

正多角形による

多面体の構成

～フラレーンをめぐって～

青山学院大学理工学部

物理・数理学科

西山研究室

1 5 1 0 7 0 2 7

加藤 春平

目次

まえがき	・ ・ ・ ・ ・ 3
§ 1. 等辺多角形	・ ・ ・ ・ ・ 5
§ 2. 凸多面体	・ ・ ・ ・ ・ 7
§ 3. オイラーの多面体定理	・ ・ ・ ・ ・ 9
§ 4. プラトンの多面体	・ ・ ・ ・ ・ 11
§ 5. 正多面体の諸量	・ ・ ・ ・ ・ 15
§ 6. 切頭多面体の諸量	・ ・ ・ ・ ・ 19
§ 7. フラーレン	・ ・ ・ ・ ・ 34
§ 8. まとめ	・ ・ ・ ・ ・ 40
§ 9. 参考文献・資料	・ ・ ・ ・ ・ 41

まえがき

この研究は多面体を通してフラーレンの構造，諸量について理解することを目標にした。フラーレンとは炭素元素同素体であり，他の同素体にはダイヤモンド，黒鉛（グラファイト），カーボンナノチューブがある。最初に発見されたフラーレンは切頭 20 面体の頂点に炭素原子 60 個を配した 5 員環と 6 員環の交った構造をもつ。ここで切頭 20 面体とは正 20 面体の頂点を切り落としてできる準正多面体のことである。ここに私が多面体を通してフラーレンを理解しようとした理由がある。切頭 20 面体が大きく関係しているならば，元の立体である正多面体，その仲間であり正多面体を応用することでできる切頭多面体，そしてそれらを構成する多角形，これらを考察することはフラーレンの構造を理解するのに欠かせないと考えた。しかし残念ながら，この考えが適用できるのはフラーレン C_{60} （以降 C_{60} ）だけである。なぜならば，凸であり構成面が正多角形であるフラーレンは C_{60} だけであり，他はそうでないからである。つまり多角形や多面体を考察することでフラーレンの構造や諸量を理解できる範囲は僅かな部分であることが分かった。

フラーレン C_{70} （以降 C_{70} ）については [D.A.Mckenzie, C.A.Davis, D.J.H.Cockayne, D.A.Muller, A.M.Vassallo, The structure of C_{70} molecule, NATURE VOL355, 622, 1992] においてその構造が実験に基づいて詳細に報告されており，本論文でもそのデータを引用した。これを基に今後，諸量の理論的な導出に邁進していきたいと思う。

フラーレン C_{60} は 1985 年，ハロルド・クロトー，リチャード・スモーリー，ロバート・カールらによって発見され，この 3 人はこの業績によって 1996 年にノーベル化学賞を受賞した。現在までに安定フラーレンと確認されたものは炭素数 100 以下のもので C_{60} , C_{70} , C_{76} , C_{78} , C_{82} , C_{84} , C_{90} , C_{96} である。フラーレンの特筆すべきことは，これまでに発見されたフラーレンは 5 員環（5 角形）と 6 員環（6 角形）のみから構成されていること，そして 5 員環を必ず 12 個含むということである。結合は 5 員環に 5 個の 6 員環が接し，6 員環に 6 員環 3 個と 5 員環 3 個が交互に接しているのである。また 5 員環には 2 重結合はなく，6 員環同士が接する場所に存在する。その他，フラーレンは孤立 5 員環則（12 個の 5 員環は隣接しない規則）を満たす。この規則が C_{60} と C_{70} の間で安定フラーレンが存在しない理由であり，5 員環が隣り合った構造ではその付近の結合のひずみが増加して構造を不安定にしてしまう。これについてはまだ理論的には理解しておらず，今後考察を行う。 C_{60} の場合には 5 員環が隣り合う事を許せば 1800 種類の構造が可能だということだが，実際には 1 種類しかできず，孤立 5 員環則がフラーレンの安定性に強い制限を与えていると言える。

以下，論文の内容を章毎に解説する。

§1. “等辺多角形” では，平面上で凸な等辺 5 角形が存在する条件について考察した。これはフラーレンには 12 個の 5 角形が必ず含まれており等辺 5 角形の考察が欠かせないた

めである。

§ 2. “凸多面体”では、何故凸多面体に限定したかという C_{60} が凸多面体であり、その他のフラレンもおそらく凸多面体であろうとこの時点では予想していたためである。

§ 3. “オイラーの多面体定理”では、凸多面体の頂点の数を V (*Vertex*), 辺の数を E (*Edge*), 面の数 F (*Face*)とおくと $V - E + F = 2$ の関係が成り立つというオイラーの多面体定理の証明を行った。この定理は既述のフラレンに12個の5角形が必ず含まれていることの証明に必要である。

§ 4. “プラトンの多面体”では、正多面体を定義して、さらに正多面体が相似を除けば5種類である証明を与えた。高次のフラレンがどうであれ C_{60} が切頭20面体であり、その切頭20面体はプラトンの多面体に含まれる正20面体を応用させたものであるから、正多面体を考察すること重要であると考えられる。

§ 5. “正多面体の諸量”, 及び § 6. “切頭多面体の諸量”では、1辺の長さを1とした正多面体の諸量とその正多面体を切頭してできる等辺な切頭多面体の諸量について考察した。ここで諸量とは頂点・辺・面の数, 表面積・体積, 外接球の半径, 2面角, 凸多面体の内接球の半径である。なお本論文では凸多面体の内接球とは凸多面体の全ての面に内接する球のことを指す。内接球は存在することも存在しないことも有りうる。存在するときはその半径を求める。存在しないときは残った立体の諸量を求める。これはフラレンの諸量を求める際に必要となってくる情報と思われる。

§ 7. “フラレン”では、 C_{60} の諸量を求めたり、*Nature*に掲載されている論文中のデータを引用し C_{70} の原子間距離の塗り分けを行った。また関連のある論文についての翻訳も行った。

§ 8. “まとめ”では、研究をしたことによる結果や反省、また今後の課題について記述した。

§ 9. “参考文献・資料”では、本研究で参考または引用した文章や図についての参考書や論文、web ページを載せている。

この論文を読んで多角形, 多面体, フラレンに少しでも興味を持って頂き、またデータが何かの役に立てばありがたい。

§ 1. 等辺多角形

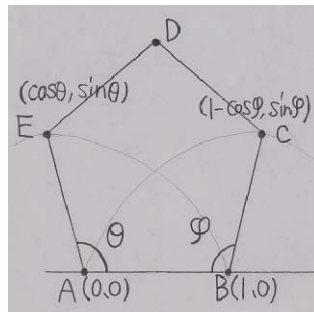
平面上で一辺の長さが 1 で凸な等辺 5 角形の存在条件を数式で表すことを目標とする。これはフラーレンには 12 個の 5 角形が必ず含まれており、フラーレンにとって重要な多角形であるため諸量を求める際に数式で表しておいた方が都合が良いのではと思ったからである。

等辺の 5 角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E とし, xy 平面上において図 1 のように頂点 A, B の座標を決める。角 $\angle EAB = \theta$ と角 $\angle CBA = \varphi$ を用いて C, E の座標を書き表すと,

$$E = (\cos \theta, \sin \theta), \quad C = (1 - \cos \varphi, \sin \varphi)$$

となる。

図 1



ここで EC 間の距離が 2 以上になってしまうと 5 角形は構成できないから,

$$|EC| < 2$$

つまり,

$$|EC|^2 < 4$$

となる。よって

$$\begin{aligned} 4 &> (1 - \cos \varphi - \cos \theta)^2 + (\sin \varphi - \sin \theta)^2 \\ &= 1 + \cos^2 \theta + \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi - 2 \cos \theta \\ &\quad + 2 \cos \varphi \cos \theta + \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta - 2 \sin \varphi \sin \theta \\ &= 1 + 1 + 1 - 2(\cos \varphi + \cos \theta) + 2 \cos(\varphi + \theta) \\ &= 3 + 2 \cos(\varphi + \theta) - 2(\cos \varphi + \cos \theta) \end{aligned}$$

となる。

$$\frac{\theta + \varphi}{2} = M, \quad \frac{\theta - \varphi}{2} = N \text{ とおくと,}$$

$$4 > 4 \cos^2 M - 4 \cos M \cos N + 1$$

となる。ここでさらに $\cos M = X$, $\cos N = Y$ とおくと,

$$0 > 4X^2 - 4XY - 3,$$

$$\frac{Y - \sqrt{Y^2 + 3}}{2} < X < \frac{Y + \sqrt{Y^2 + 3}}{2}$$

が得られる。これで次の定理が得られた。

定理 1. 1 辺の長さが 1 の等辺 5 角形において隣り合う頂点の内角を φ, θ とする。
この φ, θ に対して、

$$X = \cos \frac{\theta + \varphi}{2}, \quad Y = \cos \frac{\theta - \varphi}{2}$$

