

絡み目の不変量と ジョーンズ多項式

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科
西山研究室

1 5 1 0 8 0 5 6 永島 真

目次

- 1 結び目とリンク
- 2 絡み目の同値とライデマイスター移動
- 3 カウフマンのステート模型
- 4 絡み目の不変量とジョーンズ多項式
- 5 ジョーンズ多項式の性質
- 6 樹下・寺阪の結び目のジョーンズ多項式
- 7 まとめと将来の展望

まえがき

私がこの研究をやろうと思ったのは、数学での知識を何か身近なものに使えないかと考えたからである。誰もが一度は見たことのある「ひも」を使い、それらがほどけたり、絡み合ったりする現象を数学的に考えよう。

1本の「ひも」の両端を空間内で閉じて出来たものを「結び目」とよぶことにする。見た目は異なるが、ひねったり、絡ませたりしても同じものと思えるものを同値とよぶ。しかし一見しても同値かどうかは分からない。同値な結び目では同じ値になるもの=不変量を導入する。ジョーンズ多項式はそのような不変量の1つであり、他にも彩色数と呼ばれるものがある。ジョーンズ多項式を計算すると結び目がほどけないかどうかわかる。

私はジョーンズ多項式を使い、参考にさせていただいた、河野俊丈さんの「新版 組みひもの数理」には載っていない、最小交点数8の結び目のジョーンズ多項式や、「樹下・寺阪の結び目」という、とても複雑に見える結び目のジョーンズ多項式を求めた。計算がとても複雑で、何度もやり直したが、求められた時はとても嬉しく感じた。2つの結び目の一部分を切り、くっつけたものを結び目の合成という。ジョーンズ多項式を計算する際に、合成の結び目の便利なジョーンズ多項式の求め方を導いた。

「樹下・寺阪の結び目」のジョーンズ多項式は求まり、彩色数では結び目はほどけるかどうか分からないが、ジョーンズ多項式を使うとほどけないということがわかる。

これらを求める際、河野俊丈さんの「新版 組みひもの数理」はとても役に立ったので感謝しています。

1 結び目とリンク

図1は2つの**結び目**の例である。まえがきでも少し触れたが、ここでは、結び目というときは図1のように、空間内の円周と同相な閉曲線を考えることにする。平面では交差の上下がわかるように切れ目を入れて、自分自身とは交わらない。それを図1のように表す。これを、結び目の**射影図**と呼ぶ。

図は参考文献「新版 組みひもの数理」(河野 俊丈 著)より引用



図 1

このような射影図のいくつかの例が図 2 にあげてある。

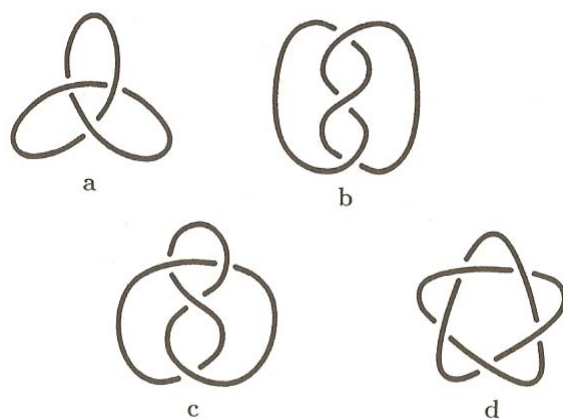


図 2

図 2.a の結び目は、**三葉結び目**とよばれている。図 2.b は、見かけは三葉結び目とは異なるが、図 3 のように空間内でひもをひねったり、動かすなどして、三葉結び目の図から変形することができる。

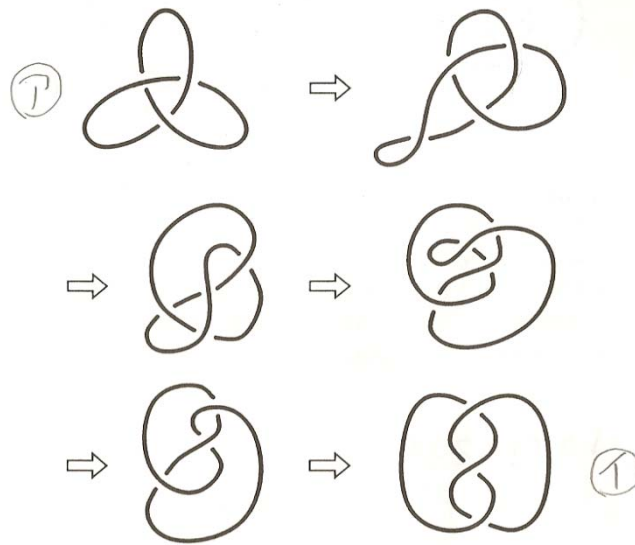


図 3

図 3 のように、アの図形の結び目から、空間内の中で、ひもをひねったり、自分自身と交わらないようにして、動かすなどして、変形できたイの結び目は見た目は異なるが同じ結び目であると思われる。そこで、図 2.a と図 2.b の結び目は同値な結び目であると呼ぶことにする。

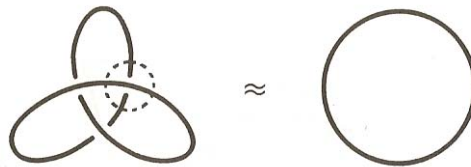


図 4.1

図 4.2

図 4.1 のように、三葉結び目の交わっている点線の部分の上下を 1 か所変えた図を考えると、これは空間内で変形させると図 4.2 の円と同じとみなせる。このように、図 4.2 の円と同値になる結び目は、**自明な結び目**とよばれる。

