双曲正三角形と一次分数変換

物理数理学科

15107058　筒井　慧　（西山研究室）

目次

まえがき

４年生になってから、前期の輪講のテキスト（参[2]）では、主に群論を扱っていた。その中でも図形の対称群という章が自分の中では最も興味深いもので、それに関係あるテーマを卒業研究の題材にしようと思い、この研究を行った。双曲平面での図形を研究対象に選んだ理由は、一見正三角形とは思えないような形の図形でも実はすべての辺の長さが等しく、また対称性も変わらず持っているという性質が面白かったからである。

双曲平面を研究するにあたって、まず（参[1]）に従って一次分数変換から学んでいった。一次分数変換とは、一次変換を分母・分子それぞれに持つ形の変換（有理変換）で、そのままでは複素平面上の写像として定義できない。そのためリーマン球面という複素平面と無限遠点を表す ∞ をあわせた集合を考える必要があった。これを用いて ∞ が写る点と ∞ へ写る点を定義することで、ようやく一次分数変換を写像として定義する事ができる。

双曲平面のモデルの一つとして、今回の研究では上半平面を取り扱った。上半平面とは、虚部が正である複素平面上の点の集合で、ここに通常とは異なる長さを与えることで、ユークリッド平面とは異なる正三角形を考えることができる。この長さを双曲距離と呼ぶが、この双曲距離に関する上半平面上の直線は、２点を通る半円の弧となり、２点間の距離は角度のみで計算できる。

また上半平面では一次分数変換と虚軸に関する反転が等長写像となるため、これを用いて正三角形を作る事を試みた。まず頂点の一つを虚軸上に取り、そこから虚軸に関して対称な位置にある２点をとれば、二等辺三角形ができる。残りの一辺が同じ長さになるような２点の取り方をすれば、それは双曲正三角形となるはずだと考えた（計算の結果は論文中を参照)。そこで等長写像による回転の存在を確かめ、一次分数変換の性質から一般的な回転対称性を求める事も行った。

鏡映についても、虚軸に関する反転以外のものを考えた。回転によって鏡映を動かすとその軸はどこに写るのかを確かめ、それが確かに鏡映の軸になっている事を確認することで、双曲正三角形の対称性が三次の二面体群 D_3 と同型であることを確かめた。

今回は確認をしていないが、他の双曲正多角形の対称性も二面体群と同型であるはずで、この研究結果を使えばそれを確認することはそう難しくないはずだ。

2012/2/22

1. 一次分数変換とリーマン球面

1.1　一次分数変換とリーマン球面

複素数 a, b, c, d に対して、

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

とおく。上のような形をした複素平面上の変換を、**一次分数変換**という。ただし $ad - bc \neq 0$ を仮定する。一次分数変換は複素数を複素数に移すが、分母が０の場合があるため、写像として定義できない点がある。そのため、リーマン球面を考えることが必要になる。

複素数全体と ∞ を元とする集合を考える。このとき ∞ は無限遠点を意味しているが、ここではただの記号の一つとして考える。この集合を**リーマン球面**と呼ぶ（複素射影直線と呼ぶこともある）。つまり

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

である。これを幾何学的に表すとその名の通り球面になるのだが、これを以下説明しよう。

３次元空間内の原点を中心とした単位球面 S^2 を考える。北極点 $N(0,0,1)$ と球面上の N 以外の点 P を結ぶ直線は xy 平面とただ１点で交わる。この点を $\Pi(P)$ で表すと、S^2 から N を除いた点の集合　$S^2 \setminus \{N\}$　を角度を保ったまま xy 平面上に写すことができる。これを**立体射影**という。

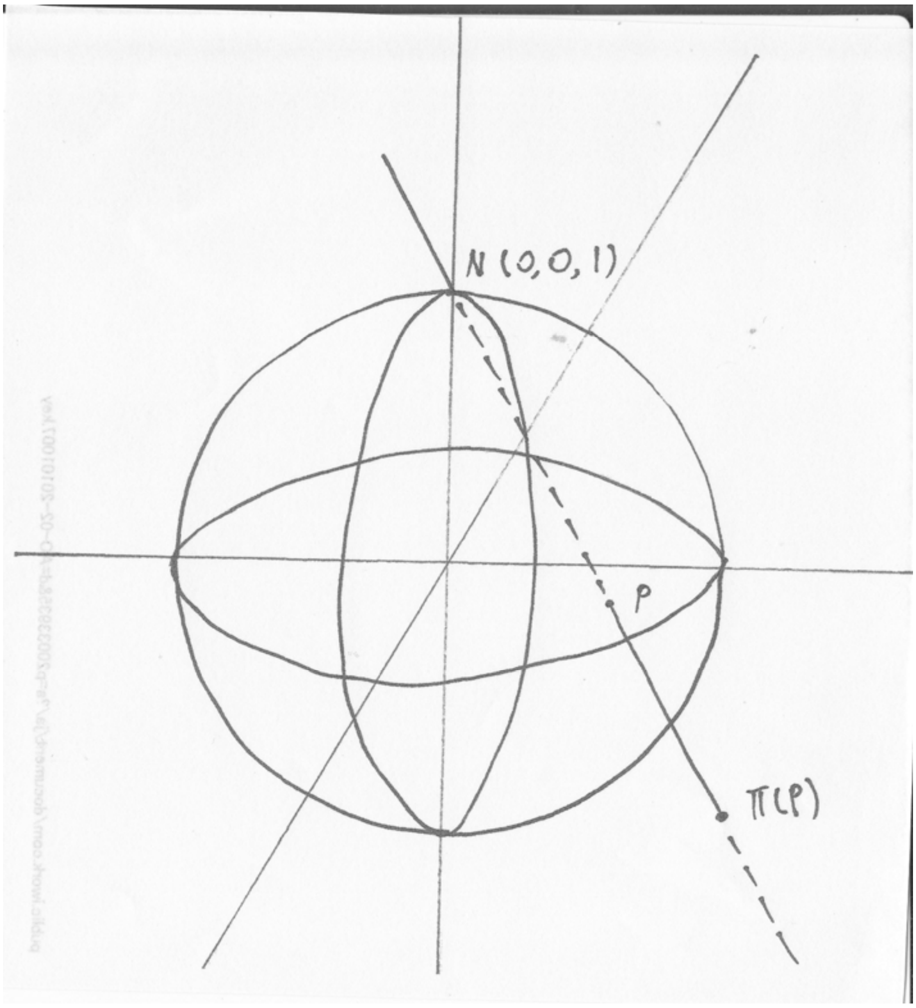


図 1.1　射影直線の図

立体射影を座標を用いて表わしてみよう。

$$\overrightarrow{ON} = (0,0,1) = \vec{n}$$

$$\overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta, \gamma) = \vec{p}$$