とおくと、

$$\frac{Y - \sqrt{Y^2 + 3}}{2} < X < \frac{Y + \sqrt{Y^2 + 3}}{2}$$

が成り立つ。

これで等辺 5 角形の存在のための必要条件は書き表せたが、この条件だけでは凹な 5 角形も含まれてしまうので、それぞれの内角は π 未満であるという条件を加える。本当は凸である条件も数式で表したかったが、現時点では分からなかった。

またフラーレンには 6 角形も大事な多角形であるので、等辺 6 角形の成立条件を書き表すことも含め、今後の課題とする。

§ 2. 凸多面体

フラレーン C_{60} が凸であり、その他のフラレーンもおそらく凸であろうと予想した。そこでまず凸多面体の定義をはっきりとさせ、さらに有限個の平面で囲まれた有界な立体は凸であることについての証明を行う。

定義 1. 凸多面体とは、空間 R^3 内の有限個の平面で囲まれた有界な立体である。

定義 2. $V \subset R^3$ が凸であるとは任意の $p, q \in V$ に対して $I_{p,q} \subset V$ となることである。ただし $I_{p,q}$ は端点が p, q の線分を表す。

凸多面体という名称からすると、これは凸集合であるが、これを定義に則って確かめておこう。

定理 2. 凸多面体は空間 R^3 内の凸な部分集合である。

[証明] 図 2 において線分 $I_{p,q}$ を $m : n$ に内分する点は、

$$\frac{m(q-p)}{m+n} + p = \frac{mq+np}{m+n} = sp + tq = (sp_1 + tq_1, sp_2 + tq_2, sp + tq_3)$$

と表すことができる。ただし

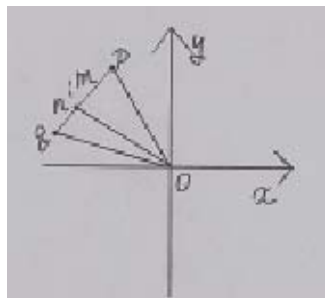
$$s + t = 1, \quad s, t \geq 0$$

である。つまり、

$$I_{p,q} = \{sp + tq \mid s + t = 1, s, t \geq 0\}$$

となる。 $p, q \in V$ のとき $I_{p,q} \subset V$ を以下示す。

図 2



今、 $p, q \in V$ のとき $I_{p,q} \subset V$ を以下示す。そこで $V \subset R^3$ が平面 $H_1, H_2, H_3, \dots, H_k$ で囲まれているとしよう。 $(a_i, b_i, c_i) \neq 0$ を $H_i (1 \leq i \leq k)$ の法線ベクトルとすると H_i の方程式は、

$$H_i: a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \quad (1 \leq i \leq k)$$

と表される. すると, V は $H_1 \sim H_k$ で囲まれているので

$$V = \{ a_i x + b_i y + c_i z + d_i \geq 0 \mid 1 < i < k \} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表される. $p, q \in V$ なので, p, q は $\textcircled{1}$ の不等式を満たしている. つまり,

$$a_i p_1 + b_i p_2 + c_i p_3 + d_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq k)$$

$$a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3 + d_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq k)$$

が成り立つ. そこで $\textcircled{1}$ の不等式に $I_{p,q}$ 上の点 $sp + tq$ ($s + t = 1, s, t \geq 0$) を代入すると,

$$\begin{aligned} & a_i(sp_1 + tq_1) + b_i(sp_2 + tq_2) + c_i(sp_3 + tq_3) + d_i \\ &= a_i sp_1 + a_i tq_1 + b_i sp_2 + b_i tq_2 + c_i sp_3 + c_i tq_3 + d_i \\ &= s(a_i p_1 + b_i p_2 + c_i p_3) + t(a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3) + d_i \\ &= s(a_i p_1 + b_i p_2 + c_i p_3 + d_i) + t(a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3 + d_i) + (1 - s - t)d_i \\ &= s(a_i p_1 + b_i p_2 + c_i p_3 + d_i) + t(a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3 + d_i) \geq 0 \end{aligned}$$

となり, $sp + tq$ は不等式を満たすことが分かる. 従って $I_{p,q} \subset V$ であり V は凸あることが証明された.

■

§ 3. オイラーの多面体定理

凸多面体における頂点・辺・面の数についての関係を表した定理がオイラーの多面体定理である。ここで頂点の数を V (*Vertex*), 辺の数を E (*Edge*), 面の数 F (*Face*)とおくと以下の定理が成り立つ。この定理はフラレーンに 12 個の 5 角形が必ず含まれていることの証明に必要である。

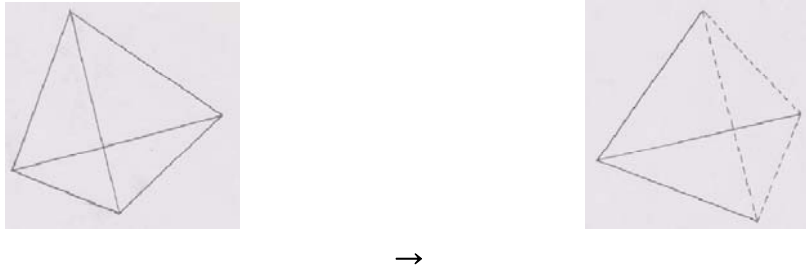
定理 3. (オイラーの多面体定理) 凸多面体の頂点, 辺, 面の数について次の関係が成り立つ。

$$V - E + F = 2$$

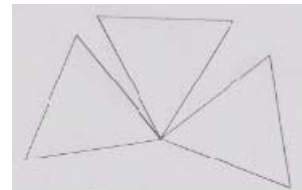
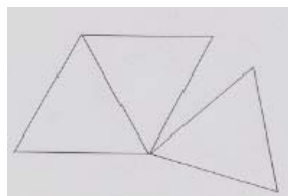
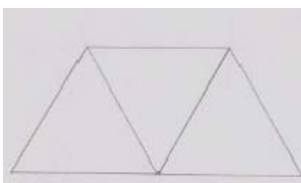
*この公式は凸でなくても膨らませると球の形になる多面体については成立する。

これよりオイラーの多面体定理を参考文献[7]を参考に証明する。

[証明] (i) まず F 面体の 1 面を取り除く。(例として正 4 面体を考え証明を追っていく)



(ii) 次に辺に沿って切れ込みを入れていくことで, その立体の展開図を作る。なお, この操作で 1 辺は 2 辺に, 1 つの頂点は 2 つの頂点になるので (V, E, F) の増加量 $(v, e, f) = (1, 1, 0)$ となる。よって $v - e + f = 1 - 1 + 0 = 0$ より辺に沿って切っていくこの操作で V, E, F の関係に変化は起きない。



$$V = 5, E = 7, F = 3 \\ V - E + F = 1$$

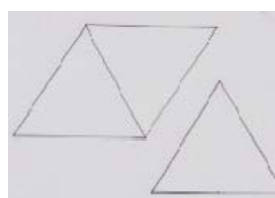
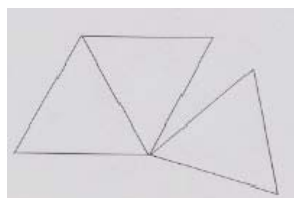
→

$$V = 6, E = 8, F = 3 \\ V - E + F = 1$$

→

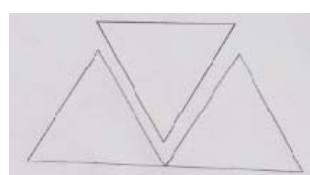
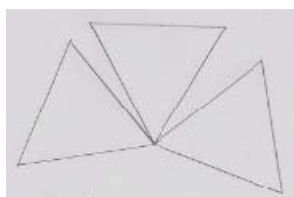
$$V = 7, E = 9, F = 3 \\ V - E + F = 1$$

(iii) 次に展開図から面を 1 枚切り取る. 切り離した面の増加量を (v_1, e_1, f_1) とすると残った展開図の (V, E, F) の増加量は $(v, e, f) = (1 - v_1, -e_1, -f_1) = (1 - v_1, -v_1, -1)$ となる. 従って $V - E + F$ の増加量は $v - e + f = 1 - v_1 + v_1 - 1 = 0$ であるため, 残った展開図の $V - E + F$ に変化は起きていない. よって順次面を切り取っていく操作で残った展開図の $V - E + F$ に変化は起きない.



$$V = 6, E = 8, F = 3; V - E + F = 1 \quad \rightarrow \quad \text{全体 } V = 7, E = 8, F = 3, V - E + F = 2$$

$$\text{残った展開図 } V = 4, E = 5, F = 2, V - E + F = 1$$



$$V = 7, E = 9, F = 3, V - E + F = 1 \quad \rightarrow \quad \text{全体 } V = 3, E = 3, F = 1, V - E + F = 1$$

$$\text{残った展開図 } V = 5, E = 6, F = 2, V - E + F = 1$$

(iv) 頂点を切り離す操作を続けていき最後の 1 面(多角形)になったとき, それが「残った展開図」となる. 既述のように多角形では $V = E, F = 1$, つまり $V - E + F = 1$ が成り立っている. 従って(ii), (iii)より(i)で 1 面を取り除かれた $(F - 1)$ 面体でも $V - E + (F - 1) = 1$ が成り立っている. よって $V - E + F = 2$.



