c}\square\\[-4pt]\square\end{array}$ として書き換えた図形を**フィボナッチ図形**とよぶ

定義 4.3. フィボナッチ図形のマスの中に以下のルールに従って数字入力したものをフィボナッチ標準盤と呼ぶ。

1. $|\mu| = n$ のとき、マスに入る数字は n 以下の相異なる自然数のみである。
2. 下の行に関してのみ、右方向に単調減少である。
3. 各列において、下のマスより上のマスのほうが小さい数字が入る。

※上の行は左右に大小関係は存在しない。

定義 4.4. フィボナッチ標準盤 T の数字を最右端から, 下から上に読み上げる。この操作を最左端の列まで順に行い, 読み上げた順に数字を並べたものをコラムリーディングワード $\mathrm{w_c}(T) \in S_n$ と呼び、これを置換とする。

例 4.5. $\mu = (1, 2, 2, 1, 2)$ のとき

フィボナッチ図形: $\begin{array}{ccccc} & \square & \square & & \square \\[-4pt] \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$

フィボナッチ標準盤 (24 通り)

T_1 :

	3	5		1
8	7	6	4	2

T_2:

	6	1		2
8	7	5	4	3

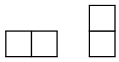
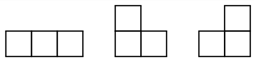
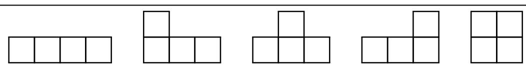
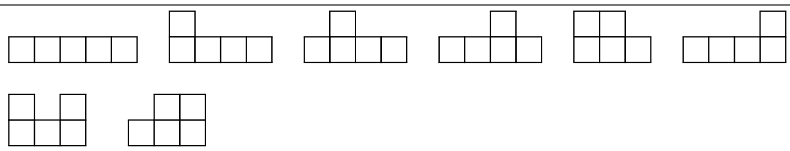
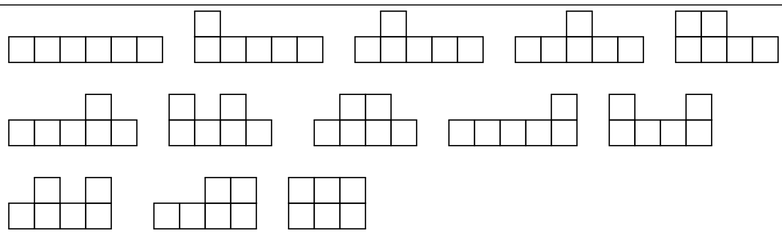
$\cdots$

コラムリーディングワード

$\mathrm{w_c}(T_1) = 2\ 1\ 4\ 6\ 5\ 7\ 3\ 8$, $\mathrm{w_c}(T_2) = 3\ 2\ 4\ 5\ 1\ 7\ 6\ 8$, $\cdots$

4.2　フィボナッチ図形の性質

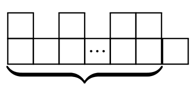
図形のパターンとその個数

$\lvert\mu\rvert$	図形のパターン	図形の個数 $F_{\lvert\mu\rvert}$
0	なし	1
1		1
2		2
3		3
4		5
5		8
6		13
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	省略	$F_{n-1}+F_{n-2}(n\geq 2)$

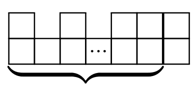
定理 4.6. $\lvert\mu\rvert=n$ に対しフィボナッチ図形の個数 $F_n(n\geq 2)$ はフィボナッチ数である。

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1} \tag{24}$$

[証明]. 　帰納法で証明する。$\lvert\mu\rvert=n$ のとき $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{d_n})$ と置く。$n=2$ のとき $F_0=1,\ F_1=1,\ F_2=2$ より $F_2=F_1+F_0$ である。$n=k$ のとき (24) が成り立つと仮定する。$n=k+1$ のときのフィボナッチ図形のパターンは、$n=k$ の図形の全パターンの最後にマスを 1 つだけ付け加えたものと、$n=k-1$ の図形の全パターンの最後にマスを 2 つだけ付け加えたものを足し合わせればよい。つまり、