とおいて、直線 NP 上の点をパラメータ表示すると、

$$\ell:\ \vec{v} = s\vec{n} + t\vec{p} \qquad (s + t = 1)$$

となる。従ってその成分表示は

$$\vec{v} = s\vec{n} + t\vec{p} = (t\alpha, t\beta, s + t\gamma)$$

である。xy平面上の点（x, y）を通常のように複素数 $x + iy$ と同一視して、$\mathbb{R}^3$内のxy平面を複素平面と思うことにする。すると、ℓ とxy平面の交点では z 座標は０、だから $s + t = 1$ と$s + t\gamma = 0$ を連立して

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \qquad \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\gamma}\begin{pmatrix} -\gamma \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t = \frac{1}{1-\gamma},\ \ \mathrm{s} = \frac{-\gamma}{1-\gamma}$$

がわかる。従って

$$\vec{v} = \frac{-\gamma}{1-\gamma}\vec{n} + \frac{1}{1-\gamma}\vec{p} = (\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma}, 0)$$

となるから、複素数として表わすと、

$$\Pi(P) = \frac{\alpha}{1-\gamma} + i\frac{\beta}{1-\gamma} = x + iy$$

である。 Π の逆写像を Π^{-1} で表すと、

$$\Pi^{-1}(x + iy) = P$$

となるが、これも座標を用いて表してみよう。まず $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{s}^2$ より

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

また上の関係式

$$x = \frac{\alpha}{1-\gamma},\ \ y = \frac{\beta}{1-\gamma}$$

を用いて

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = x^2(1-\gamma)^2 + y^2(1-\gamma)^2 + \gamma^2 = 1,$$
$$(x^2 + y^2)(1 - 2\gamma + \gamma^2) + \gamma^2 - 1 = 0,$$
$$\gamma^2(x^2 + y^2 + 1) - 2\gamma(x^2 + y^2) + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

である。二次方程式を解くと、

$$\gamma = \frac{x^2 + y^2 \pm \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2 + 1}}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 \pm 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

このとき

$$\gamma = \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} = 1$$

のときは $\alpha = \beta = 0$ で、この点は N そのものを表している。従って P に対応する、γ は次のようになる。

$$\gamma = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

また、これを代入して P の座標を調べると、

$$\alpha = x(1 - \gamma) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \qquad \beta = y(1 - \gamma) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$P = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

となる。このとき、複素平面上の点 $x + iy$ において $|x + iy|^2 = x^2 + y^2 \to \infty$ とすると、$(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,1) = \mathrm{N}$ となり、$\Pi^{-1}(x + iy) \to \mathrm{N}$ となることがわかる。そのため N は複素平面上の無限遠に対応する点と思うことができる。そこで、$\Pi(\mathrm{N}) = \infty$ と置くことによって、 S^2 からリーマン球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ への写像が得られ、これは等角的である。一次変換 $\varphi(z)$ は $z = -\frac{d}{c}$ では定義されていなかったが、

$$\begin{cases} c \neq 0 \text{ のとき } \varphi\left(\dfrac{-d}{c}\right) = \infty, \ \ \varphi(\infty) = \dfrac{a}{c} \\ c = 0 \text{ のとき } \varphi(\infty) = \infty \end{cases}$$

と置くことで、写像 $\varphi:\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ へと拡張することができる。

1.2 一次分数変換の性質

２つの一次分数変換

$$\varphi_1(z)=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\quad,\quad \varphi_2(z)=\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$$

の合成 $\varphi_1\circ\varphi_2(z)=\varphi_1(\varphi_2(z))$ を考える。

$$\begin{aligned}\varphi_1(\varphi_2(z))&=\frac{a_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+b_1}{c_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+d_1}\\&=\frac{a_1(a_2z+b_2)+b_1(c_2z+d_2)}{c_1(a_2z+b_2)+d_1(c_2z+d_2)}\\&=\frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+(a_1b_2+b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+d_1d_2)}\qquad\cdots(1.2)\end{aligned}$$

この式を見ると、これはまた一次分数変換になることがわかる。式(1.2)の各係数は 2×2 行列の一般線形群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$の２つの元

$$A_1=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$$

の積 A_1A_2 の成分と一致する。実際、行列の積を計算すると

$$A_1A_2=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2&a_1b_2+b_1d_2\\c_1a_2+d_1c_2&c_1b_2+d_1d_2\end{pmatrix}$$

となって(1.2)の係数と等しいことがわかる。これを利用し、φ の逆写像 $\varphi^{-1}(z)$ を求める。A の逆行列A^{-1}は

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

である。$ad-bc\neq 0$としているので、逆行列が存在することに注意する。

行列式 $ad-bc$ は、一次分数変換の形にするときに分母・分子で約分され、変換そのものには影響しない。よって

$$\varphi^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}$$

となる。写像の合成は一般的な性質として結合性を持つので、逆写像を逆元と

すれば一次分数変換全体は写像の合成を積として群をなす。この群をFと置く。このようにして、2つの群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ と F の間に全射準同型が決まることがわかる。

$$\psi\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow F$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \psi(A)(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

また、$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \supset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ なので、準同型 $\psi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow F$ が存在するが、これもまた全射である。それを確かめよう。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

に対して

$$s \coloneqq \sqrt{ad-bc}$$

とおき、

$$a' = \frac{a}{s}\ , b' = \frac{b}{s}\ , c' = \frac{c}{s}\ , d' = \frac{d}{s}$$

を考えると、

$$a'd' - b'c' = 1$$

であって

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

がわかる。このとき、

$$\varphi'_A(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'} = \frac{az+b}{cz+d} = \varphi_A(z)$$