§ 4. プラトンの多面体

ここでは正多面体が相似を除けば 5 種類であることの証明を行う。高次のフラレーンがどうであれ C_{60} が切頭 20 面体であり、その切頭 20 面体はプラトンの多面体に含まれる正 20 面体を応用させたものであるから正多面体を考察することは重要である。

定義 3. プラトンの多面体とは次の条件①～③を満たす立体である。

①有限個の面で囲まれた凸多面体である。

②各面は全て合同な正多角形である。

③各頂点において頂点を中心とした十分小さな半径の球を考え球面と各辺の交点及び球の中心を結んでできる多角錐が全て合同である。

(以下③のような時、「各頂点の近傍は全て合同である」ということにする。)

定理 4. プラトンの多面体は相似を除けば 5 種類である。

[証明] 正多面体が存在するための必要条件として次の(ア), (イ)が考えられる。

(ア) 1つの頂点に集まる面は 3 枚以上。

(イ) 頂点に集まる各多角形の内角の和は 2π より小さい。

各頂点に m 枚の面が集まっているとすると、正 n 角形 ($n > 3$) の内角の大きさは、

$$\frac{\pi(n-2)}{n}$$

であるから、(ア), (イ)より、

$$\frac{3\pi(n-2)}{n} \leq m \cdot \frac{\pi(n-2)}{n} < 2\pi,$$

$$\frac{3\pi(n-2)}{n} < 2\pi, \quad n-2 < \frac{2n}{3}, \quad 3n-6 < 2n,$$

$$\therefore n < 6.$$

これより、

$$n = 3, 4, 5$$

であることが分かる。そこで n の値によって場合分けして考える。

(i) $n = 5$ のとき各面は 5 角形である。

$$V = \frac{5F}{m}, \quad E = \frac{5F}{2}$$

オイラーの多面体定理を用いて,

$$\frac{5F}{m} - \frac{5F}{2} + F = 2$$

が成り立つ. これをまとめると,

$$10F - 5mF + 2mF = 4m,$$

$$3mF + 4m - 10F = 0$$

... ②

となる. これを更に変形すると,

$$mF + \frac{4m}{3} - \frac{10F}{3} = 0,$$

$$\left(m - \frac{10}{3}\right)\left(F + \frac{4}{3}\right) = -\frac{40}{9}.$$

ここで $F + \frac{4}{3} > 0$ なので, 上の不等式より,

$$m - \frac{10}{3} < 0, \quad m < \frac{10}{3},$$

$$\therefore m = 3.$$

... ③

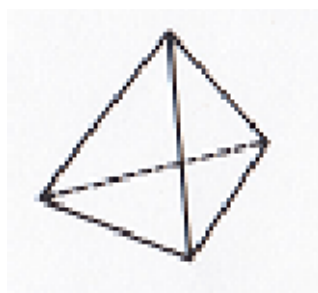
②を①に代入して,

$$9F + 12 - 10F = 0,$$

$$F = 12.$$

従ってこの正多面体は正 12 面体である.

図 3



(ii) $n = 4$ のとき各面は 4 角形である.

$$V = \frac{4F}{m}, \quad E = \frac{4F}{2}$$

オイラーの多面体定理を用いて,

$$\frac{4F}{m} - \frac{4F}{2} + F = 2$$

が成り立つ。これをまとめると、

$$\begin{aligned} 8F - 4mF + 2mF &= 4m, \\ 2mF + 4m - 8F &= 0, \\ mF + 2m - 4F &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。これを更に変形すると、

$$(m - 4)(F + 2) = -8.$$

ここで $F + 2 > 0$ なので、上の不等式より、

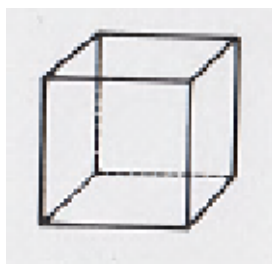
$$\begin{aligned} m - 4 &< 0, \\ m &< 4, \\ \therefore m &= 3. \end{aligned} \quad \dots \textcircled{5}$$

④を③に代入して、

$$\begin{aligned} 3F + 6 - 4F &= 0, \\ F &= 6. \end{aligned}$$

従ってこの正多面体は正 6 面体である。

図 4



(iii) $n = 3$ のとき各面は 3 角形である。

$$V = \frac{3F}{m}, \quad E = \frac{3F}{2}$$

オイラーの多面体定理を用いて、

$$\frac{3F}{m} - \frac{3F}{2} + F = 2$$

が成り立つ。これをまとめると、

$$\begin{aligned} 6F - 3mF + 2mF &= 4m, \\ mF + 4m - 6F &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。これを更に変形すると、

$$(m - 6)(F + 4) = -24.$$

ここで $F + 4 > 0$ なので、上の不等式より、

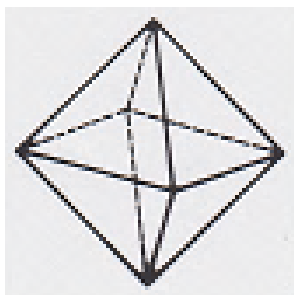
$$\begin{aligned} m - 6 &< 0, \\ m &< 6, \\ \therefore m &= 3, 4, 5. \end{aligned}$$

(a) $m = 3$ のとき, ⑥に代入して,

$$3F + 12 - 6F = 0, \quad 3F = 12, \quad F = 4.$$

従ってこの正多面体は正 4 面体である.

図 5

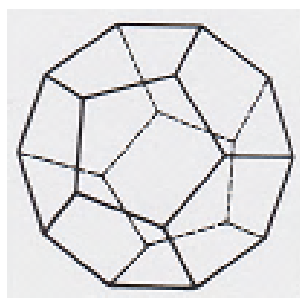


(b) $m = 4$ のとき, ⑥に代入して,

$$4F + 16 - 6F = 0, \quad 2F = 16, \quad F = 8.$$

従ってこの正多面体は正 8 面体である.

図 6

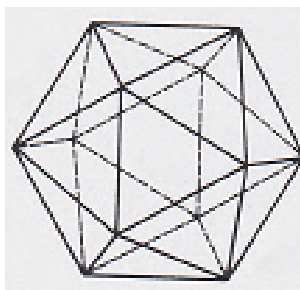


(c) $m = 5$ のとき, ⑤に代入して,

$$5F + 20 - 6F = 0, \quad F = 20.$$

従ってこの正多面体は正 20 面体である.

図 7



よって正多面体は相似を除けば 5 種類しかないと証明できた. ■

図は[1]より引用した.

§ 5. 正多面体の諸量

正多面体の辺の長さや面の面積を個々の場合に計算して諸量をただ求めるのは簡単だが、ここでは以下のように p, q を決めて 5 種類の正多面体に対する一般的な公式を導くことにする。これは[1]を参考にした。

各面が p 角形、各頂点が q 角錐の正多面体を記号 (p, q) で表す。以下、各面を構成する正多角形の 1 辺の長さは 1 とする。

まず頂点・辺・面の数 V, E, F 、表面積 S 、体積 T 、内接球の半径 r 、外接球の半径 R を p, q で表す。2 面で 1 つの辺を共有しているので、

$$pF = 2E \cdots \textcircled{1}$$

であり、更に 1 つの辺が 2 点を含むので、

$$pF = 2E \cdots \textcircled{2}$$

となる。①と②をまとめると、

$$V = \frac{2E}{q}, \quad F = \frac{2E}{p}, \quad E = 1$$

となる。これを比で表すと、

$$V : E : F = \frac{1}{q} : \frac{1}{2} : \frac{1}{p}$$

となる。比例定数を c としてオイラーの多面体定理に代入すると、

$$2 = c \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right),$$

$$\therefore c = \frac{2}{\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{4pq}{2q + 2p - pq}$$

となる。分母、分子に $2pq$ を掛けると、

$$V = \frac{4p}{2p + 2q - pq}, \quad E = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}, \quad F = \frac{4q}{2p + 2q - pq}$$

となる。また $(r, R) = (\text{内接球の半径}, \text{外接球の半径})$ は、

$$b = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{q}}$$

を用いて以下のように書き表せる。

$$r = \frac{a}{2b} \cot\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right), \quad R = \frac{a}{2b} \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)$$

となる。ただし a は辺長であるが我々は $a = 1$ と仮定していることに注意する。

最後に $(S, T) = (\text{表面積}, \text{体積})$ は、

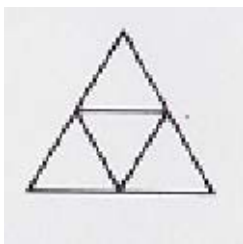
$$S = \frac{p}{4} a^2 F \cot \frac{\pi}{p} = \frac{E}{2} a^2 \cot \frac{\pi}{p}, \quad T = \frac{1}{3} S r$$

となる.