$\mu_{d_{k+1}}=1$ のとき 

$n=k$ の図形 (F_k 通り) のパターン

$\mu_{d_{k+1}}=2$ のとき 

$n=(k-1)$ の図形 (F_{k-1} 通り) のパターン

よって

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

となる。したがって数学的帰納法により成り立つ。 $\square$

定理 4.7. シェイプ $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_d)$ とする。このとき $\mu'_i := (\mu_i, \mu_{i+1}, \cdots, \mu_d) \quad (1 \leq i \leq d)$ とすると、シェイプ μ によって形が決められたフィボナッチ図形から得られるフィボナッチ標準盤の個数 $N(\mu)$ は以下の式で計算できる。

$$N(\mu) = \prod_{i=1}^{d} (|\mu'_i| - 1) \tag{25}$$

例 4.8. フィボナッチ図形：$\begin{array}{ccccc} & \square & \square & & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$ のときフィボナッチ標準盤のパターンは

$\begin{array}{ccccc} & 3 & 2 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 3 & 1 & & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 2 & 3 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & & 3 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 1 & 3 & & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & & 3 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 4 & 2 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{array}$

$\begin{array}{ccccc} & 4 & 1 & & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 2 & 4 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 1 & 4 & & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 4 & 3 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 3 & 4 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 5 & 2 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 5 & 1 & & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 3 \end{array}$

$\begin{array}{ccccc} & 2 & 5 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 1 & 5 & & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 5 & 3 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 3 & 5 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 5 & 4 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 4 & 5 & & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 6 & 2 & & 1 \\ 8 & 7 & 5 & 4 & 3 \end{array}$

$\begin{array}{ccccc} & 6 & 1 & & 2 \\ 8 & 7 & 5 & 4 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 6 & 3 & & 1 \\ 8 & 7 & 5 & 4 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{ccccc} & 6 & 4 & & 1 \\ 8 & 7 & 5 & 3 & 2 \end{array}$ 計 24 通り

このとき $\mu = 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ ,\quad \mu_i = 2 \quad (i = 2, 3, 5)$ であって、

$$|\mu'_2| = 2 + 2 + 1 + 2 = 7, \quad |\mu'_3| = 2 + 1 + 2 = 5, \quad |\mu'_5| = 2$$

$$\therefore N(\mu) = \prod_{\mu_i = 2} (|\mu'_i| - 1) = (7-1)(5-1)(2-1) = 6 \times 4 = 24 \text{ 通り}$$

[証明]. 定理 5.4 にて証明する。 $\square$

定理 4.9. シェイプ μ のフィボナッチ標準盤 T から得られる全ての置換の集合を $\mathcal{F}_\mu$ とすると、$\mathcal{F}_\mu$ に属する置換はすべて Lmap 集合が等しく、Lmap 集合の元を昇順に並べると、隣り合う元の差は高々2 である。逆にこのような Lmap 集合を持つ置換はすべてこのようにして得られる。つまり

$$\mathcal{F}_\mu = \{\sigma \in S_n \mid \sigma = \mathrm{w_c}(T)\}, T \text{ はシェイプが} \mu \text{のフィボナッチ標準盤} \tag{26}$$

このとき $\sigma \in \mathcal{F}_\mu$ に対し $\mathrm{Lmap}(\sigma) = \{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_d\}$ （形式的に $\ell_{d+1} := n + 1$ とおく）は

$$\ell_{j+1} > \ell_j, \quad \ell_{j+1} - \ell_j = \mu_{d-j+1} = 1 \text{ または } 2 \quad (1 \leq j \leq d)$$

を満たす。

[証明]. シェイプ $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_d) \quad (|\mu| = n)$ を考える。T をシェイプが μ のフィボナッチ標準盤として、そのコラムリーディングワード $\mathrm{w_c}(T)$ を考えよう。

まずは出来上がったフィボナッチ標準盤をコラムリーディングワードの定義にしたがって右の列から順に、下から上に読み上げていく。フィボナッチ標準盤の定義より、各列において大きい数字は下のマスに入るため、上のマスは Lmap の条件を満たさない。また、下の列に関して右に向かって単調減少であるということは、コラムリーディングワードの読み上げる順番を考慮すれば、T の下段は必ず Lmap に対応していることがすぐにわかる。したがって μ が決まれば置換における図形の下段に対応する位置は読み上げによって常に一定である。よって同じポリボナッチ図形からは同じ Lmap 集合を持つ置換しか作れない。