だから写像として $\varphi_A = \varphi_{A'}$ が成り立つ。従って

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow F$$

は全射である。

この関係を使えば、一次分数変換を常に $ad-bc=1$ を仮定したうえで計算することもできる。

2.上半平面（双曲平面）

2.1　上半平面における直線と長さ

通常のユークリッド平面における曲線 ℓ のパラメータ表示を $\ell(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ $(a\le t\le b)$ とすると、ℓ の長さ $\mathrm{Leg}(\ell)$ は次のような積分で求める事ができる。

$$\mathrm{Leg}(\ell)=\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{dt}}\right|\mathrm{dt}\qquad \text{ただし}\quad \left|\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{dt}}\right|=\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2}$$

またユークリッド平面上の２点　$\mathrm{P}=(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)$, $\mathrm{Q}=(\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2)$　の間の距離は

$$\mathrm{d(P,Q)}=\sqrt{(\mathrm{p}_1-\mathrm{q}_1)^2+(\mathrm{p}_2-\mathrm{q}_2)^2}$$

で定義される。このとき２点間の距離は、以下のように２点を結ぶ曲線の下限であらわせることに注意しよう。

$$\mathrm{d(P,Q)}=\inf\left\{\mathrm{Leg}(\ell)\middle|\ell:[a,b]\to\mathbb{R}^3,\ell(a)=\mathrm{P},\ell(b)=\mathrm{Q}\right\}$$

では非ユークリッド空間で直線の長さはどう定義すればよいのか考えてみよう。

複素平面において、虚部が正であるような複素数全体の事を**上半平面**といい、Hで表す。式で書くと以下のようになる。

$$H=\{x+iy|y>0\}$$

上半平面は双曲計量を考えることによって双曲平面の一つと考えられ、H 上の曲線には通常のユークリッド平面とは異なる長さを与えることができる。ここでは H 上の曲線 $\ell=\big(x(t),y(t)\big)$　$(a\le t\le b)$ の長さ $\mathrm{Leg}(\ell)$ を、次のような積分で定義しよう。

$$\mathrm{Leg}(\ell)=\int_a^b\frac{1}{y}\left|\frac{d\ell}{dt}\right|dt$$

$$= \int_a^b \frac{1}{y}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

$\ell(t) = x(t) + iy(t)$ は H 上の点なので、$y(t)$ は常に正である。従って、曲線の長さは常に正である。この分母があるため、H での曲線の長さは y 座標が１以下ならユークリッドの距離と比べて長く、１以上なら短くなる。P，Q $\in$ H とし、２点間の距離 d (P，Q)は、通常のユークリッド空間とは異なり、P と Q を結ぶ曲線ℓの双曲的な長さ Leg(ℓ)の下限で定義する。

$$\mathrm{d}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \inf\left\{ \mathrm{Leg}\left(\ell\right) | \ell : [a, b] \to H, \ell(a) = \mathrm{P}, \ell(b) = \mathrm{Q} \right\}$$

これを双曲距離とよぶ。以下双曲距離しか触れないので、ユークリッドの距離と同じ記号を使うことにする。双曲平面 H における直線は、２点間を結ぶ最短の曲線であるが、２点の x 座標が異なる場合は中心を実軸上に持つ、その２点を通る半円であり、また同じ x 座標の場合は実軸と垂直な半直線の形をしている。（参考文献　双曲幾何　図 2.10（p.68）参照）

半円の場合の距離の計算を、座標を極表示にして行ってみよう。中心が c, 半径が r の半円上の２点の距離を考える。そこで半円上の点をパラメータ θ を用いて次のように表す。

$$\ell = x + iy = r\cos\theta + c + ir\sin\theta \qquad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$$

θをパラメータにとったので、

$$\left|\frac{d\ell}{d\theta}\right| = \sqrt{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2}$$

であるが、

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}(r\cos\theta + c) = -r\sin\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}(r\sin\theta) = r\cos\theta \end{cases}$$

だから、

$$\mathrm{Leg}\left(\ell\right) = \int_a^b \frac{1}{y}\left|\frac{d\ell}{dt}\right| dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{y}\left|\frac{d\ell}{d\theta}\right| d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{r\sin\theta}\sqrt{(-r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2}d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin\theta} d\theta$$

この式から距離が中心の位置や半径の大きさに関係なく円周上の点の角度の変化のみで決まる事がわかる。

2.2　一次分数変換と双曲距離

ここまでは一次分数変換は$\mathbb{C}$で考えてきたが、以下実数を成分とする一次分数変換

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{R})$$

で上半平面上の点 $x+iy \in H$ がどこに移るかを考える。

$$\begin{aligned}\varphi(x+iy) &= \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d} \\ &= \frac{(ax+iay+b)(cx-icy+d)}{c^2x^2+d^2} \\ &= \frac{acx^2+(ad+bc)x+bd+acy^2+iy(ad-bc)}{c^2x^2+d^2}\end{aligned}$$

虚部に注目すると、

$$\operatorname{Im}\varphi(x+iy) = \frac{y(ad-bc)}{c^2x^2+d^2}$$

$$\therefore \quad ad-bc \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi(x+iy) \in H$$

従って $ad-bc$ が正の実数ならば $\varphi(z) \in H$ となる。よって $\varphi(z)$ が H から H への写像となるための条件は以下の通り。

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc \geq 0) \qquad \cdots (2.1)$$

定理 2.1.　　(2.1)式で定義された一次分数変換 φ は H 上の等長変換である。φ は任意の２点 P , Q $\in H$ に対して、

$$\mathrm{d}(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \mathrm{d}(\varphi(\mathrm{P}),\varphi(\mathrm{Q}))$$

が成り立つ。

［証明］　まず $\varphi(z)$ の $z=x+iy$ におけるヤコビ行列を計算する。このとき $ad-bc=1$ としても一般性を失わない。$\varphi(z)=u+iv\quad (u,v\in\mathbb{R})$ とおいて、

$$(D\varphi)_z=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\quad(2.2)$$

である。コーシー・リーマンの関係式より

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立つので、(2.2)式は、

$$(D\varphi)_z=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}\\ &=\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\ \frac{a(c(x+iy)+d)-c(a(x+iy)+b)}{(c(x+iy)+d)^2}\\ &=\mathrm{Re}\ \frac{ad-bc}{(c(x+iy)+d)^2}=\mathrm{Re}\ \frac{1}{(cz+d)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}\\ &=\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\ \frac{a(c(x+iy)+d)-c(a(x+iy)+b)}{(c(x+iy)+d)^2}\\ &=\mathrm{Im}\ \frac{ad-bc}{(c(x+iy)+d)^2}=\mathrm{Im}\ \frac{1}{(cz+d)^2}\end{aligned}$$