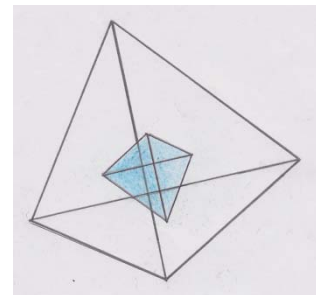
定義 4. 双対多面体とは多面体の面の重心同士を辺で結ぶことによりできる立体のことである.

このようにして求めた各正多面体の諸量を下にまとめる. なお r_n, R_n, S_n, T_n の下添え字は正 n 面体を表している.

●正 4 面体●



展開図



双対多面体 : 正 8 面体

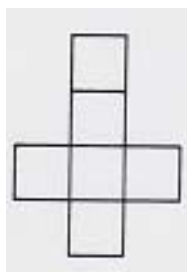
$$(V, E, F) = (8, 12, 6)$$

$$(p, q) = (4, 3)$$

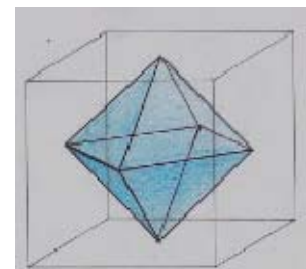
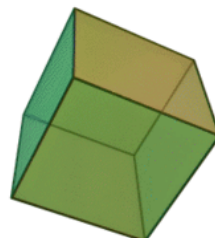
$$(r_4, R_4) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$(S_4, T_4) = (6, 1)$$

●正 6 面体●



展開図



双対多面体 : 正 8 面体

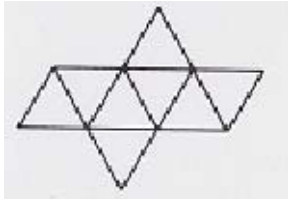
$$(V, E, F) = (8, 12, 6)$$

$$(p, q) = (4, 3)$$

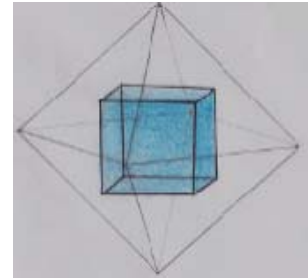
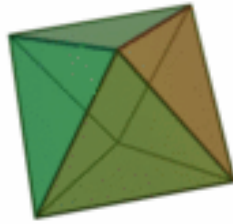
$$(r_6, R_6) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$(S_6, T_6) = (6, 1)$$

●正 8 面体●



展开图



双对多面体：正 6 面体

$$(V, E, F) = (6, 12, 8)$$

$$(p, q) = (3, 4)$$

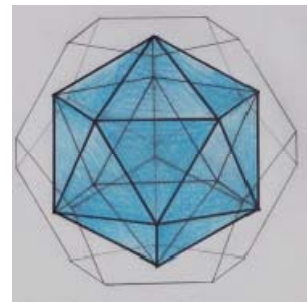
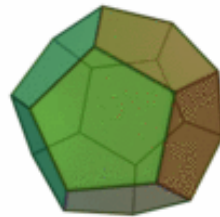
$$(r_8, R_8) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$(S_8, T_8) = \left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$$

●正 12 面体●



展开图



双对多面体：正 20 面体

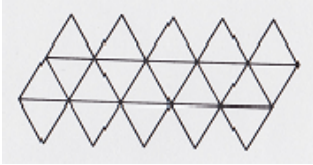
$$(V, E, F) = (20, 30, 12)$$

$$(p, q) = (5, 3)$$

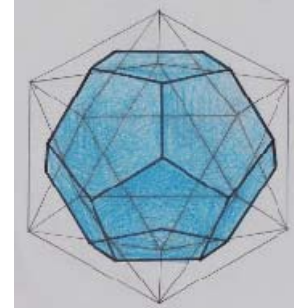
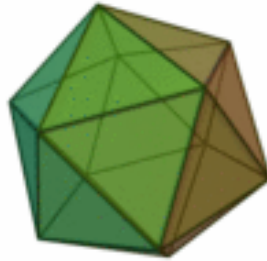
$$(r_{12}, R_{12}) = \left(\frac{\cot \frac{\pi}{5}}{4\sqrt{\frac{3}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{5}}}, \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\frac{3}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{5}}} \right) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}(\sqrt{5} + 1)}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1} \right)$$

$$(S_{12}, T_{12}) = \left(3\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}, \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \right)$$

●正 20 面体●



展開図



双対多面体：正 12 面体

$$(V, E, F) = (12, 30, 20)$$

$$(p, q) = (3, 5)$$

$$(r_{20}, R_{20}) = \left(\frac{\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{5}}{6\sqrt{\frac{3}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{5}}}, \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{2\sqrt{\frac{3}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{5}}} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{6(\sqrt{5} - 1)}, \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)} \right)$$

$$(S_{20}, T_{20}) = \left(5\sqrt{3}, \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12} \right)$$

図は[1]と[8]より引用した。ただし双対多面体の図は自作である。

§ 5. 切頭多面体の諸量

切頭多面体とは正多面体の各頂点の近傍をその頂点と重心を結んだ直線に垂直な平面で切り落とした立体である。切頭多面体は準正多面体である。

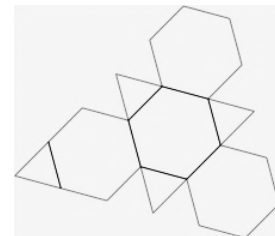
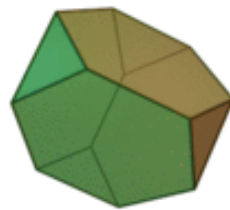
また準正多面体とは次の条件①～③を満たす立体である。

- ①有限個の多角形で囲まれた凸多面体である。
- ②各面は全ての辺長が等しい多角形からなる。
- ③各頂点での多角錐は全て合同である。

すべての辺の長さが1の正多面体を切頭することで等辺の切頭多面体を作り、その諸量を求めよう。ここでいう諸量とは頂点・辺・面の数、表面積、体積、外接球の半径、2面角、内接球の半径である。なお本論文では凸多面体の内接球とは凸多面体の全ての面に内接する球のことを指す。内接球は存在することも存在しないことも有りうる。存在するときはその半径を求める。存在しないときは残った立体の諸量を求める。(他の論文とは内接球という用語を異なる意味で使うので注意してほしい)これはフラレーンの諸量を求める際に必要な情報だと思う。

切頭多面体の頂点・辺・面の数を V, E, F 、表面積を S' 、体積を T' 、外接球の半径を R' 、2面角を θ とする。なお切り取った角錐の頂点を含む辺の長さを x 、頂点を含む1つ面の面積を y 、底面の面積を z 、多角錐の体積を v 、切頭多面体の1辺を w とおいて計算する。切頭多面体は等辺になるように各頂点から多角錐を切り取っていることに注意しよう。

●切頭4面体●



$$(V, E, F) = (12, 18, 8)$$

構成面：正3角形4枚 正6角形4枚

展開図

正4面体(B_4)の諸量・・・ $(S_4, T_4) = (\sqrt{3}, \frac{1}{6\sqrt{2}})$

$$(r_4, R_4) = \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{3}{2\sqrt{6}} \right)$$

以上の値を基にして諸量を求める. 1辺の長さは $\frac{1}{3}$ となることがすぐ分かり, 正4面体の

1面を A とおく. 三角形 A (面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}$)と切り取る3角形の面積比は $9:1$ なので,

$$9:1 = \frac{\sqrt{3}}{4} : y, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

となる. 従って, 切頭4面体(B'_4)の6角形の1面の面積は,

$$A - 3y = \frac{\sqrt{3}}{4} - 3 \frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

となる. よって表面積は,

$$S'_4 = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{7\sqrt{3}}{9}$$

となる. B_4 (体積 $\frac{1}{6\sqrt{2}}$)と切り取る3角錐の体積比は $27:1$ なので,

$$27:1 = \frac{1}{6\sqrt{2}} : z, \quad z = \frac{1}{162\sqrt{2}}$$

となる. よって体積は,

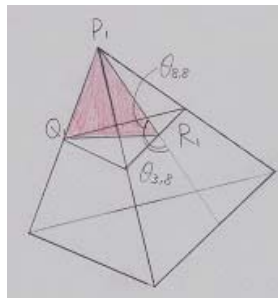
$$T'_4 = \frac{1}{6\sqrt{2}} - 4 \frac{1}{162\sqrt{2}} = \frac{23}{162\sqrt{2}}$$

となる. B_4, B'_4 の重心は各頂点から向かい合う面への垂線の交点なので三平方の定理を利用して外接球の半径は,

$$R'_4 = \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{6}{16}} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

となる. 2面角を図8のように8角形と8角形のなす角を $\theta_{8,8}$, 3角形と8角形のなす角を $\theta_{3,8}$ とおく.