フィボナッチ標準盤の第 i 列目を考える。$\mu_i = 1$ のとき、コラムリーディングワードの読み上げる順番を考えると、i 列目の下の数字が読み上げられた直後に $i+1$ 列目の下の数字が読み上げられる。よって隣接しているため $\ell_{d-i+1} - \ell_{d-i} = 1$ となる。$\mu_i = 2$ のときは、i 列目の下の数字が読み上げられた後、その上の数字が読まれてから、$i+1$ 列目の下の数字が読み上げられる。つまり、1 つ数字を間に挟む形になる。よって $\ell_{i+1} - \ell_i = 2$ となる。よって $\ell_{j+1} > \ell_j, \quad \ell_{j+1} - \ell_j = 1\mathrm{or}2 \quad (1 \leq j \leq d, \ell_{d+1} = n+1)$ が示された。□

4.3 フィボナッチ図形における転倒数と逆メジャーインデックス

定理 4.10. フィボナッチ図形 F から得られるフィボナッチ標準盤について考える。それらの標準盤から作られるすべての置換の集合 $F' \subset S_n$ を考える。F' 上において転倒数と逆メジャーインデックスは等分布である [Ki]。

$$\sum_{\mathrm{w_c}(T) \in F'} q^{\mathrm{inv}(\mathrm{w_c}(T))} = \sum_{\mathrm{w_c}(T) \in F'} q^{\mathrm{imaj}(\mathrm{w_c}(T))} \tag{27}$$

[証明]. 定理 4.9 より、F' は Lmap 集合が等しい集合と考えることができるので、定理 3.9 の証明と同様にして求めることができる。□

5 ポリボナッチ図形

5.1 ポリボナッチ図形の定義

フィボナッチ図形では定理 4.9 からわかるように、合同類 L を狭義的にしか表せていない。そこで、任意の合同類 L を表現できる図形を考えてみる。

定義 5.1. フィボナッチ図形を拡張した図形を考える。シェイプ $\mu = \mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_d$ としたとき
$1 \leq \mu_i \leq 3 (1 \leq i \leq d)$ を縦 1 列の μ_i 個の $\square$ に置き換えたもの**トリボナッチ図形**という。
$1 \leq \mu_i \leq 4 (1 \leq i \leq d)$ を縦 1 列の μ_i 個の $\square$ に置き換えたものを**テトラナッチ図形**という。

$$\vdots$$

$1 \leq \mu_i \leq n (1 \leq i \leq d\ ,\ n \geq 1)$ を縦 1 列の μ_i 個の $\square$ に置き換えたものを**ポリボナッチ図形**という。

これらには包含関係

(フィボナッチ図形) $\subset$ (トリボナッチ図形) $\subset$ (テトラナッチ図形) $\subset$ (ポリボナッチ図形)

が成り立つ。よって一般のポリボナッチ図形で考えれば十分である。ゆえに、以下、ポリボナッチ図形についてのみ考える。

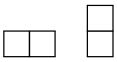
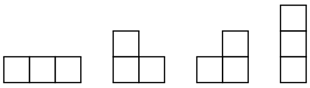
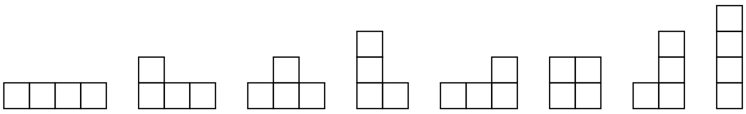
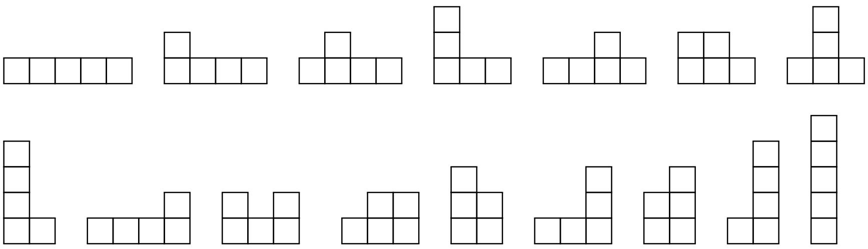
定義 5.2. ポリボナッチ図形のマスに以下のルールに従って数字に置き換えたものをポリボナッチ標準盤とよぶ。

1. $|\mu| = n$ のとき、マスに入る数字は n 以下の相異なる自然数のみ
2. 底の行に関してのみ、右方向に単調減少
3. 各列において、底のマスが最も大きい数字が入る