ℓ の長さ $\mathrm{Leg}(\ell)$ と $\varphi(\ell)$ の長さ $\mathrm{Leg}(\varphi(\ell))$ が等しいことを以下示そう。そこで ℓ のパラメータ付けを $z(t) = x(t) + iy(t)$ とすると、$\varphi(\ell)$ のパラメータ表示は $u(t) + iv(t)$ で表される。ヤコビ行列を用いると、合成関数の微分公式は

$$(D\varphi)_z = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\dfrac{1}{(cz+d)^2} & -\mathrm{Im}\,\dfrac{1}{(cz+d)^2} \\ \mathrm{Im}\,\dfrac{1}{(cz+d)^2} & \mathrm{Re}\,\dfrac{1}{(cz+d)^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{pmatrix} = (D\varphi)_z \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

となる。従って、

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{du}{dt} & \dfrac{dv}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} & \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} {}^t(D\varphi)_{\mathrm{z}} (D\varphi)_{\mathrm{z}} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} \qquad \cdots (2.3)$$

であるが、ヤコビ行列の積は

$${}^t(D\varphi)_{\mathrm{z}} (D\varphi)_{\mathrm{z}} = \left(\left(\mathrm{Re}\,\frac{1}{|cz+d|^2}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\,\frac{1}{|cz+d|^2}\right)^2\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|cz+d|^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。ゆえに式(2.3)は

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{1}{|cz+d|^4} \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)$$

と計算できる。また $\varphi(z)$ の虚部 v は

$$v = \mathrm{Im}\,\frac{az+b}{cz+d} = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}y = \frac{y}{|cz+d|^2}$$

だから双曲平面における曲線の長さの定義式より

$$\begin{aligned}\mathrm{Leg}\left(\varphi(\ell)\right) &= \int_b^a \frac{1}{v}\left|\frac{d\varphi(\ell)}{dt}\right| dt \\ &= \int_b^a \frac{|cz+d|^2}{y}\sqrt{\frac{1}{|cz+d|^4}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)}\,dt \\ &= \int_b^a \frac{1}{y}\left|\frac{d\ell}{dt}\right| dt = \mathrm{Leg}(\ell)\end{aligned}$$

曲線の長さが φ によって保たれるから、もちろん距離も変わらない。従って φ は等長変換である。 ■

　また、次のような写像も H における等長変換である。

$$\varphi_0(z) = -\bar{z}$$

これは虚軸に関する鏡映で、一次分数変換ではない。H での等長変換はこの 2 つの写像とそれらの合成で表される。([1]　（深谷賢治）の定理 2.18（P.45）を参照)

3.　双曲正三角形とその対称性

3.1　　双曲正三角形を作る

　双曲三角形とは、双曲平面の直線（つまり実軸上の点を中心とする半円または虚軸と平行な直線）で囲まれた三角形のことである。その３辺の長さが全て等しい時、双曲正三角形と言う。

　以下双曲正三角形を構成することを試みる。最初のアプローチとして、虚軸上の点、 i を頂点の一つとした、虚軸に関して対称な正三角形を作ってみることにする。虚軸に関する鏡映は等長変換なので、２点 A, Bを

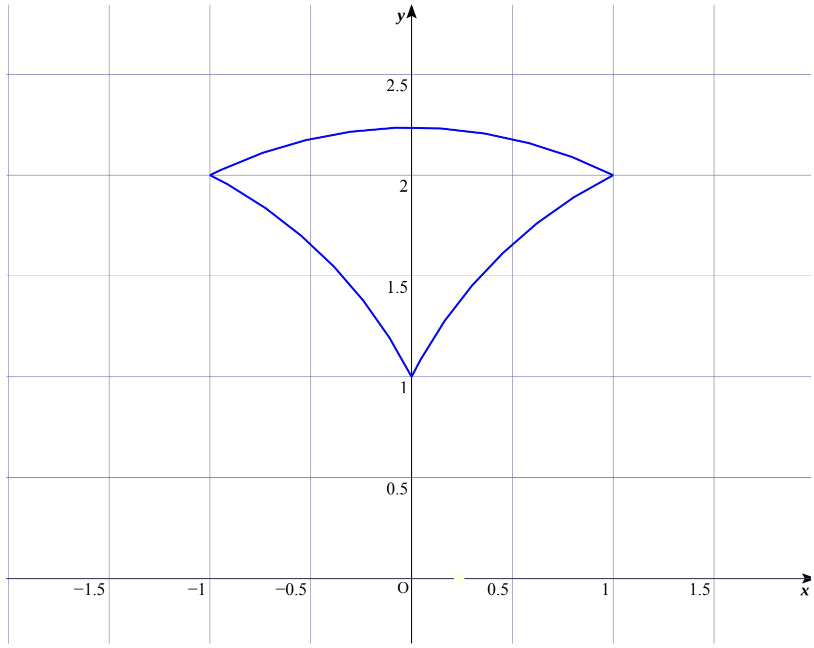
$$\begin{cases} A = x + iy & (x \neq 0) \\ B = -x + iy = \varphi_0(A) \end{cases}$$

とおくと、i からの距離はどちらも同じである。距離 d(A, B) と d(i , A) = d(i, B) が等しくなるように２点をとれば、i, A , B は双曲正三角形となる。もし一次分数変換 φ によって、

$$(*)\begin{cases} \varphi(i) = x + iy = A & \ldots ① \\ \varphi(A) = -x + iy = B & \ldots ② \\ \varphi(B) = i & \ldots ③ \end{cases}$$

となっていればi , A , B は正三角形の頂点となる。（図 3.1 参照）

図 3.1
頂点のひとつを i とし、
虚軸に関して対称な
双曲正三角形の例



そこで、$(*)$ を満たすような一次分数変換 φ を見つけよう。一次分数変換は H 上の等長変換なので、$\mathrm{d}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{d}(i\ ,\mathrm{A}) = \mathrm{d}(i\ ,\mathrm{B})$ となっている。このような φ を探す。まず

$$\varphi(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{(ai+b)(-ci+d)}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd+i(ad-bc)}{c^2+d^2} = x+iy$$

$$x \coloneqq \frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \ y \coloneqq \frac{ad-bc}{c^2+d^2} \qquad \ldots ④$$