図 8



$\theta_{8,8}$ は $\Delta P_1Q_1R_1$ で余弦定理を利用して,

$$\cos \theta_{8,8} = \frac{(Q_1 R_1)^2 + (R_1 P_1)^2 - (P_1 Q_1)^2}{2 \cdot Q_1 R_1 \cdot R_1 P_1} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

となる。よって、

$$\theta_{8,8} \sim 70.5^\circ$$

となる。 $\theta_{3,8}$ は、

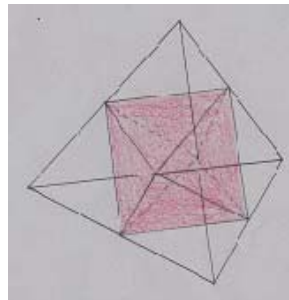
$$\theta_{3,8} = \pi - \theta_{8,8} \sim 109.5^\circ$$

となる。 r'_4 は B_4 の重心から 6 角形の重心への距離なので r_4 と同じ

$$\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

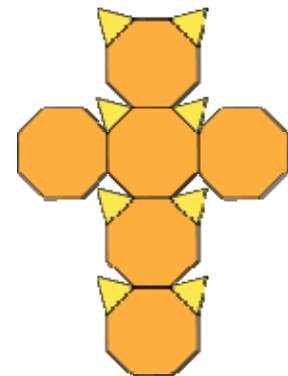
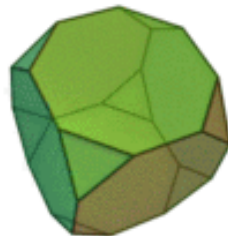
になるはずである。この時内接球が存在するときの切り取る 3 角錐の 1 辺の長さは $\frac{1}{2}$ となり立体は正 8 面体に退化する(図 9)。つまり B'_4 の内接球は存在しない。

図 9



この正 8 面体の諸量については既述の正多面体の諸量において $a = \frac{1}{2}$ とすれば求められる。

●切頭 6 面体●



$$(V, E, F) = (24, 36, 14)$$

構成面：正 3 角形 8 枚 正 8 角形 6 枚

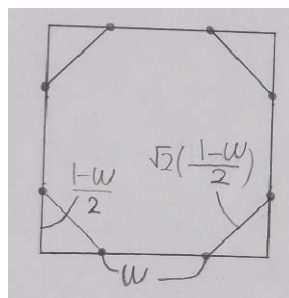
展開図

B_6 の諸量・・・ $(S_6, T_6) = (6, 1)$

$$(r_6, R_6) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

以上の値を基にして諸量を求める．全ての辺を等しくするには各頂点でうまく 3 角錐を切り取らなければならない．図 10 は B_6 の 1 面に切り取る位置を記したものである．

図 10



B'_6 の1辺を w とおくと,

$$1:\sqrt{2} = \frac{1-w}{2}:w, \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

となる．切り取る 3 角形の面積は,

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$$

であり, 切り取ったことによりできる新たな 3 角形の面積 z は,

$$z = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)^2}{4}$$

なる．従って表面積は,

$$S'_6 = 2(-6 - 2\sqrt{6} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{2})$$

となる．切り取る 3 角錐の体積 v は,

$$v = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^3$$

となる．よって体積は,

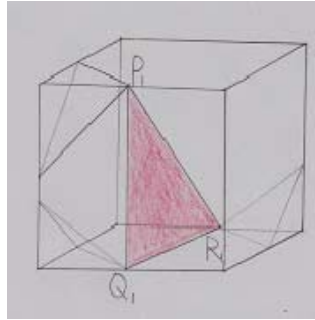
$$T'_6 = 1 - \frac{10 - 7\sqrt{2}}{3} = \frac{-7 + 7\sqrt{2}}{3}$$

となる．図 11 の $\Delta P_1Q_1R_1$ で三平方の定理を利用して外接球の半径は,

$$R'_6 = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}}{2}$$

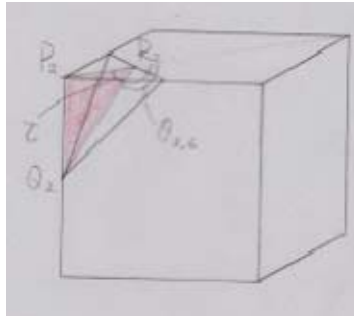
となる．

図 11



2 面角を 6 角形と 6 角形のなす角を $\theta_{6,6}$, 3 角形と 6 角形のなす角を $\theta_{3,6}$ とおく.

図 12



$$\theta_{6,6} = 90^\circ$$

は明確である. $\theta_{3,6}$ は図 12 の $\Delta P_2Q_2R_2$ で余弦定理を利用して,

$$\cos \tau = \frac{(Q_2R_2)^2 + (R_2P_2)^2 - (P_2Q_2)^2}{2 \cdot Q_2R_2 \cdot R_2P_2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}w}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-2w}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-w}{2}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}w}{2}\right) \left(\frac{1-2w}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\tau \sim 54.7^\circ$$

となる. よって,

$$\theta_{3,6} = \pi - \tau \sim 125.3^\circ$$

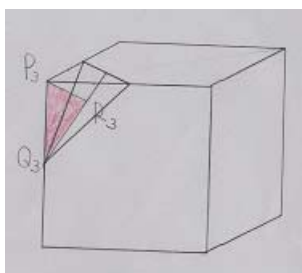
となる. r'_6 は B_6 の重心から 8 角形の重心への距離なので r_6 と同じ $\frac{1}{2}$ になるはずである.

図 13 の $\Delta P_3Q_3R_3$ で三平方の定理を利用して,

$$x = 3 \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right) \sim 0.634$$

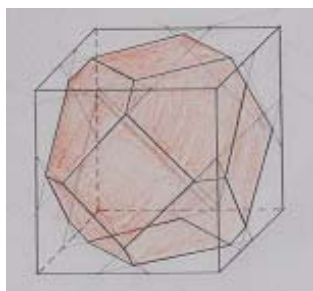
となる. つまり切り取る 3 角錐の 1 辺の長さが 0.634 となり, 同一辺上で 3 角錐二つ分を切り取るため B_6 の 1 辺の長さ 1 を超えてしまう ($< 0.634 + 0.634 = 1.268$). よって B'_6 の内接球は存在しない.

図 13

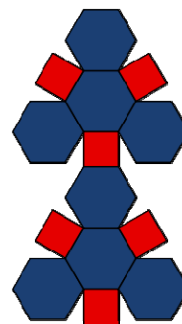
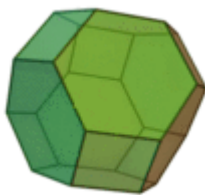


ただし切り取って残る立体は図 14 のように切頭 8 面体になるので、このことから切頭 8 面体には内接球があると分かる。この切頭 8 面体の諸量は次の B'_8 の内接球がある時の諸量を参照。

図 14



●切頭 8 面体●



展開図

$$(V, E, F) = (24, 36, 14)$$

構成面：正 4 角形 6 枚 正 6 角形 8 枚

$$B_8 \text{ の諸量 } \cdots (S_8, T_8) = \left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$$

$$(r_8, R_8) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

以上の値を基にして諸量を求める。切り取る 3 角形の面積は B'_4 の時と同様なので正 6 角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ，切り取ったことによりできる新たな 4 角形の面積は 1 辺が $\frac{1}{3}$ なので、

$$z = \frac{1}{9}$$

となる。従って表面積は、

$$S'_8 = 8 \frac{\sqrt{3}}{6} + 6 \frac{1}{9} = \frac{4\sqrt{3} + 2}{3}$$

となる。 B_8 の上の 4 角錐（体積 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ）と切り取る 4 角錐の体積比は 27 : 1 なので、

$$27 : 1 = \frac{\sqrt{2}}{6} : v, \quad v = \frac{\sqrt{2}}{162}$$

となる。よって体積は、

$$T'_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} - 6 \frac{\sqrt{2}}{162} = \frac{8\sqrt{2}}{27}$$

となる。 B_8 , B'_8 の重心と 8 つの頂点を通る平面において三平方の定理を利用して、

$$R'_8 = \frac{\sqrt{10}}{6}$$

となる。2 面角を 6 角形と 6 角形のなす角を $\theta_{6,6}$, 4 角形と 6 角形のなす角を $\theta_{4,6}$ とおく。図

15 の $\triangle P_1Q_1R_1$ ・ 図 16 の $\triangle P_2Q_2R_2$ でそれぞれ余弦定理を利用して、

$$\cos \theta_{6,6} = \frac{(Q_1R_1)^2 + (R_1P_1)^2 - (P_1Q_1)^2}{2 \cdot Q_1R_1 \cdot R_1P_1} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{3}$$

となる。よって、

$$\theta_{6,6} \sim 109.5^\circ$$

となる。また、

$$\cos \tau = \frac{(Q_2R_2)^2 + (R_2P_2)^2 - (P_2Q_2)^2}{2 \cdot Q_2R_2 \cdot R_2P_2} = \frac{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\tau \sim 54.7^\circ$$