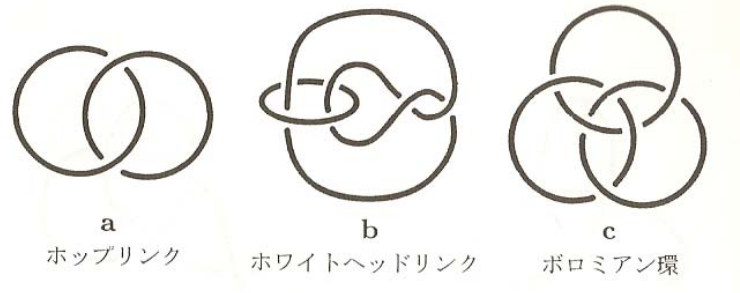


図 5

いくつかの結び目が互いに交わることなく絡み合っているものを、**絡み目(リンク)**とよぶ。図 5 はいくつかの絡み目の例である。

絡み目についても、結び目と同様に、空間内で変形してうつりあう絡み目は、同値という。絡み目でも同様の射影図を用いる。例えば図 5 のようなものである。

2 絡み目(リンク)の同値とライデマイスター移動

空間内で絡み目の一部をねじったりする変形を、平面上で表した動きのことを**ライデマイスター移動**とよぶ。図 8 はライデマイスター移動の 3 つのパターンである。これは空間内でのひもの動きをイメージしてもらえばいいだろう。

この図では絡み目の一部分だけを取り出して図示しているが、このように、ライデマイスター移動は、絡み目の一部のみについておこなわれる局所的な変形である。

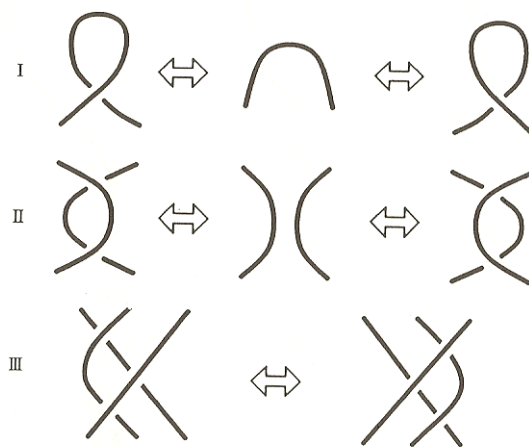


図 6

定理 2つの絡み目 L_1 と L_2 が同値であれば、その射影図 D_1 と D_2 はライデマイスター移動でうつりあう。逆にライデマイスター移動で移りあえば L_1 と L_2 は同値である。

(※証明は、[1]「結び目理論とその応用」(村杉 邦男) 定理 4.1.1 参照)

図 3 では、空間内で、曲線をひねったり、動かすなどして、変形した結び目を考えた。これは平面上で、射影図を繰り返しライデマイスター移動することによって変形できる。

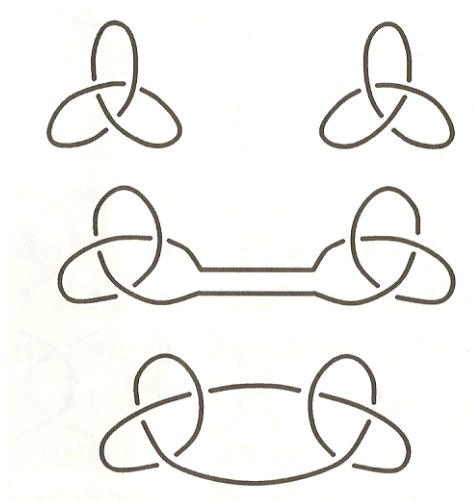


図 7

2つの絡み目から、新しい絡み目を「**合成**」という操作で作ることができる。図 7 は三葉結び目の例だが、2つの結び目をその一部分を切断して再びつなぎあわせることにより、新しい結び目を作るのである。このような操作を絡み目の**合成**とよぶ。

合成の逆の操作が、結び目の**分解**である。もうそれ以上分解できないような結び目を**素な結び目**と呼ぶ。結び目の射影図のうち、交点の個数が最も少なくなるものを考え、その交点の数を**最小交点数**とよぶ。

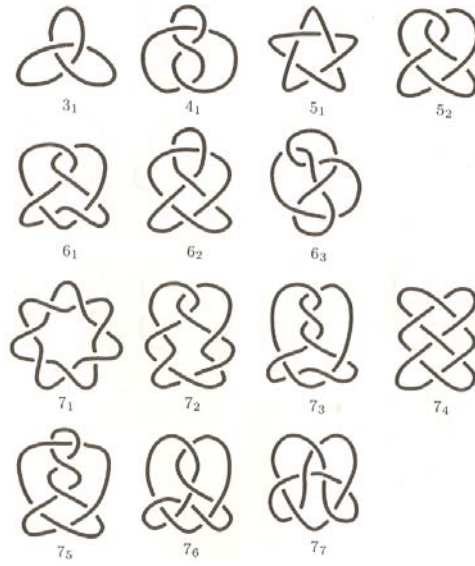


図 8

図 8 は最小交点数が 7 までの素な結び目の図である。後で、これらの結び目のジョーンズ多項式を紹介する。

3 カウフマンのステート模型

カウフマンのステート模型について説明する。絡み目の射影図の交点において、図 9 のように、 A, B の記号をつける。

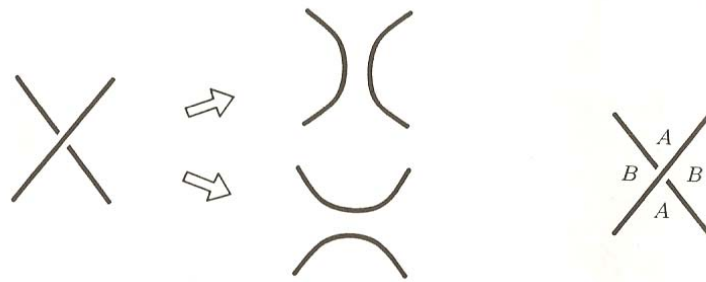


図 9

ひものつなぎ替えには、図 9 の 2 通りのパターンが考えられる。1 つの交点に対して、 A マーカーで切るとは図 10.1、 B マーカーで切るとは図 10.2 のように、絡み目を組み替えることである。結び目から出発しても組み替えたものは、絡み目になることもある。