となるから、①より

$$\varphi(A) = -x+iy = \varphi^2(i) = -\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{ad-bc}{c^2+d^2}$$

でなければならない。ここで、②の両辺に φ を施すと

$$\varphi(B) = \varphi\big(\varphi(A)\big) = \varphi^3(i)$$

だが③より $\varphi(B) = i$ だから $\varphi^3(i) = i$ となる。

$$\therefore \quad \varphi(A) = \varphi^2(i) = \varphi^{-1}(i)$$

がわかる。すると、

$$\varphi^{-1}(i) = \frac{di-b}{-ci+a} = \frac{-(ab+cd)+i(ad-bc)}{c^2+a^2}$$

$$= -x+iy$$

となるから、④と合わせて

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}=\frac{ab+cd}{c^2+a^2},\ \ y=\frac{ad-bc}{c^2+d^2}=\frac{ad-bc}{c^2+a^2}$$

を得る。これより

$$c^2+d^2=c^2+a^2,\ d^2=a^2,\ a=\pm d$$

がわかる。

次に $a=-d$ のときに矛盾が起こることを示す。このとき

$$x=\frac{-cd+bd}{c^2+d^2}=\frac{-bd+cd}{c^2+d^2}$$

となるので、分母を払って、

$$-cd+bd=-bd+cd,$$
$$2bd-2cd=2d(b-c)=0,$$
$$\therefore\quad d=0,\ \ b=c.$$
$$d=0\Rightarrow\varphi(z)=\ \frac{b}{cz}$$

これで i を写すと

$$\varphi(i)=\ \frac{b}{ci}=-\frac{bi}{c}=-\frac{bci}{c^2}$$

$ad-bc>0$ より、$-bc>0$ よって $\mathrm{Im}\,\varphi(i)>0$ となるが、これは i を虚軸上で動かす変換なので、正三角形が得られない。そのためこれ以外の条件を考える。

$$a=-d=\alpha\,,b=c=\beta とおくと$$

$$\varphi(i)=\ \frac{\alpha i+\beta}{\beta i-\alpha}=\frac{(\alpha i+\beta)(-\beta i-\alpha)}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$=\frac{\alpha\beta-\alpha\beta-i(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2}=-i<0$$

従って$a=d$である。ここで$\varphi^2(i)$を計算して係数を比較する。

$$\varphi^2(i)=\frac{(a^2+bc)i+ab+bd}{(ac+cd)i+bc+d^2}=\varphi(A)=\varphi^{-1}(i)$$

$\varphi^2(i)$の a をd に置きかえると、

$$\frac{(a^2+bc)i+ab+bd}{(ac+cd)i+bc+d^2}=\frac{(d^2+bc)i+2bd}{2cdi+bc+d^2}$$

また$\varphi^{-1}(i)$の a をd に置きかえると

$$\frac{di-b}{-ci+a}=\frac{di-b}{-ci+d}$$

この二つを比較する。

$$\frac{(d^2+bc)i+2bd}{2cdi+bc+d^2}=\frac{di-b}{-ci+d},$$

$$\big((d^2+bc)i+2bd\big)(-ci+d)=(2cdi+bc+d^2)(di-b),$$

$$c(d^2+bc)+2bd^2+i(d(d^2+bc)-2bcd)$$
$$=-2cd^2-b(bc+d^2)+i(d(bc+d^2)-2bcd)$$

虚部は等しいため実部を比較する。

$$c(d^2+bc)+2bd^2=-2cd^2-b(bc+d^2)$$

展開して移項すると、

$$cd^2+bc^2+2bd^2=-2cd^2-b^2c-bd^2,$$
$$cd^2+bc^2+2bd^2+2cd^2+b^2c+bd^2=0$$

括弧でくくると次のようになる。

$$3cd^2+bc^2+3bd^2+b^2c=(b+c)(3d^2+bc)=0$$
$$b=-c\,,bc=-3d^2$$

$b=-c$ のとき

$$\varphi(i)=\frac{di-c}{ci+d}=\frac{di-c}{ci+d}=\frac{(di-c)(-ci+d)}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{(c^2+d^2)i}{c^2+d^2}=i$$

なので不適。したがって $bc=-3d^2$ となるから、条件は

$$a=d\quad \text{かつ}\quad bc=-3d^2$$

である。

この条件を使えば i を頂点の一つとした正三角形の他の２頂点を求める式が求められる。一次分数変換の性質上 d は実数なら問題はないので、簡単のため $d=1$ として考える。

$$bc=-3d^2 \text{ より } b=-\frac{3}{c},$$

$$\varphi(i)=\frac{i-\frac{3}{c}}{ci+1}=\frac{c-\frac{3}{c}+i(3+1)}{c^2+1}=x+iy,$$

$$\frac{c-\frac{3}{c}}{c^2+1}=x\,,\quad \frac{4}{c^2+1}=y,$$

実部、虚部を比較するため、 $\frac{x}{y}$ を計算する。

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{c-\frac{3}{c}}{c^2+1}}{\frac{4}{c^2+1}}=\frac{c-\frac{3}{c}}{4},$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{\left(c-\frac{3}{c}\right)^2}{16}=\frac{c^2-6+\frac{9}{c^2}}{16}$$

両辺に$16c^2$をかけると

$$16\left(\frac{x}{y}\right)^2c^2=c^4-6c^2+9=(c^2-3)^2,$$

$\frac{4}{c^2+1}=y$より$c^2=\frac{4}{y}-1$ を代入すると、

$$16\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(\frac{4}{y}-1\right)=\left(\left(\frac{4}{y}-1\right)-3\right)^2=\frac{16}{y^2}-\frac{32}{y}+16,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(\frac{4}{y}-1\right)=\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}+1=\left(\frac{1}{y}-1\right)^2$$