となる。よって、

$$\theta_{4,6} = \pi - \tau \sim 125.3^\circ$$

となる。

図 15

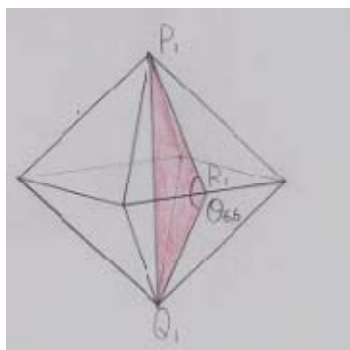
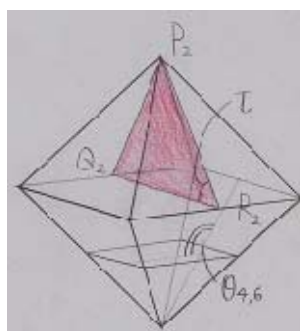


図 16

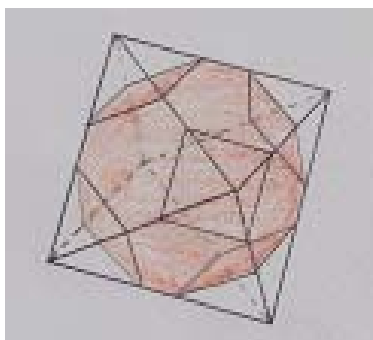


r'_8 は B_8 の重心から 6 角形の重心への距離なので r_8 と同じ

$$\frac{1}{\sqrt{6}}$$

になるはずである. そのとき切り取る 3 角形の 1 辺の長さは $x = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}} \sim 0.211$ である. つまり 4 角形の 1 辺が x , それ以外の辺長が $1 - 2x$ の切頭 8 面体である(図 11).

図 17



この諸量について, 表面積は,

$$S''_8 = 2\sqrt{3} + 6x^2(1 - \sqrt{3})$$

となる. また体積は,

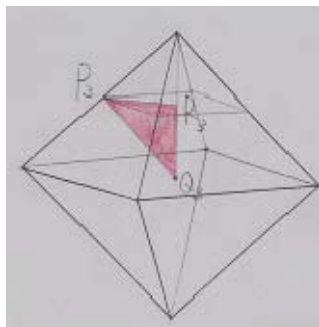
$$T''_8 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{3} - x^3 \right)$$

となる. 図 18 の 3 角形で三平方の定理を利用して, 外接球の半径は,

$$R_8'' = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{2}}$$

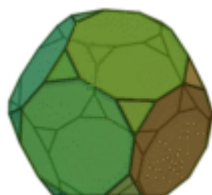
となる.

図 18



2 面角は B_8' と変わらない.

●切頭 12 面体●



$$(V, E, F) = (60, 90, 32)$$

構成面: 正 3 角形 20 枚 正 10 角形 12 枚

展開図

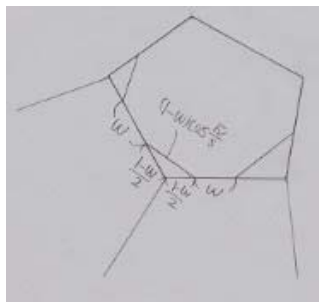
$$B_{12} \text{ の諸量 } \cdots (r_{12}, R_{12}) = \left(\frac{\cot \frac{\pi}{5}}{4 \sqrt{\frac{3}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{5}}}, \frac{\sqrt{3}}{4 \sqrt{\frac{3}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{5}}} \right) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} \sqrt{5 - \sqrt{5}} (\sqrt{5} + 1)}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1} \right)$$

$$(S_{12}, T_{12}) = \left(3 \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}, \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \right)$$

以上の値を基にして諸量を求める.

全ての辺を等しくするには各頂点でうまく 3 角錐を切り取らなければならない. 図 19 は B_{12} の 1 面に切り取る位置を記したものである.

図 19



B'_{12} の 1 辺を w とすると,

$$w = \frac{\cos \frac{\pi}{5}}{1 + \cos \frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

となる. 切り取る 3 角形の面積 y は,

$$y = \frac{w\sqrt{1-2w}}{4} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{20\sqrt{2}} \sim 0.131$$

となる. 切り取ったことによりできる新たな 3 角形の面積は,

$$z = \frac{\sqrt{3}w^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{20} \sim 0.087$$

となる. 従って表面積は,

$$S'_{12} = 3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - 60y + 20z = 3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{3\sqrt{5}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} + \sqrt{3} \sim 14.5$$

となる. 図 20 の $\triangle P_2Q_2R_2$ で三平方の定理を利用すると,

$$h = \frac{\sqrt{-3(w^2 + 6w - 3)}}{6} = \frac{\sqrt{\frac{6}{5}(7 - 3\sqrt{5})}}{6} \sim 0.099$$

となる.

図 20



切り取る 3 角錐の体積は,

$$v = \frac{zh}{3} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{\frac{6}{5}(7-3\sqrt{5})}}{360} \sim 0.0029$$

となる. よって体積は,

$$T'_{12} = \frac{15+7\sqrt{5}}{4} - 20v = \frac{15+7\sqrt{5}}{4} - \frac{5\sqrt{3} \sqrt{\frac{6}{5}(7-3\sqrt{5})}}{9} \sim 7.606$$

となる. B'_{12} の重心と10角形の重心とその頂点で作られる3角形, 10角形の面の重心とその頂点で作られる3角形でそれぞれうまく三平方の定理を使う.

$$m = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{5}} - (1-w) \sin \frac{\pi}{5} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} - \frac{(1-\frac{\sqrt{5}}{5})\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \right)$$

とおくと,

$$R'_{12} = \sqrt{r_{12}^2 + m} \sim 1.327$$

となる. 2面角を8角形と8角形のなす角を $\theta_{8,8}$, 3角形と8角形のなす角を $\theta_{3,8}$ とおく.

図20の $\Delta P_2Q_2R_2$ で余弦定理を利用して,

$$\cos \tau = \frac{(P_2Q_2)^2 + (Q_2R_2)^2 - (R_2P_2)^2}{2 \cdot Q_2R_2 \cdot P_2Q_2} = \frac{w}{\sqrt{3-2\sqrt{3}w}} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3-\frac{2\sqrt{15}}{5}}} \sim 0.371$$

$$\tau \sim 68.2$$

となる. よって,

$$\theta_{3,8} = \pi - \tau \sim 111.8^\circ$$

となる. $\theta_{8,8}$ は正12面体の5角形と5角形がなす角と等しいので正5角形の頂点と対辺の中点と B_{12} の重心を通る面で三平方の定理を利用して,

$$\theta_{8,8} \sim 116.6^\circ$$

となる. $\theta_{8,8}$ の導出は[11]を参考にした. r'_{12} は B_{12} の重心から8角形の重心への距離なので, r_{12} と同じ

$$\frac{\cot\left(\frac{\pi}{5}\right)}{4\sqrt{\frac{3}{4} - \cos^2\frac{\pi}{5}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}(\sqrt{5}+1)}$$

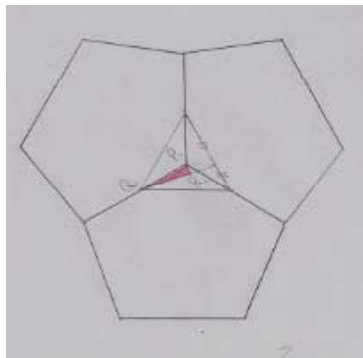
になるはずである. 図21の $\Delta P_1Q_1R_1$ で三平方の定理を利用して,

$$x = \frac{\sqrt{(R_{12}-r_{12})^2}}{\sqrt{3-4\cos^2\frac{\pi}{5}}} = \frac{2(R_{12}-r_{12})}{\sqrt{5}-1} \sim 0.806$$

となる. そのとき切り取る5角錐の1辺の長さが $x \sim 0.806$ となり同一辺上で5角錐二つ分

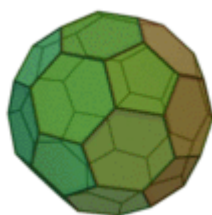
を切り取るため B_{12} の 1 辺の長さ 1 を超えてしまう ($< 0.806 + 0.806 = 1.612$). よって B'_{12} の内接球は存在しない.

図 21



ただし切り取って残る立体は切頭 20 面体になるのでこのことから切頭 20 面体には内接球があると分かる. この切頭 20 面体の諸量は次の B'_{20} の内接球がある時の諸量を参照.