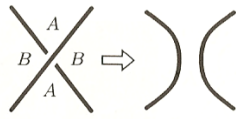


図 10.1

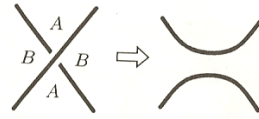


図 10.2

これを各交点に対して交点が無くなるまで繰り返す。このようにして得られた絡み目は、自明な結び目の m 個の和になる。このような図形を状態と呼ぶ。ここで m は切り方に依存する。

交点が n 個あったとして、 k 個の交点で A マーカーで切り、 l 個の交点で B マーカーで切って、自明な結び目 m 個の和であるような状態を得るとき、この状態に項

$$A^k B^l d^m \quad (k + l = n)$$

を対応させる。各状態に対応する項の総和を D の統計和と呼び、

$$\langle D \rangle = \sum_{\text{状態}} A^k B^l d^m$$

と書く。このとき A, B, d は操作とか、自明な結び目の数とかという意味を離れて、単なる変数（文字）とみなしている。

図 11 は三葉結び目の実際の記号のつけ方と、状態の例である。

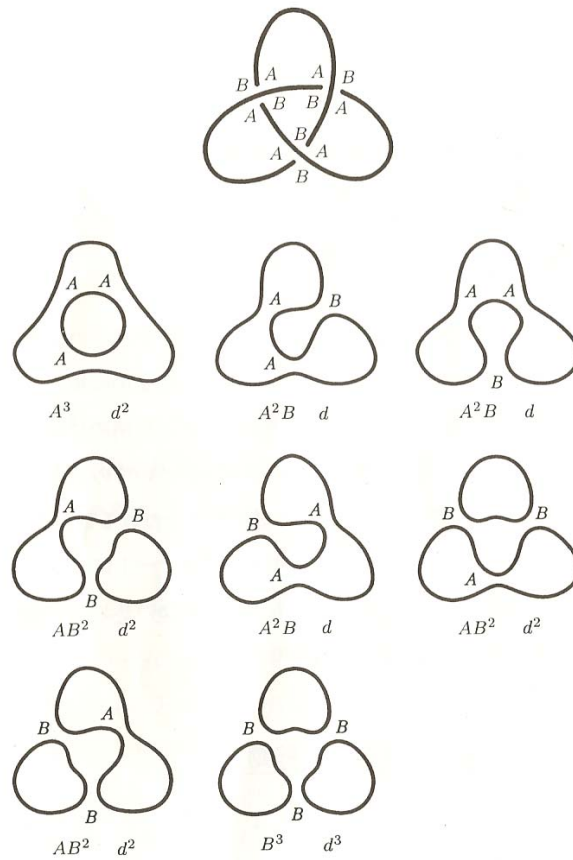


図 11

三葉結び目の場合には、全部で8通りの状態が生じる。従って三葉結び目の統計和は

$$\langle D \rangle = A^3 d^2 + A^2 B d + A^2 B d + AB^2 d^2 + A^2 B d + AB^2 d^2 + AB^2 d^2 + B^3 d^3$$

となる。

統計和は残念ながらライデマイスター移動によって不変ではない。そこでライデマイスター移動でも不変になる値を導きたい。まずはライデマイスター移動Ⅱで不変となる値を導くことを考えよう。図 12 のような結び目 L_1, L_2 を考えると、これらはライデマイスター移動Ⅱで移りあっている。

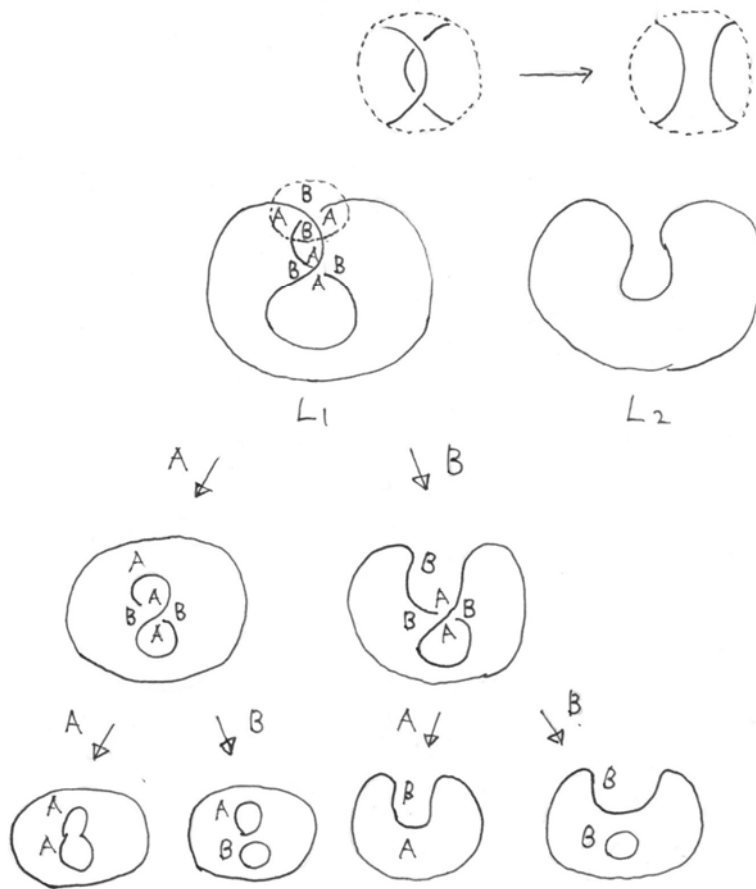


図 12

このとき L_1 の統計和は

$$\begin{aligned} \langle L_1 \rangle &= A^2 d^2 + ABd^3 + ABd + B^2 d^2 \\ &= ABd^3 + (A^2 + B^2)d^2 + ABd \end{aligned}$$

であり、 L_2 の統計和は

$$\langle L_2 \rangle = d$$

である。従って $\langle L_1 \rangle = \langle L_2 \rangle$ となるためには

$$\begin{aligned} \langle L_1 \rangle - \langle L_2 \rangle &= d\{ABd^2 + (A^2 + B^2)d + AB - 1\} \\ &= -Bd\{ABd(d^2 - 1) + (A^2 + B^2)(d^2 - 1)\} \\ &= -Bd(d^2 - 1)\{ABd + A^2 + B^2\} \end{aligned}$$