両辺にy^2をかけると

$$x^2\left(\frac{4}{y}-1\right)=(y-1)^2,$$

$$x^2=\frac{y}{4-y}(y-1)^2 \qquad\cdots(3.1)$$

この式は下のような軌跡を描く。

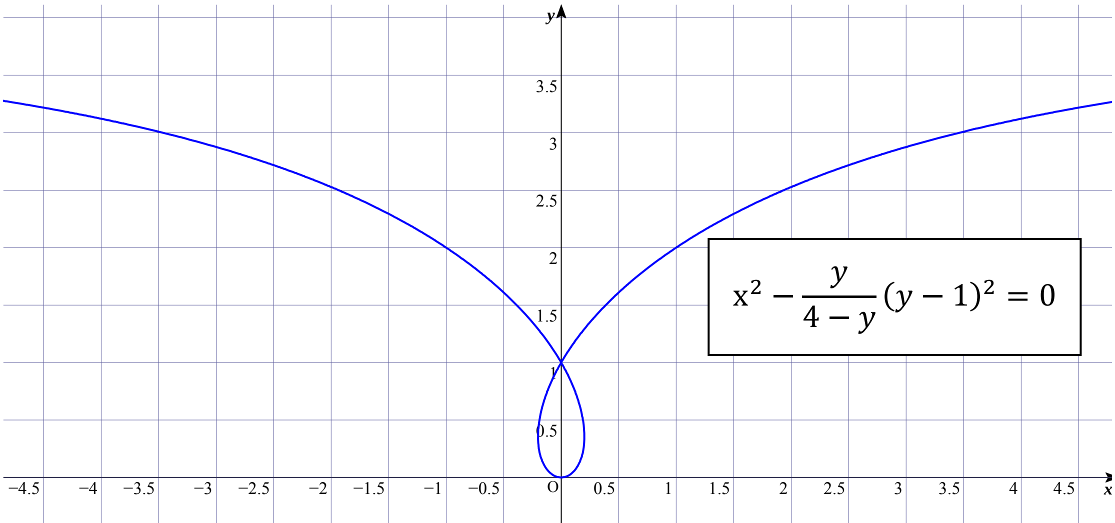


図 3.2
頂点を i とした双曲正三角形のほかの 2 頂点の位置のグラフ

また、この式は変数変換していくことで円になる。

$$x^2 - \frac{y}{4-y}(y-1)^2 = 0,$$
$$x^2(y-4) + y(y-1)^2 = 0$$

両辺を $(y-1)^2$ で割る。

$$y + \left(\frac{x}{y-1}\right)^2 (y-4) = 0$$

両辺$(y-4)$かける。

$$y(y-4) + \left(\frac{y-4}{y-1}x\right)^2 = 0$$

$$(y-2)^2 + \left(\frac{y-4}{y-1}x\right)^2 = 4$$

$u = y-2,\ v = \dfrac{y-4}{y-1}x$ とおくと、この式は

$$u^2 + v^2 = 4$$

となり、円の方程式であることがわかる。

$$u = 2\cos\theta, \qquad v = 2\sin\theta,$$

このように変数変換すれば、図（３．２）の曲線のパラメータ表示

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sin 2\theta + \sin\theta}{\cos\theta - 1} \\ y = 2(1+\cos\theta) \end{cases}$$

を得る。

3.2 回転対称性

双曲正三角形の回転対称性を考える。$SL_2(\mathbb{R}) \to F$の全射を利用し、

$$A^3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha E \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

となる行列Aを考えると、Aは対角化可能な行列となるので、

$$P^{-1}AP = B = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}} A$$

を考えれば、$B^3 = E$ となる。Bは実なので、その固有値は1 の原始三乗根 $e^{\frac{2}{3}\pi i} = 1, \omega, \overline{\omega}$ でなければならない。この変換は双曲正三角形の回転を表している。

ケーリー・ハミルトンの定理を用いてこの行列を求める。

定理 3.1 (ケーリー・ハミルトンの定理) ２次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して次の関係が成り立つ

$$A^2 - pA + qE = \mathbf{0} \qquad (p = a + d\,, q = ad - bc).$$

定理(3.1)を用いて $A^2 = pA - qE$ となるから、

$$\begin{aligned} A^3 &= A(pA - qE) = pA^2 - qA \\ &= p(pA - qE) - qA = (p^2 - q)A - pqE = \alpha E \end{aligned}$$

$$(p^2 - q)A - (\alpha + pq)E = \mathbf{0},$$

$$(p^2 - q)A = (\alpha + pq)E \Rightarrow A = \beta E \qquad (\text{恒等写像})$$

となるので、 $p^2-q=0$ かつ$\alpha+pq=0$ の場合を考える。まず $\alpha+pq$ を展開すると、

$$\alpha+pq=\alpha+(a+d)(ad-bc)=0 \qquad \cdots(3.3)$$

ここで$p^2-q=(a+d)^2-(ad-bc)=0$ より

$$ad-bc=(a+d)^2$$

これを(3.3)に代入すると、

$$\alpha+(a+d)(ad-bc)=(a+d)^3=0$$

$$\alpha=-(a+d)^3$$

となる。次に p^2-q を展開する。

$$\begin{aligned} p^2-q &= (a+d)^2-(ad-bc) \\ &= a^2+2ad+d^2-(ad-bc) \\ &= a^2+ad+d^2+bc=0 \\ &= \left(a+\frac{d}{2}\right)^2+\frac{3}{4}d^2+bc \end{aligned}$$

これを変形すると、

$$a+\frac{d}{2}=\pm i\sqrt{\frac{3}{4}d^2+bc,}$$

$$a=-\frac{d}{2}\pm i\sqrt{\frac{3}{4}d^2+bc,}$$

$$\frac{a}{d}=-\frac{1}{2}\pm i\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{bc}{d^2},}$$

$$a,d\in\mathbb{R}より、\frac{3}{4}+\frac{bc}{d^2}\leq 0$$

となり、これが一般的な双曲回転の条件となる。このとき、$d=1,\ b=c=0$ ならば、$\omega=e^{\frac{2}{3}\pi i}$ を 1 の原始三乗根とすると、 $a=\omega,\ d=\overline{\omega}$ または $a=\overline{\omega},\ d=\omega$ となり、 $A^3=E$ となる。