●切頭 20 面体●



$$(V, E, F) = (60, 90, 32)$$

展開図

構成面 : 正 5 角形 12 枚 正 6 角形 20 枚

$$B_{12} \text{ の諸量 } \dots (r_{20}, R_{20}) = \left(\frac{\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{5}}{6\sqrt{\frac{3}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{5}}}, \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{2\sqrt{\frac{3}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{5}}} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6(\sqrt{5}-1)}, \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)} \right)$$

$$(S_{20}, T_{20}) = \left(5\sqrt{3}, \frac{5(3+\sqrt{5})}{12} \right)$$

切り取る 3 角形の面積は B'_4 の時と同様なので正 6 角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{6}$ であり, 切り取ったことによりできる新たな 5 角形の面積は,

$$z = \frac{5}{36 \tan \frac{\pi}{5}} = \frac{5\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{36(1+\sqrt{5})} \sim 0.191$$

となる. 従って表面積は,

$$S'_{20} = 10 \frac{\sqrt{3}}{3} + 12z = 10 \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{3(1+\sqrt{5})} \sim 8.067$$

となる. 図 22 の $\triangle P_1QR_1$ で三平方の定理を利用して,

$$P_1Q = h = \frac{\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1}}{6\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{6\sqrt{5-\sqrt{5}}} \sim 0.175$$

となる. 従って切り取る 5 角錐の体積は,

$$v = \frac{1}{3}zh = \frac{5\sqrt{2}}{36(1+\sqrt{5})} \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{18} \sim 0.011$$

となる. よって体積は,

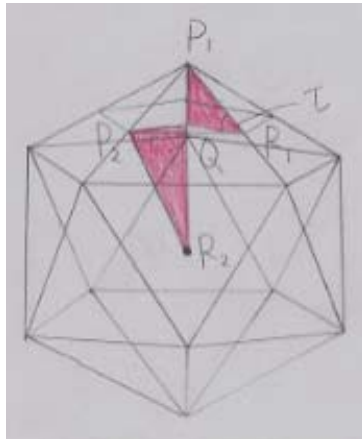
$$T'_{20} = T_{20} - 20v = T_{20} - \frac{10\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{9} \sim 1.958$$

となる. 図 22 の $\triangle P_2QR_2$ で三平方の定理を利用して

$$P_2R_2 = R'_{20} = \sqrt{(R_{20}-h)^2 + \frac{1}{36\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}} = \sqrt{(R_{20}-h)^2 + \frac{9(5-\sqrt{5})}{2}} \sim 1.016$$

となる.

図 22



2 面角を 5 角形と 6 角形のなす角を $\theta_{5,6}$, 6 角形と 6 角形のなす角を $\theta_{6,6}$ とおく.

図 23

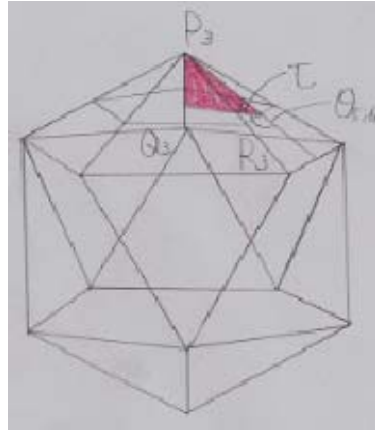


図 23 の $\Delta P_3Q_3R_3$ で余弦定理を利用して,

$$\cos \tau = \frac{(Q_3R_3)^2 + (R_3P_3)^2 - (P_3Q_3)^2}{2 \cdot Q_3R_3 \cdot R_3P_3} = \frac{\left(\frac{1}{6 \tan \frac{\pi}{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - h^2}{2 \cdot \frac{1}{6 \tan \frac{\pi}{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}} \sim 0.795,$$

$$\tau \sim 37.4^\circ$$

となる. よって,

$$\theta_{5,6} = \pi - \tau \sim 143.6^\circ$$

となる. また $\theta_{6,6}$ は,

$$\theta_{6,6} \sim 138.2^\circ$$

となる. $\theta_{6,6}$ の導出については[10]を参考にした. r'_{20} は B_{20} の重心から 8 角形の重心への距離なので, r_{20} と同じ

$$\frac{\sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{6 \sqrt{\frac{3}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{5}}} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{6(\sqrt{5} - 1)}$$

になるはずである. その時の切り取る 3 角形の 1 辺の長さは,

$$x = \frac{(R_{20} - r_{20})}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{5}}\right)^2}} = \frac{(R_{20} - r_{20})}{\sqrt{1 - \frac{2}{5 - \sqrt{5}}}} \sim 0.371$$

つまり 5 角形の 1 辺が x , それ以外の辺長が $1 - 2x$ の切頭 20 面体である. この諸量について, 表面積は,

$$S''_{20} = 5\sqrt{3}(1 - 3x^2) + \frac{15x^2}{\tan \frac{\pi}{5}} = 5\sqrt{3}(1 - 3x^2) + \frac{15x^2(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}}$$

となる. また,

$$h' = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{2\sin\frac{\pi}{5}}} = \sqrt{x^2 - \frac{2x^2}{5-\sqrt{5}}}, \quad z' = \frac{5x^2}{4\tan\frac{\pi}{5}} = \frac{5x^2(1+\sqrt{5})}{4\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

とおくと、体積は、

$$T''_{20} = T_{20} - 4z'h'$$

となる。外接球の半径は、

$$R''_{20} = \sqrt{(R_{20} - h')^2 + \frac{x^2}{2\sin^2\frac{\pi}{5}}} = \sqrt{(R_{20} - h')^2 + \frac{2x^2}{5-\sqrt{5}}}$$

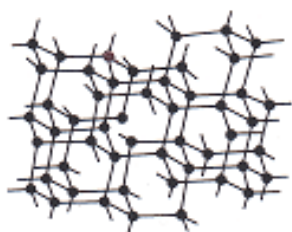
となる。2面角は B'_{20} と変わらない。

図は[8]より引用した。ただし計算過程で使った図及び切頭12面体、切頭20面体の展開図は自作である。

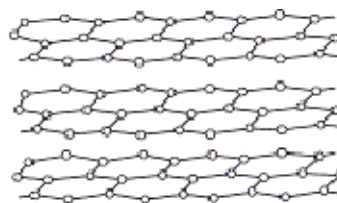
§7. フラーレン

ここで説明するフラーレンに関する記述は主に[3]と[4]を参考にした。

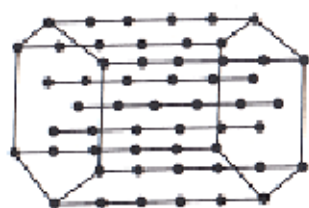
フラーレンを説明する上で大事なものは炭素である。炭素は化合物の種類が抜けて多く、無限に近い種類が人工的に合成できる。そして極めて簡単に炭素原子間の結合をつくることができる。また、炭素は直線上だけでなく、2次元面内で折れ曲がったり、3次元空間に結合の手を広げることでもでき、水素、酸素、窒素などと結合できる。



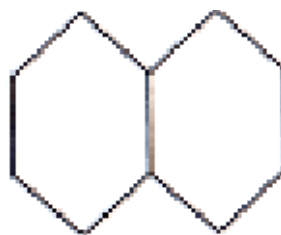
ダイヤモンド



黒鉛（グラファイト）



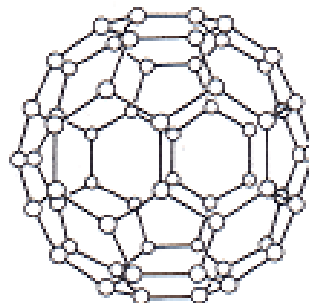
カルビン



ナフタレン



C_5



C_{60}

そしてフラーレンとは、炭素元素同素体(炭素のみからなる分子)であり他にはダイヤモンド、黒鉛(グラファイト)、カーボンナノチューブがある。結合については5員環に5個の6員環が接し、6員環に6員環3個と5員環3個が交互に接している。5員環には二重結合はなく、6員環同士が接する場所に存在する。炭素と炭素フラーレンの特筆すべきことはこれまでに発見されたフラーレンは5員環(5角形)と6員環(6角形)のみから構成されていること。そして5員環を必ず12個含むということである。図形として捉えた場合、5角形を12個含むということでありオイラーの多面体定理より証明が可能である。

定理 5. 球面が同相な多面体の各面が5角形と6角形だけで構成されていて、かつ1つの頂点には3つの面が集まるとする。このとき多面体は丁度12個の5角形を含む。

[証明] x を5角形の枚数、 y を6角形の枚数とすると、頂点、辺、面の数はそれぞれ、

$$V = \frac{5x + 6y}{3}, \quad E = \frac{5x + 6y}{2}, \quad F = x + y$$

となる。オイラーの多面体定理にそれぞれ代入して、

$$\frac{5x + 6y}{3} - \frac{5x + 6y}{2} + x + y = 2,$$

$$10x + 12y - 15x - 18y + 6x + 6y = 12,$$

$$x = 12$$

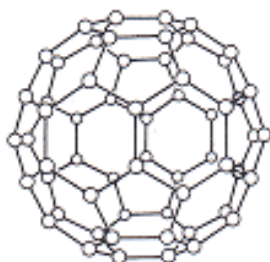
を得る。 ■

フラーレンではこの他に孤立5員環則(12個の5員環は隣接しない規則)という規則も満たす。この規則が C_{60} と C_{70} の間で安定フラーレンが存在しない理由であり、5員環が隣り合った構造ではその付近の結合のひずみが増加して構造を不安定にしてしまう。これについてはまだ理論的には理解しておらず、今後考察を行う。 C_{60} の場合5員環が隣り合う事を許せば1800種類の構造が可能だそうだが、実際には1種類しかできず、孤立5員環則がフラーレンの安定性に強い制限を与えていると言える。