が0 になっている必要がある。

これが0 となるためには、 $-Bd = 0$ となるか、 $(d^2 - 1) = 0$ となるか、 $ABd + A^2 + B^2 = 0$ となれば良い。しかし、 $-Bd = 0$ となると B 又は d が0 になってしまうので、望ましくない。 $(d^2 - 1) = 0$ となってしまうと、 $d = \pm 1$ となってしまうので、これも特殊な値であるから望ましくない。そこで $ABd + A^2 + B^2 = 0$ を条件として仮定しよう。そうすれ

ば、ライデマイスター移動Ⅱで不変となることがわかる。 L_1, L_2 は特殊な絡み目だが、一般の絡み目に対してもこの条件を満たせば、ライデマイスター移動Ⅱで不変になることが分かる。

次にライデマイスター移動Ⅲで不変量となる条件を見ていく。

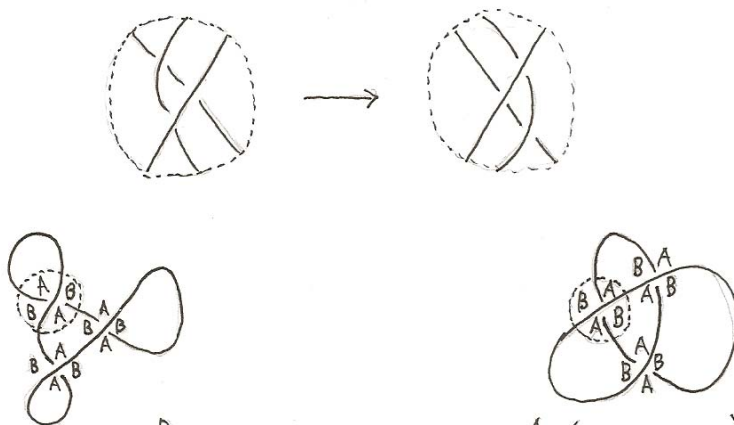


図 13

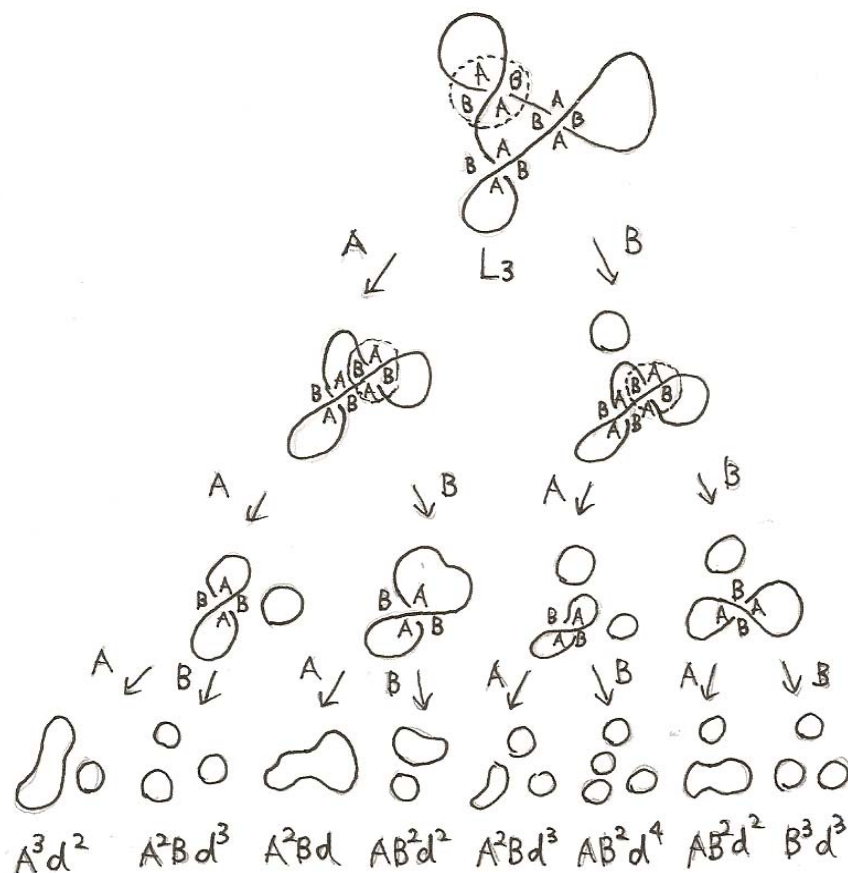


図 14

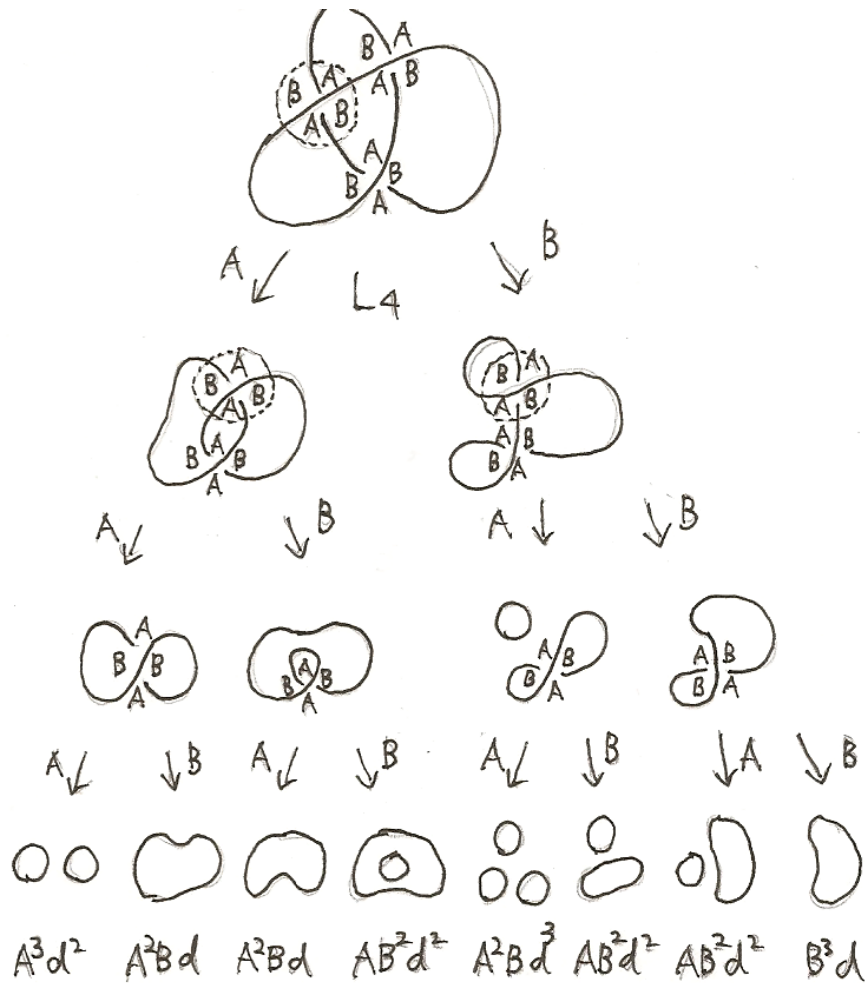


図 15

上のような結び目 L_3, L_4 を考えると、統計和は

$$\langle L_3 \rangle = A^3d^2 + A^2Bd^3 + A^2Bd + AB^2d^2 + A^2Bd^3 + AB^2d^4 + AB^2d^2 + B^3d^3$$

$$\langle L_4 \rangle = A^3d^2 + A^2Bd + A^2Bd + AB^2d^2 + A^2Bd^3 + AB^2d^2 + AB^2d^2 + B^3d$$

となる。(図 14, 図 15 を参照)

ここで、

$$\begin{aligned} \langle L_3 \rangle - \langle L_4 \rangle &= AB^2 + (A^2B + B^3)d - \{AB^2d^4 + (A^2B + B^3)d^3\} \\ &= -AB^2d^4 - (A^2 + B^2)Bd^3 + AB^2d^2 + (A^2 + B^2)Bd \\ &= -Bd\{ABd^3 + (A^2 + B^2)d^2 - ABd - (A^2 + B^2)\} \end{aligned}$$

である。さらに条件 $ABd + A^2 + B^2 = 0$ を使うと、 $A^2 + B^2 = -ABd$ であるから、

$$\begin{aligned} \langle L_1 \rangle - \langle L_2 \rangle &= d(ABd^2 - ABd^2 + AB - 1) \\ &= d(AB - 1) = 0 \end{aligned}$$

よって、 $AB = 1$ を条件として課せばよい。

ライデマイスター移動 I についても見ていく。

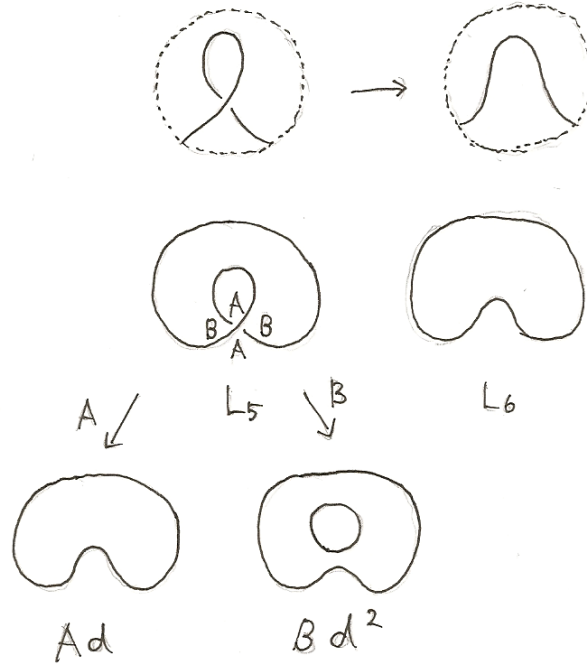