3.3 鏡映と対称群

虚軸に関する鏡映が等長変換である事はすでに述べたが、回転と鏡映を合成

することで別の鏡映を表す事ができるだろうか。

$$r(z) = \varphi(-\bar{z})$$

は鏡映と回転の合成で、これにより虚軸が別の直線に移るはずである。

虚軸に関して対称な正三角形を例にとって確かめる。(3.1)式より、以下のような 2 点と i は双曲正三角形を作る。

$$\begin{cases} A = 1 + 2i \\ B = -1 + 2i \end{cases}$$

これらの点を次のように移す $r(z)$ は双曲鏡映を表す。

$$\begin{cases} r(i) = \varphi(i) = B \\ r(B) = \varphi(A) = i \\ r(A) = \varphi(B) = A \end{cases}$$

$$r(A) = \varphi(-1 + 2i) = \frac{a(-1 + 2i) + b}{c(-1 + 2i) + d} = 1 + 2i$$

分母を払って展開すると

$$\begin{aligned} a(-1 + 2i) + b &= (1 + 2i)(c(-1 + 2i) + d), \\ 2ai - a + b &= c(1 + 2i)(-1 + 2i) + d(1 + 2i) \\ &= 2di - 5c + d \end{aligned}$$

虚部を比較する。

$$d = a \qquad (3.4)$$

実部を比較する。

$$-a + b = -5c + a \qquad (3.5)$$

つぎに、$r(B)$ を計算する。

$$r(B) = \varphi(1 + 2i) = \frac{a(1 + 2i) + b}{c(1 + 2i) + d} = i$$

$$a(1 + 2i) + b = i(c(1 + 2i) + d)$$

上と同様に展開すると

$$\begin{aligned} 2ai + a + b &= i(2ci + c + d) \\ &= -2c + i(c + d) \end{aligned}$$

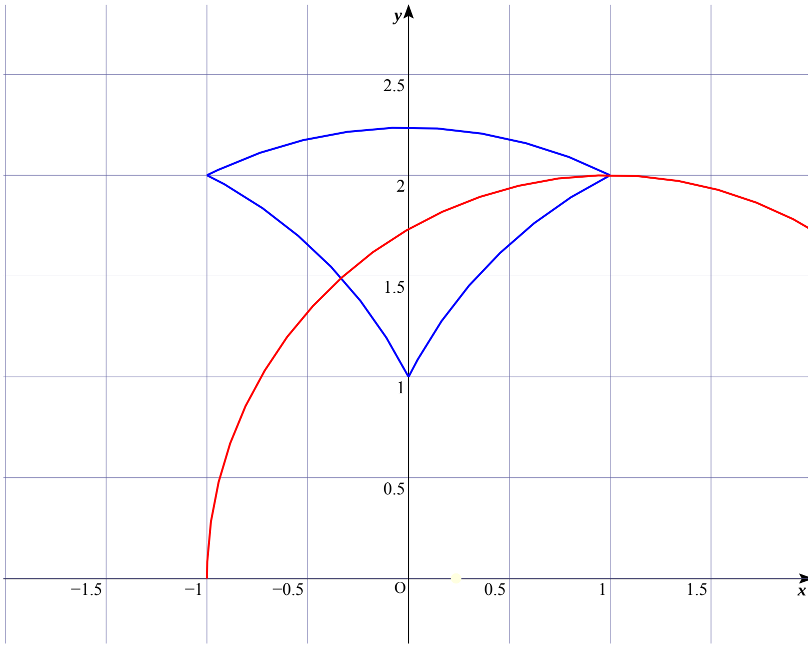
虚部を比較すると、(3.4)より

$$2a = c + d = c + a$$
$$c = a \qquad (3.6)$$
また(3.5), (3.6)より
$$-a + b = -5a + a = -4a,$$
$$b = -3a,$$
$$\therefore \qquad r(z) = \frac{-\bar{z} - 3}{-\bar{z} + 1}.$$
この r で虚軸がどこに移ったか確かめるには、r によって変わらない複素平面上の点 $x + iy$ の方程式を求めればよい。

$$r(x + iy) = \varphi(-x + iy) = \frac{(-x + iy) - 3}{(-x + iy) + 1} = x + iy$$
となる点をさがそう。分母を払って展開すると
$$-x - 3 + iy = (x + iy)\big((-x + iy) + 1\big)$$
$$= -(x^2 + y^2) + x + iy$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$(x - 1)^2 + y^2 = 4$$

この式から虚軸は中心１、半径２の半円に移ったことがわかる。

図 3.7
双曲正三角形の
虚軸以外の対称
軸



上の図の赤い半円が回転で写った虚軸。

i とB の中点が、写った虚軸上にある事を確認しよう。まず２点を通る半円の中心 c と半径 r を求める。

$$(c+1)^2+4=c^2+1=r^2$$
$$c=-2$$
$$r^2=4+1,\ \ r=\sqrt{5}$$

次に２点を極表示で表すと

$$i=\sqrt{5}\cos\theta_1-2+\sqrt{5}i\sin\theta_1$$

$$B=\sqrt{5}\cos\theta_2-2+\sqrt{5}i\sin\theta_2$$

$$\cos\theta_1=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \ \sin\theta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\cos\theta_2=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \ \sin\theta_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

ここで、中点Ｎ はi,Bと同じ半円上にあるので

$$N=\sqrt{5}\cos\psi-2+\sqrt{5}i\sin\psi$$

と置いて、$d(i,N)=d(N,B)$となるように決める。

$$d(i,N)=\int_{\theta_1}^{\psi}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\left[\log\ \tan\frac{\theta}{2}\right]_{\theta_1}^{\psi}$$

$$=\log\ \tan\frac{\psi}{2}-\log\ \tan\frac{\theta_1}{2}$$

$$=\log\sqrt{\frac{1-\cos\psi}{1+\cos\psi}}-\log\sqrt{\frac{1-\cos\theta_1}{1+\cos\theta_1}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos\psi}{1+\cos\psi}\cdot\frac{1+\cos\theta_1}{1-\cos\theta_1}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos\psi}{1+\cos\psi}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$$

同様に

$$d(N,B)=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{1+\cos\psi}{1-\cos\psi}$$

となる。対数の中身を比較して、

$$\frac{1-\cos\psi}{1+\cos\psi}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{1+\cos\psi}{1-\cos\psi},$$

$$\left(\frac{1-\cos\psi}{1+\cos\psi}\right)^2=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{7+3\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}$$