最初に発見されたフラーレンは切頭20面体の頂点に炭素原子60個を配した5員環と6員環の交った構造をもつ。これは1985年、ハロルド・クロトー、リチャード・スモーリー、ロバート・カールらによって発見され3人はこの功績によってノーベル化学賞を受賞した。現在までに安定フラーレンと確認されたものは炭素数100以下のもので $C_{60}, C_{70}, C_{76}, C_{78}, C_{82}, C_{84}, C_{90}, C_{96}$ である。

以下フラーレンの諸量についての議論を行う。

●フラーレン C_{60} ●



フラーレン C_{60} は切頭 20 面体の構造を持ち、そしてそれは準正多面体の中でもかなり球に近い形である。さらに正 20 面体から 5 角錐をもう少し大きく切り取ればより球形に近づく。しかしその時には、5 角形と 6 角形の隣り合う辺(l_{56})が 6 角形と 6 角形が隣り合う辺(l_{66})より長くなり、正 6 角形でなくなるので準正多面体ではなくなる。

しかし、以下に記した[5]より引用した 5 員環と 6 員環、6 員環と 6 員環の結合の長さに関する測定データから差は僅かであり 1 辺を 1.405 とした切頭 20 面体と仮定することで諸量の近似値が求まると考えられる。

	結合の長さ(Å)		
	X 線	NMR	電子線
l_{56}	1.432	1.40	1.458
l_{66}	1.388	1.35	1.401



ここで X 線解析, NMR, 電子線解析での l_{56} をそれぞれ l_{56}^x , l_{56}^n , l_{56}^e , また l_{66} をそれぞれ l_{66}^x , l_{66}^n , l_{66}^e とおく。そして l_{56} と l_{66} の比較を行う。

$$\text{X 線} \quad l_{56}^x - l_{66}^x = 1.432 - 1.388 = 0.044$$

$$\frac{l_{56}^x}{l_{66}^x} = 96.9\%$$

$$\text{NMR} \quad l_{56}^n - l_{66}^n = 1.40 - 1.35 = 0.05$$

$$\frac{l_{56}^n}{l_{66}^n} = 96.4\%$$

電子線 $l_{56}^e - l_{66}^e = 1.458 - 1.401 = 0.057$

$$\frac{l_{56}^e}{l_{66}^e} = 96.1\%$$

結合の長さに関するどの計測方法でも l_{56}, l_{66} の差は僅かであること、また l_{56} と l_{66} のそれぞれについて計測方法での比較をしても差が僅かであることがわかる。

●フラレン C_{70} ●



$$(V, E, F) = (70, 105, 37)$$

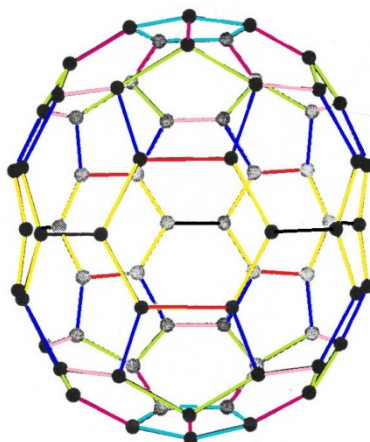
構成面：5角形 12枚 6角形 25枚

C_{60} は正5角形と正6角形であったが C_{70} は8種類もの辺長を持ち、その辺長も理論値ではなく測定値なので誤差を含む。また誤差を含めると、

$$\frac{\text{ピンク}}{\text{赤}} = \frac{1.36}{1.50} = 90.7\%$$

のように差も大きく C_{60} のときのような考え方もできない。さらに私が今まで前提としてきた凸ではなく凹であった。 $C_{76}, C_{78}, C_{82}, C_{84}, C_{90}, C_{96}$ についても同様である。そのため現時点では時間が足らず自分で諸量を導出することができない。以下に[D.A.Mckenzie, C.A.Davis, D.J.H.Cockayne, D.A.Muller, A.M.Vassallo, The structure of C_{70} molecule, NATURE VOL355, 622, 1992]に掲載されていた辺長とその誤差についてのデータを引用して載せる。なお図 18 はデータを基に C_{70} を塗り分けたものである。

図 24



	長さ(Å)	誤差
黒・・・	1.41	-0.01~+0.03
黄・・・	1.39	-0.01~+0.01
赤・・・	1.47	-0.01~+0.03
青・・・	1.46	-0.01~+0.01
ピンク・・・	1.37	-0.01~+0.01
黄緑・・・	1.47	-0.01~+0.01
赤紫・・・	1.37	-0.01~+0.03
水・・・	1.464	-0.009~+0.009

以下にフラーレン C_{60} の発見に関する論文の冒頭部分を載せておく。

① C_{60} : Buckminsterfullerene

H. W. KROTO*, J. R. HEATH, S. C. O'BRIEN, R. F. CURL & R. E. SMALLEY

Rice Quantum Institute and Departments of Chemistry and Electrical Engineering, Rice University, Houston, Texas 77251, USA

During experiments aimed at understanding the mechanisms by which long-chain carbon molecules are formed in interstellar space and circumstellar shells¹, graphite has been vaporized by laser irradiation, producing a remarkably stable cluster consisting of 60 carbon atoms. Concerning the question of what kind of 60-carbon atom structure might give rise to a superstable species, we suggest a truncated icosahedron, a polygon with 60 vertices and 32 faces, 12 of which are pentagonal and 20 hexagonal. This object is commonly encountered as

the football shown in Fig. 1. The C₆₀ molecule which results when a carbon atom is placed at each vertex of this structure has all valences satisfied by two single bonds and one double bond, has many resonance structures, and appears to be aromatic.

Nature 318, 162-163 (14 November 1985)より引用

図 1



§8. まとめ

多角形, 多面体, フラーレンについて研究してみて・・・

目標は多面体を通してフラレンの構造, 諸量について理解することであったがそれを満足に達成することができなかった. ただその中で印象的だったのは何かを研究するときに関係のない分野などはなく, また求め方がいろいろあるのだということ. 凸多面体を説明するのに幾何を, V, E, F の関係性を探るのに代数を使い, 正多面体の諸量には少し違った求め方で切り込んだ.

今回の研究での発見は4面体, 6面体と8面体, 12面体と20面体には色々な関係があるということである. その中でも切頭多面体には内接球が存在するものや内接球を存在させるには違った多面体になってしまうものがあるということは自分の中で大きな発見である. また, 研究していて, 多面体の表面積に対する体積, 正多面体のそれぞれの諸量に対する切頭多面体の諸量などの比較をすることで違った発見があるかもしれないとも感じた.

フラレンについて考え始めると, 多面体について考察したことでフラレン C_{60} , フラレン C_{70} の一部の諸量しか分からなかった. そこで関連する論文を読むことで手がかりをいろいろと見つけ, フラレンの諸量の考察には化学的な知識も必要であると感じた. これもまた冒頭の分野の壁を越えて研究する意味に繋がる.

反省としては, 最初にもう少し下調べを行って, フラレン C_{70} の模型を実際に作り諸量の見当をつけるべきであった. そうすれば凸でないともすぐに分かったはずである. これを含め今後の課題を以下に記す.

- ①等辺凸5角形, 6角形に関しての条件をもっとうまくまとめる.
- ②多面体を比較することで多面体同士の関係性をさらに深く考察する.
- ③実際に C_{70} フラレンの模型を作り諸量の見当をつける. また他の論文を読むなどしてフラレンの化学的知識を高める.
- ④孤立5員環則によって $C_{60} \sim C_{70}$ の間のフラレンが存在しないことを理論的に証明する.

§ 9. 参考文献・資料

- [1]一松 信, 正多面体を解く, 東海大学出版会, 1983
- [2]若林 知成・阿知波 洋次, 高次フラレン, 化学同人, 1983
- [3]吉田 満帆, コンピュータグラフィックで見る C_{60} とその仲間たち, 化学同人, 1983
- [4]谷垣 勝己・菊池 耕一・阿知波 洋次・入山 啓治, フラレン, 産業図書株式会社, 1982
- [5]細谷 治夫, C_{60} のかたちについて, 化学同人, 1983
- [6]H.W.KROTO, J.R.HEATH, S.C.O'BRIEN, R.F.CURL&R.E.SMALLEY , , Nature(318), 1985, 162-163
- [7]D.A.Mckenzie, C.A.Davis, D.J.HCockayne, D.A.Muller, A.M.Vassallo, The structure of C_{70} molecule, Nature(355), 1992, 622
- [8]<http://toretate.fc2web.com/bgmath/theorems/chinatu2.html>
- [9]<http://ja.m.wikipedia.org/wiki/>
- [10]http://www1.ocn.ne.jp/~km31/solid_sei20.htm
- [11]<http://m.chiebukuro.yahoo.co.jp/detail/q147966039>
- [12]http://tsuyu.cocolog-nifty.com/blog/2007/01/post_923f.html