図 16

上の図のような結び目 L_5, L_6 を考えると、その統計和は

$$\langle L_5 \rangle = Ad + Bd^2$$

$$\langle L_6 \rangle = d$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \langle L_5 \rangle - \langle L_6 \rangle &= Ad + Bd^2 - d \\ &= d(A + Bd - 1) \end{aligned}$$

であるが、 $ABd + A^2 + B^2 = 0$, $AB = 1$ を変形し、

$$B = A^{-1}, \quad d = -A^2 - A^{-2} \text{ を代入すると、}$$

$$\begin{aligned} d\{A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) - 1\} \\ = d(-A^{-3} - 1) = 0 \end{aligned}$$

よって、 $-A^{-3} = 1$ となればよいが、これでは A の値が特殊になってしまって不都合である。そこで、 $\langle L_5 \rangle$ の代わりに $(-A^3) \times \langle L_5 \rangle$ を考えれば良いのだが、それには交点数という概念が必要になる。章を改めてそれを説明しよう。

4 絡み目の不変量とジョーンズ多項式

向きのついた絡み目について、すべてのライデマイスター移動で変わらない絡み目の不変量を求めていく。射影図の交点において、重なり方の違いで分けると、図 17 の2パターンに分けることが出来る。左側の方を正の交差点、右側の方を負の交差点と呼ぶ。

$$\omega(D) : \#(\text{正の交差点}) - \#(\text{負の交差点})$$

で求めることが出来る。



図 17

先ほど求めた式を使い、 $\omega(D)$ を求めて、

$$(-A^3)^{-\omega(D)} \langle D \rangle \tag{1.1}$$

と修正したものを考える。前章の例の結び目 $\langle L_5 \rangle$ では $\omega(L_5) = -1$ だから、 $(-A^3)^{-\omega(L_5)} \langle L_5 \rangle = (-A^3) \langle L_5 \rangle$ となり、その結果この式はすべてのライデマイスター移動で不変なものとなる。ちょうどライデマイスター移動 II で不変になることがわかるだろう。 $\omega(D)$ は、ライデマイスター移動 II, III では変化しないし、また、ライデマイスター移動 I では、 $\omega(D), \langle D \rangle$ は変化するが、上の式ではそれがちょうど打ち消されることになる。したがって、(1.1)式は向きのついた絡み目の不変量である。