分母を払うと、

$$(1-\cos\psi)^2\left(7-3\sqrt{5}\right)=(1+\cos\psi)^2\left(7+3\sqrt{5}\right),$$

$$6\sqrt{5}\cos^2\psi-28\cos\psi+6\sqrt{5}=0,$$

$$\cos\psi=\frac{3}{\sqrt{5}},\ \ \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos\psi\leq 1 \text{ より } \cos\psi=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin\psi=\frac{2}{3}$$

よって N の座標は次のようになる。

$$\begin{aligned}N&=\sqrt{5}\cos\psi-2+\sqrt{5}i\sin\psi\\&=\frac{5}{3}-2+i\frac{2}{3}\sqrt{5}\end{aligned}$$

この座標を写った虚軸の方程式に代入すると、

$$\left(\frac{5}{3}-2-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)^2=\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{20}{9}=4$$

が成り立つので、N は写った虚軸上にあることが解る。これにより、特殊な正三角形での対称性は群をなし、それが三次の二面体群 D_3 と同型である事が確認できた。

3.4　一般の双曲正三角形の対称群

頂点を虚軸上に持ち、虚軸に関して対称な正三角形で対称群の確認を行った。任意の双曲正三角形をこの形に変換することができれば、双曲平面のすべての正三角形の対称性は D_3 と同型であると言える。これを説明しよう。

双曲正三角形を構成する３点 A, B, C を次のように写す変換を考える。

$$\begin{cases} \varphi(A) = x + iy \\ \varphi(B) = -x + iy = \varphi_0(A) \\ \varphi(C) = i \end{cases}$$

このような φ が存在すれば、すべての双曲正三角形を頂点の一つが i, 虚軸に関して対称な形に持っていくことができる。まず点 C を i に写す写像 ψ を考える。

$$\psi(C) = \frac{aC + b}{cC + d} = i$$

分母を払って展開すると、

$$aC + b = i(cC + d)$$
$$(a + ic)C + b - id = 0$$

ここで、$a = 1,\ c = 0$ とおくと、

$$C = -b + id$$

となり、$b,\ d$ が決定する。次に、点 i を動かさず、A と B を虚軸に関して対称な位置に写す写像を決める。

A と B の中点を ω とする(これは１の原始三乗根とは別のものである)。ω を上半平面上の任意の点として、これを虚軸に写す変換が存在すれば、すべての双曲正三角形は i を頂点とした虚軸に関して対称な形にできることになる。回転行列を

$$u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおき、この行列から作った一次分数変換 φ_{u_θ} を考える。まず i を写すと、

$$\varphi_{u_\theta}(i) = \frac{i\cos\theta - \sin\theta}{i\sin\theta + \cos\theta} = \frac{i(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = i$$

となるので、 φ_{u_θ} は i を固定する変換である。次に０を写す。

$$\varphi_{u_\theta}(0) = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

これは虚軸が φ_{u_θ} によって i と $-\tan\theta$ を通る半円に写った事を意味する。この半円の中心と半径を求めよう。まず中心 c の座標を求める。

$$c^2 + 1 = (c + \tan\theta)^2 = c^2 + 2c\tan\theta + \tan^2\theta$$
$$\tan^2\theta + 2c\tan\theta - 1 = 0$$
$$c = \frac{1 - \tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\tan 2\theta} = \cot 2\theta$$

c の座標から半径 r を計算すると、

$$r^2 = c^2 + 1 = \cot^2 2\theta + 1$$
$$= \frac{1 + \tan^2 2\theta}{\tan^2 2\theta} = \frac{1}{\cos^2 2\theta\left(\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\right)^2} = \frac{1}{\sin^2 2\theta}$$
$$r = \frac{1}{|\sin 2\theta|}$$

となる。 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $-\tan\theta$ はすべての実数上を動くので、写した虚軸、つまり、i と$-\tan\theta$ を通る半円は θ が動くと上半平面上の全ての点を掃く。従って φ_{u_θ} の逆写像 $\varphi_{u_\theta}^{-1}$ で H 上の任意の複素数を虚軸上に写すことが可能である。二つの一次分数変換の合成 $\varphi_{u_\theta}^{-1} \circ \psi$ を φとすることで任意の双曲正三角形を虚軸対称の形にすることができるため、前章で確認した対称性がすべての正三角形に適用できることになる。従って、一般の双曲正三角形の対称群は二面体群 D_3 と同型であることがわかった。

まとめ

本研究では、双曲平面の正三角形の対称性を確認することが目標であった。準備段階として一次分数変換、上半平面について勉強した。双曲正三角形を作る過程においては双曲回転を利用し、どのような写像が回転になるかを確認した。また回転と鏡映の合成で新たな鏡映を作り、結果として通常の対称群と合

同である事を確認した。
解決できなかった問題として、双曲回転の対角化の問題がある。うまくいけば対角化した行列の成分が全てω, $\bar{\omega}$ となるはずだが、そこまで詰められなかった。
また今回はほかの双曲正多角形の作図、対称性の確認まで手が回らなかったが、双曲正三角形の対称群の同型を用いることで、双曲平面におけるほかの正多角形についても通常の二面体群と同型であるという結果が得られそうである。
今回研究した事は双曲幾何学においてはほんの入口にしか過ぎないが、通常のユークリッド幾何学でもそうであるように、この研究結果が基本の一部となり、より複雑な段階の双曲幾何学においても役に立つ事があるだろう。
興味本位で選んだテーマだったが、最初のうちは今まで触れてこなかったリーマン球面なる集合の存在や新しい長さの定義に苦労させられた。実際は学んできた事を応用すればなんとかなる部分も多く、また双曲平面で正三角形を作る試行錯誤は辛いながらも楽しかった。
より双曲幾何を学ぼうとする人が、さらに深い研究成果を上げるにあたってこの研究の結果を役立ててくれる事があれば、著者として嬉しい限りである。

参考文献

[1] 深谷賢治,「双曲幾何」岩波書店,2004 年 9 月 7 日発行
[2] M.A.アームストロング：著(佐藤信哉：訳),「対称性からの群論入門」シュプリンガージャパン株式会社,2007 年 11 月 9 日発行
[3] 難波誠,「微分積分学」裳華房,1996 年 12 月 5 日発行
[4] 谷口雅彦・奥村善英,「双曲幾何への招待」培風館,1996 年 9 月 30 日発行