※下から 2 行目以降に関して, 左右上下に大小関係は存在しない

5.2　ポリボナッチ図形の性質

ポリボナッチ図形のパターンとその個数

$\lvert\mu\rvert$	図形のパターン	図形の個数 $F_{\lvert\mu\rvert}$
0	なし	1
1		1
2		2
3		4
4		8
5		16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	省略	$\sum_{i=0}^{n-1} P_i \quad (n \geq 1)$

定理 5.3. $\lvert\mu\rvert = n$ であるポリボナッチ図形の個数 $P_n (n \geq 1)$ は次のようになる。

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} P_i = 2^{n-1} \quad (n \geq 1) \tag{28}$$

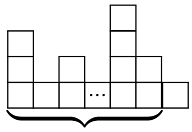
[証明]. 帰納法で証明する。$\lvert\mu\rvert = n$ のとき $\mu = \mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_{d_n}$ とおく。フィボナッチ図形の場合と同様に考えていく。

$n = 1$ のとき $P_0 = 1,\ P_1 = 1$ より $P_1 = \sum_{i=0}^{0} P_i = 2^0$

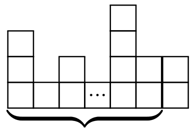
$n = k$ のとき (5.2) が成り立つと仮定する。$n = k+1$ のときのポリボナッチ図形のパターンは 、$n = k$ の図形の全パターンの最後にマスを 1 つだけ付け加えたもの、$n = k - 1$

の図形の全パターンの最後にマスを 2 つだけ付け加えたもの、$\cdots$ 、$n=0$ の図形の全パターンの最後にマスを $k+1$ 個付け加えたものを足し合わせればよい。つまり、

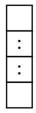
$\mu_{d_{k+1}} = 1$ のとき



$\mu_{d_{k+1}} = 2$ のとき



$\mu_{d_{k+1}} = k+1$ のとき



よって

$$P_{k+1} = P_k + P_{k-1} + \cdots + P_0 = \sum_{i=0}^{k} P_i$$

である。したがって、数学的帰納法により $P_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} P_i$ は成り立つ。

また、

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_i = P_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} P_i = P_{n-1} + P_{n-1} = 2P_{n-1} = \cdots = 2^{n-1}P_1$$

と書けるので、

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} P_i = 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

となる。 □

定理 5.4. シェイプ $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_d)$ とする。このとき $\mu'_i := (\mu_i, \mu_{i+1}, \cdots, \mu_d) \quad (1 \leq i \leq d)$ とすると、シェイプ μ によって形が決められたポリボナッチ図形から得られるポリボナッチ標準盤の個数 $N(\mu)$ は以下の式で計算できる。

$$N(\mu) = \prod_{i=1}^{d} \frac{(|\mu'_i| - 1)!}{(|\mu'_i| - \mu_i)!} \tag{29}$$

[証明]. シェイプを $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_d) \quad (|\mu| = n)$ とおく。第 1 列目を考える。$\mu = 1$ のときはマスに n を入れるしかない。 $\mu_1 \geq 2$ のとき、一番下のマスに最大の数字 (n) が入り、それより上のマスへの数字の入れ方は、$n-1(=|\mu'_1|-1)$ 個中 $(\mu_1 - 1)$ 個を選ぶ順列なので、$\frac{(|\mu'_1|-1)!}{(|\mu'_1|-\mu_1)!}$ 通りある。次に第 2 列目を考える。すでに第 1 列目で μ_1 個の数字

を使っているので、今残っている数字は全部で $|{\mu'}_2|$ 個ある。$\mu_2 \geq 2$ のとき、一番下の増すにその中で最大の数字が入り、それより上のマスへの数字の入れ方は全部で $\frac{(|{\mu'}_2|-1)!}{(|{\mu'}_2|-\mu_2)!}$ 通りある。$\mu_1 = 1$ のときは 1 通り。更に続けていけば帰納的に、第 d 列で $\mu_d \geq 2$ のとき、$\frac{(|{\mu'}_d|-1)!}{(|{\mu'}_d|-\mu_d)!}$ 通り、$\mu_d = 1$ のときは 1 通りあることまで求めることができる。そしてこれらを掛け合わせたものが標準盤の個数になるので