式(1.1)を、 $d = -A^2 - A^{-2}$ で割って、

$$V_L = \frac{1}{d} (-A^3)^{-\omega(D)} \langle D \rangle$$

とおく。これが、向きのついたリンク L のジョーンズ多項式である。自明な結び目については、ジョーンズ多項式の値が1になる。

$$\langle \times \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \cup \rangle$$

$$\langle \times \rangle = A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle + A \langle \cup \rangle$$

を用いて

$$A \langle \times \rangle - A^{-1} \langle \times \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \rangle \langle \rangle \quad (1.2)$$

が得られる。次に、向きのついた絡み目について、 $\omega(D)$ による修正を考慮して、式(1.2)をジョーンズ多項式についての関係式に書き直すと

$$-A^4 V_{L_+} + A^{-4} V_{L_-} = (A^2 - A^{-2}) V_{L_0}$$

が得られる。ここで、 L_+, L_-, L_0 は、射影図の一部を、他の部分は変えないで図 18 のように変化させて得られる 3 つの絡み目を表す。ジョーンズ多項式では変数 A, B, d が使われているが、関係式により文字 A だけを用いた式に書き直すことができる。

さらに $\sqrt{t} = A^{-2}$ と置き換えて、ジョーンズ多項式を t の関数とみなす。絡み目の交点の一つに注目して、次の 3 つの絡み目を考える。

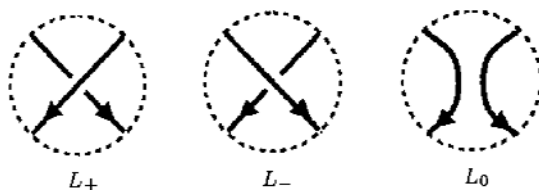


図 18

このような絡み目 L_+, L_-, L_0 と、ジョーンズ多項式の間には関係式

$$\frac{1}{t} V_{L_+} - t V_{L_-} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{L_0}$$

が成り立つことが知られている。

の形に整理される。これを、ジョーンズ多項式のスケイン関係式という。

以下、スケイン関係式の計算例を紹介する。

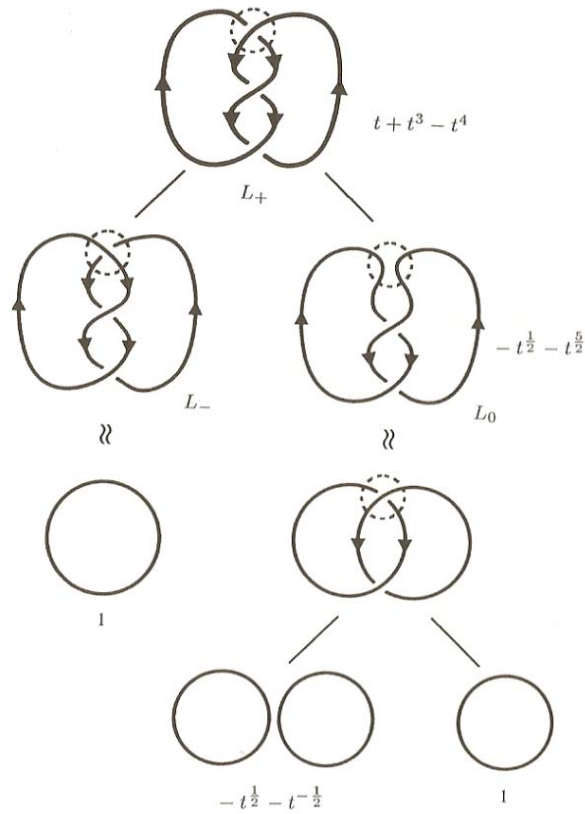


図 19

はじめに、丸で囲んだ1つの交差点に着目して、このダイアグラムを L_+ と考えると、 L_- は自明な結び目、 L_0 はポップリンクとなる。以下、このような操作をくりかえしていくと、最終的には、いくつかの自明な結び目の射影図が得られる。結果は

$$V_{L_+} = t + t^3 - t^4$$

と求められる。

5 ジョーンズ多項式の性質

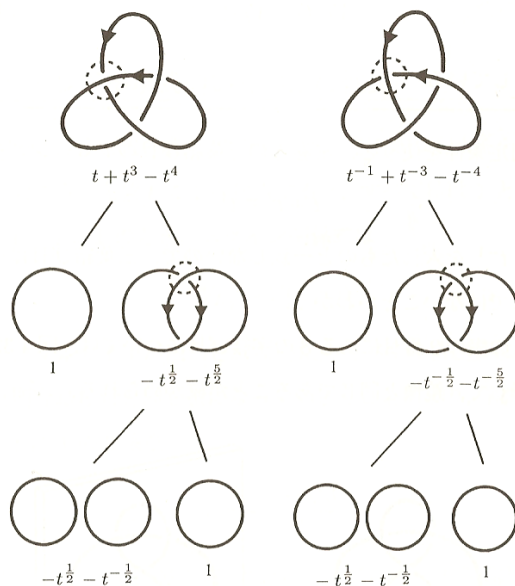


図 20

上の計算を見てほしい。一般にリンク L と鏡像 \bar{L} を考えると、計算の結果として

$$V_{\bar{L}}(t) = V_L(t^{-1})$$

が成り立つ。

これより絡み目とその鏡像が同じならば、ジョーンズ多項式は

$$V_L(t) = V_L(t^{-1})$$

を満たしている。

5.1 合成絡み目のジョーンズ多項式の性質

絡み目の合成とは2つの結び目をつなぎあわせることにより、新しい結び目を作ることである。

和のジョーンズ多項式の便利な計算方法を示す。

図 k_1, \bar{k}_2 があるとする。

$$\begin{aligned} L_0 &= k_1 \cup \bar{k}_2 \\ L_+ &= L_- = k_1 \# \bar{k}_2 \end{aligned}$$

で表すことが出来る。

$$V_{L_+} = V_{L_-}$$

スケイン関係式より

$$\frac{1}{t}V_{L_+} - tV_{L_+} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{L_0}$$

$$\left(\frac{1}{t} - t\right)V_{L_+} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{L_0}$$

$$V_{L_+} = \frac{\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{\left(\frac{1}{t} - t\right)}V_{L_0}$$

よって

$$V_{K_1 \# K_2} = dV_{K_1 \cup K_2}$$

が成り立つ。

さらに証明は省くが、

$$V_{K_1 \# K_2} = V_{K_1} \times V_{K_2}$$

が成り立つ。

t に 1 の 3 乗根

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

を代入するとすべての結び目に対して、ジョーンズ多項式の値は 1 となる。これはスケイン関係式を使い計算していくときに、交点の数が多いほど複雑な計算になるので、計算ミスを防ぐためにも、この ω の式を代入することで確かめながら計算していくといいだろう。

ここで参考として、最小交点数 7 までのジョーンズ多項式を紹介する。

参考文献「新版 組みひもの数理」(河野 俊丈 著)より引用

$$V_{3_1} = t(1 + t^2 - t^3)$$

$$V_{4_1} = t^{-2}(1 - t + t^2 - t^3 + t^4)$$

$$V_{5_1} = t^2(1 + t^2 - t^3 + t^4 - t^5)$$

$$V_{5_2} = t(1 - t + 2t^2 - t^3 + t^4 - t^5)$$

$$V_{6_1} = t^{-2}(1 - t + 2t^2 - 2t^3 + t^4 - t^5 + t^6)$$

$$V_{6_2} = t^{-1}(1 - t + 2t^2 - 2t^3 + 2t^4 - 2t^5 + t^6)$$

$$V_{6_3} = t^{-3}(-1 + 2t - 2t^2 + 3t^3 - 2t^4 + 2t^5 - t^6)$$

$$V_{7_1} = t^3(1 + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 - t^7)$$

$$\begin{aligned}
V_{7_2} &= t(1 - t + 2t^2 - 2t^3 + 2t^4 - t^5 + t^6 - t^7) \\
V_{7_3} &= t^2(1 - t + 2t^2 - 2t^3 + 3t^4 - 2t^5 + t^6 - t^7) \\
V_{7_4} &= t(1 - 2t + 3t^2 - 2t^3 + 3t^4 - 2t^5 + t^6 - t^7) \\
V_{7_5} &= t^2(1 - t + 3t^2 - 3t^3 + 3t^4 - 3t^5 + 2t^6 - t^7) \\
V_{7_6} &= t^{-1}(1 - 2t + 3t^2 - 3t^3 + 4t^4 - 3t^5 + 2t^6 - t^7) \\
V_{7_7} &= t^{-3}(-1 + 3t - 3t^2 + 4t^3 - 4t^4 + 3t^5 - 2t^6 + t^7)
\end{aligned}$$

6 樹下・寺阪の結び目のジョーンズ多項式

下の図のような結び目を、樹下・寺阪の結び目と呼ぶ。この結び目は特別な性質を持っており、例えば彩色数という不変量を用いても結び目がほどけないことが判定できない。そこで樹下・寺阪の結び目のジョーンズ多項式を求めて、これがほどけるかどうか判定してみよう。

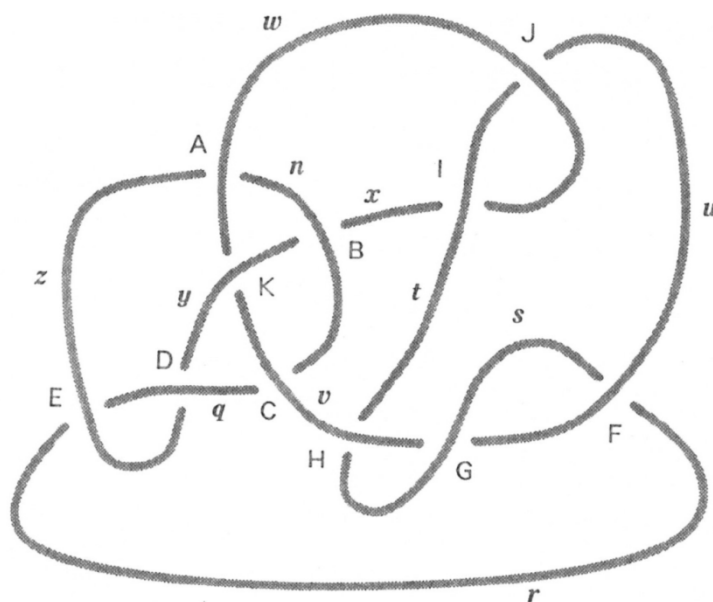


図 21



図 22

図のように交点1つ1つについて、 L_+, L_-, L_0 と図を分けていき、ジョーンズ多項式が分かっている絡み目になるまで、繰り返す。それが図 22 である。図 22 では M_+, M_0 のジョーンズ多項式は

$$V_{M_+} = V_{6_3} \times d$$

$$V_{M_0} = V_{6_3}$$

となり、これは知られている。そこでスケイン関係式より

$$V_{M_-} = \frac{\sqrt{t}}{t^6} - \frac{2\sqrt{t}}{t^5} + \frac{3\sqrt{t}}{t^4} - \frac{5\sqrt{t}}{t^3} + \frac{4\sqrt{t}}{t^2} - \frac{5\sqrt{t}}{t} + 3\sqrt{t} - 2t\sqrt{t} + t^2\sqrt{t} = V_{K_0}$$

$$V_{K_+} = V_{6_3}$$

さらにもう一度スケイン関係式を使うと、

$$V_{K_-} = \frac{1}{t^7} - \frac{3}{t^6} + \frac{4}{t^5} - \frac{6}{t^4} + \frac{7}{t^3} - \frac{6}{t^2} + \frac{6}{t} - t^2 + 2t - 3 = V_{L_-}$$