$$N(\mu) = \prod_{i=1}^{d} \frac{(|\mu'_i| - 1)!}{(|\mu'_i| - \mu_i)!}$$

となる。 □

定理 5.5. シェイプ μ によって形を固定されたポリボナッチ標準盤 T から得られる全ての置換の集合を $\mathcal{P}_\mu$ とすると、$\mathcal{P}_\mu$ 上の置換はすべて Lmap 集合が等しい。

$$\mathcal{P}_\mu = \{\sigma \in S_n \mid \text{Lmap 集合が等しい}\} \tag{30}$$

このとき $\sigma \in \mathcal{F}_\mu$ に対し $\mathrm{Lmap}(\sigma) = \{\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_d\}$ (形式的に $\ell_{d+1} := n + 1$ とおく) は

$$\ell_{j+1} > \ell_j, \quad \ell_{j+1} - \ell_j = \mu_{d-j+1} \quad (1 \leq j \leq d)$$

[証明]. シェイプ $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_d) \quad (|\mu| = n)$ を考えよう。

このときのコラムリーディングワード $\mathrm{w_c}(T)$ を考える。まずは出来上がったポリボナッチ標準盤を定義にしたがって右の列から順に、下から上に読み上げていく。ポリボナッチ標準盤の定義より、各列において一番大きい数字は底のマスに入るため、下から 2 段目から上のマスは Lmap の条件を満たさない。また、底の列に関して右に向かって単調減少であるということは、コラムリーディングワードの読み上げる順番を考慮すれば、底の列は必ず Lmap に対応していることがすぐにわかる。したがって、シェイプ μ が決まれば置換における図形の底の列に対応する位置は読み上げによって常に一定である。よって同じポリボナッチ図形からは同じ Lmap 集合を持つ置換しか作れない。 □

5.3 ポリボナッチ図形における転倒数と逆メジャーインデックス

定理 5.6. ポリボナッチ図形 P から得られるポリボナッチ標準盤を考える。それらの標準盤から作られるすべての置換の集合 $P' \subset S_n$ を考える。

$$\sum_{\mathrm{w_c}(T) \in P'} q^{\mathrm{inv}(\mathrm{w_c}(T))} = \sum_{\mathrm{w_c}(T) \in P'} q^{\mathrm{imaj}(\mathrm{w_c}(T))} \tag{31}$$

[証明]. 定理 4.9 より、P' は Lmap 集合が等しい集合と考えることができるので、定理 3.9 の証明と同様にして求めることができる。 □

6　まとめと将来の展望

本研究の主定理は

$$L := \{\sigma \in S_n \mid \text{Lmap 集合が等しい}\} \subset S_n$$
$$\Longrightarrow \sum_{\sigma\in L} q^{\mathrm{inv}(\sigma)} = \sum_{\sigma\in L} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} \tag{32}$$

と、この合同類 L を図形で組合せ論的に表現した

$$\sum_{\mathrm{w_c}(T)\in P'} q^{\mathrm{inv}(\mathrm{w_c}(T))} = \sum_{\mathrm{w_c}(T)\in P'} q^{\mathrm{imaj}(\mathrm{w_c}(T))} \tag{33}$$

である。ポリボナッチ標準盤は、一番下のマスを除いてた各列では順序を仮定していない。この標準盤の各列に対し相対順序を指定すると、定理 3.11 の図形的表現になるのだが、これに関しては研究の時間が足りず、ひとつの図形から得られる標準盤の個数など、掘り下げられそうな課題が残ってしまったのが悔しい。相対順序について調べてみると新しい発見があるかもしれない。

参考文献

[BjWa] A. Björner. M. Wachs. Permutation statistics and linear extensions of posets, J. Combin. Theory, Ser. A 58 (1991) 85-114.

[Fo] D. Foata. On the Netto inversion number of a sequence, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968) 236-240.

[FoSc] D. Foata. M.P. Schützenberger. Major index and inversion number of permutations, Math. Nachr. 83 (1978) 143-159.

[Ki] K. Killpatrick. Some statistics for Fibonacci tableaux,European Journal of Combinatorics 30 (2009) 929-933.

[Ma] P.A. MacMahon. *Combinatory Analysis, vol. 1*, Cambridge Univ. Press, London, England, 1915.

[Na] 中島 匠一. 代数と数論の基礎，共立出版，2000.

[Te] 寺田至. 「N-stable flags 全体」 の affine 空間分割と 「length と charge の対称性」 の一般化 (代数的組合せ論). 数理解析研究所講究録 768 (1991): 146-159.