となる。以下同様にして

$$V_{N_+} = V_{3_1} \# V_{3_1^-}$$

$$V_{N_+} = -t^{-3} + t^{-2} - t^{-1} - t^3 + t^2 - t + 3$$

$$V_{N_0} = d$$

V_{N_+}, V_{N_0} にスケイン関係式を使うと

$$V_{N_-} = -t^{-5} + t^{-4} - t^{-3} + 2t^{-2} - t^{-1} - t + 2 = V_{R_0}$$

V_{R_0}, V_{R_+} にスケイン関係式を使うと

$$V_{R_-} = -\frac{\sqrt{t}}{t^7} + \frac{2\sqrt{t}}{t^6} - \frac{\sqrt{t}}{t^5} + \frac{3\sqrt{t}}{t^4} - \frac{4\sqrt{t}}{t^3} + \frac{3\sqrt{t}}{t^2} - \frac{3\sqrt{t}}{t} + \sqrt{t} = V_{L_0}$$

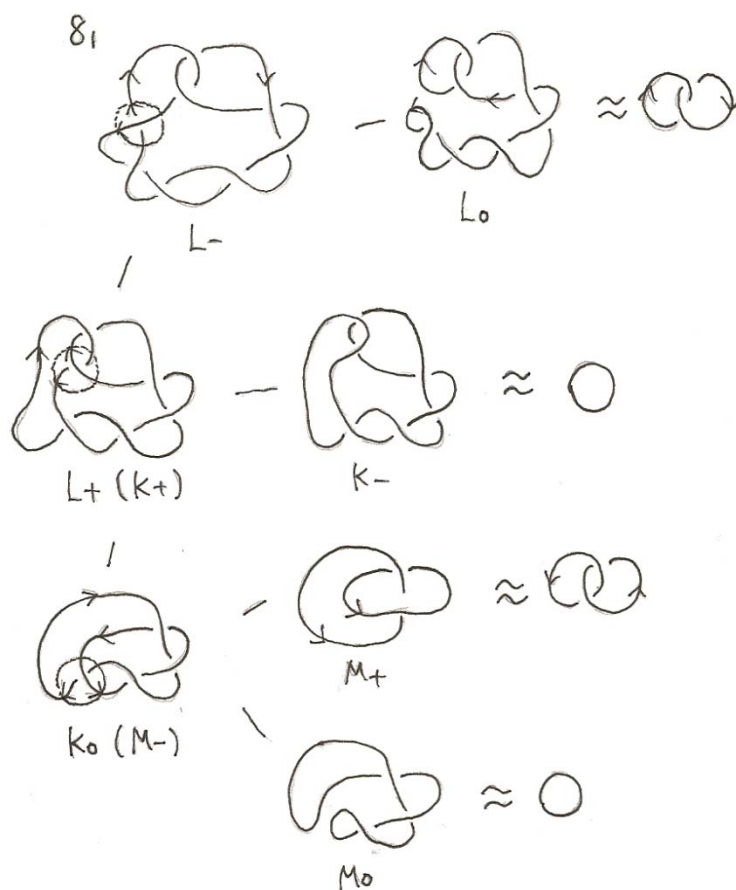
V_{L_0}, V_{L_-} にスケイン関係式を使うと

$$V_{L_+} = t^{-6} - 2t^{-5} + 2t^{-4} - 2t^{-3} + t^{-2} + 2t - t^4 + 2t^3 - 2t^2$$

となることが分かる。これにより樹下・寺阪のジョーンズ多項式が求められた。この計

算もとても計算間違いをしやすいので、計算ミスを防ぐために $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ を代入して検算してみるとよい。5.1 で説明したように $V_L(\omega) = 1$ が常に成り立っているはずである。

次に最小交点数 8 の結び目のジョーンズ多項式の求め方を紹介する。



上のジョーンズ多項式をスケイン関係式を用いて求める。

スケイン関係式より

$$V_{M_-} = -\frac{1}{t^2\sqrt{t}} - \frac{1}{t^4\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t\sqrt{t}} = V_{K_0}$$

となる。スケイン関係式より

$$V_{K_+} = t^2 - t + 2 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^4} = V_{L_+}$$

となる。スケイン関係式より

$$V_{L_-} = t - 1 + \frac{3}{t} - \frac{3}{t^2} + \frac{3}{t^3} - \frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^5}$$

と求められる。最小交点数8の結び目は2種類あるのだが、それぞれの式はみなさんで確かめてみてほしい。

7 まとめと将来の展望

私はジョーンズ多項式の不変量についていろいろ計算をしてみた。1つ求めるだけでも相当の時間がかかったし、計算ミスもよくおこるので大変苦勞した。

合成した絡み目のジョーンズ多項式の求め方について。交点数の多いジョーンズ多項式を求める際、合成したジョーンズ多項式の絡み目の求め方を知っていると計算が求めやすくなり、ミスも少なくなるのでオススメである。

樹下・寺阪のジョーンズ多項式を求められた。交点数が11のため何度も何度もやり直すことになったが、最終的に求めることに成功した。

最小交点数のジョーンズ多項式に-1をいれると、面白い発見があったのでここに載せておく。

退化因子とジョーンズ多項式 T に-1を代入した関数

	退化因子	ジョーンズ多項式(-1を代入)
3_1	3	-3
4_1	5	5
5_1	5	5
5_2	7	-7
6_1	9	9

6₂	11	-11
6₃	13	13
7₁	7	-7
7₂	11	-11
7₃	13	13
7₄	15	-15
7₅	17	17
7₆	19	19
7₇	21	-21

退化因子については、同じ研究室の有馬君の卒業論文を参照して欲しい。樹下・寺阪のジョーンズ多項式でも、退化因子とジョーンズ多項式に-1を入れた値が、符号は異なる箇所もあるが、同じになることが分かった。

この関係性についてはまだ証明が出来ていない。これが分かれば面白い発見になりそうだと私は思う。

この研究が誰かの役に立ってくれたら幸いである。

参考文献

「新版 組みひもの数理」(河野 俊丈 著)

「結び目のはなし」(村上 斉 著)