

# 合同式で考える結び目 の不変量

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科  
西山研究室

15108002

有馬 優

# 目次

1	序論		3
2	結び目		4
2.1		結び目の定義	4
2.2		ライデマイスター移動	5
2.3		結び目の不変量	7
3	結び目の彩色数		8
3.1		彩色数の定義	8
3.2		彩色数と退化因子	15
3.3		彩色数の性質	16
3.4		様々な結び目とその退化因子	20
4	ジョーンズ多項式と彩色数		21
4.1		ジョーンズ多項式	21
4.2		樹下 - 寺阪の結び目	22
4.3		彩色数とジョーンズ多項式	23
5	今後の課題		24
6	参考文献		24
	謝辞		24

# 1 序論

私が「結び目」に興味を持った理由は、数学の知識を何か普段行う行為や現象と結び付けてみたいと考えたからである。ひもを結んだり、からまったひもをほどいたり、という行為に着目し数学的観点から結び目にアプローチする。

「結び目」とは自己交差しない空間内の閉曲線のことである。後に正確に定義するが、空間内の「輪」をイメージしていただきたい。輪というとき綺麗な円周をイメージされる方が多いと思うが、ここでいう輪は紐で出来ていると考え、ねじれていたり、一見したところほどくには難しそうな複雑な輪であっても良いとする。結び目がほどけるとは、綺麗な円周の輪に空間内で変形できることを指す。

本研究では、結び目に対し彩色数という結び目の不変量を考え、結び目のほどける、ほどけない、を考える。

結び目の不変量とは、結び目に付随した量であり、結び目を変形しても変わらない（つまり不変である）ような重要な量のことである。結び目の不変量は彩色数だけでなく他にも多数存在するが、本研究では彩色数を中心に論ずる。

彩色数とは、重み付け（色付け）付けされた結び目の射影図（結び目を平面上に投影した図）の個数のことである。結び目の射影図に色を付け、ただし各交点において条件

$$\text{(交点条件)} \quad 2x \equiv y + z \pmod{p}$$

をつけて考える。ここで、 $x, y, z$  等は法  $p$  で考えた数で色を表している。このような色付けの総数（つまり彩色数）を求めるには、交点条件を連立させ、係数行列を準簡約化し、連立一次方程式を解けばよい。

彩色数は完全なる不変量ではないが、計算が簡単で結び目が自明であるか否かを簡単に判定できる不変量である。

本研究ではさらに、交点数 11 の「樹下 - 寺阪の結び目」を彩色数・ジョーンズ多項式の 2 つの不変量で解析し、2 つの不変量の違いを考える。この「樹下 - 寺阪の結び目」は彩色数では自明な結び目かどうかは判定できないのだが、ジョーンズ多項式を用いれば自明でないことがわかる。これによって、彩色数がすべての結び目に対し不変となる完全な不変量が明らかとなる。

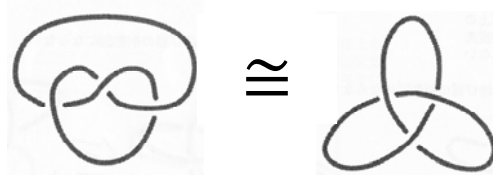
## 2 結び目

### 2.1 結び目の定義

結び目とは自己交差しない円周と同相な空間内の閉曲線のことである。以下、結び目に関する用語を箇条書きにして解説する。

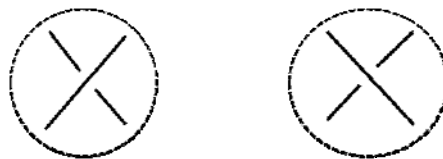
- **結び目の同値**     ・・・空間内で自分自身と交わることなく、ひもを連続的に変形することによってうつりあえる2つの結び目を**同値な結び目**と呼ぶ。図 2.1 は同値な結び目の例である。このように、結び目を空間内で切らない(自己交差しない)ように変形することを**結び目の同値変形**と呼ぶ。

図 2.1



- **ほどける結び目**     ・・・空間内における  $xy$ -平面上にある単位円周と同値となる結び目を**自明な結び目**と呼ぶ。自明な結び目とは要するに“ほどける結び目”のことである。
- **結び目の射影図**     ・・・図 2.1 のように結び目を平面上に射影した時、交点において上下が分かるように切れ目を入れた図を射影図と呼ぶ。ただし、曲線が自分自身と接していたり、交点が3点以上にならないように描く。

図 2.2

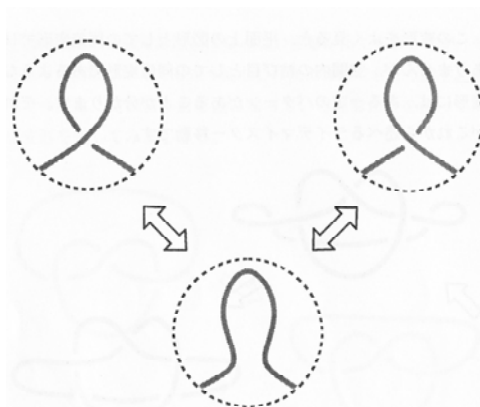


交点において局所的に見ると、射影図では図 2.2 のようになっている。

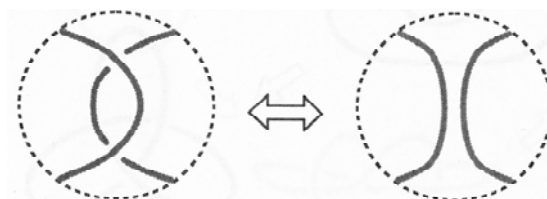
## 2.2 ライデマイスター移動

空間内の結び目を射影図に描いたとき、空間における結び目の同値変形を射影図を用いて表すと、ある一定のパターンの変形が 3 つ存在する。これらをライデマイスター移動と呼ぶ。

### ライデマイスター移動 I



### ライデマイスター移動 II



### ライデマイスター移動 III

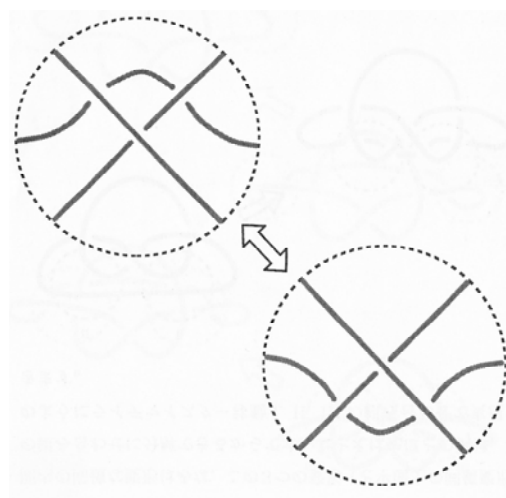
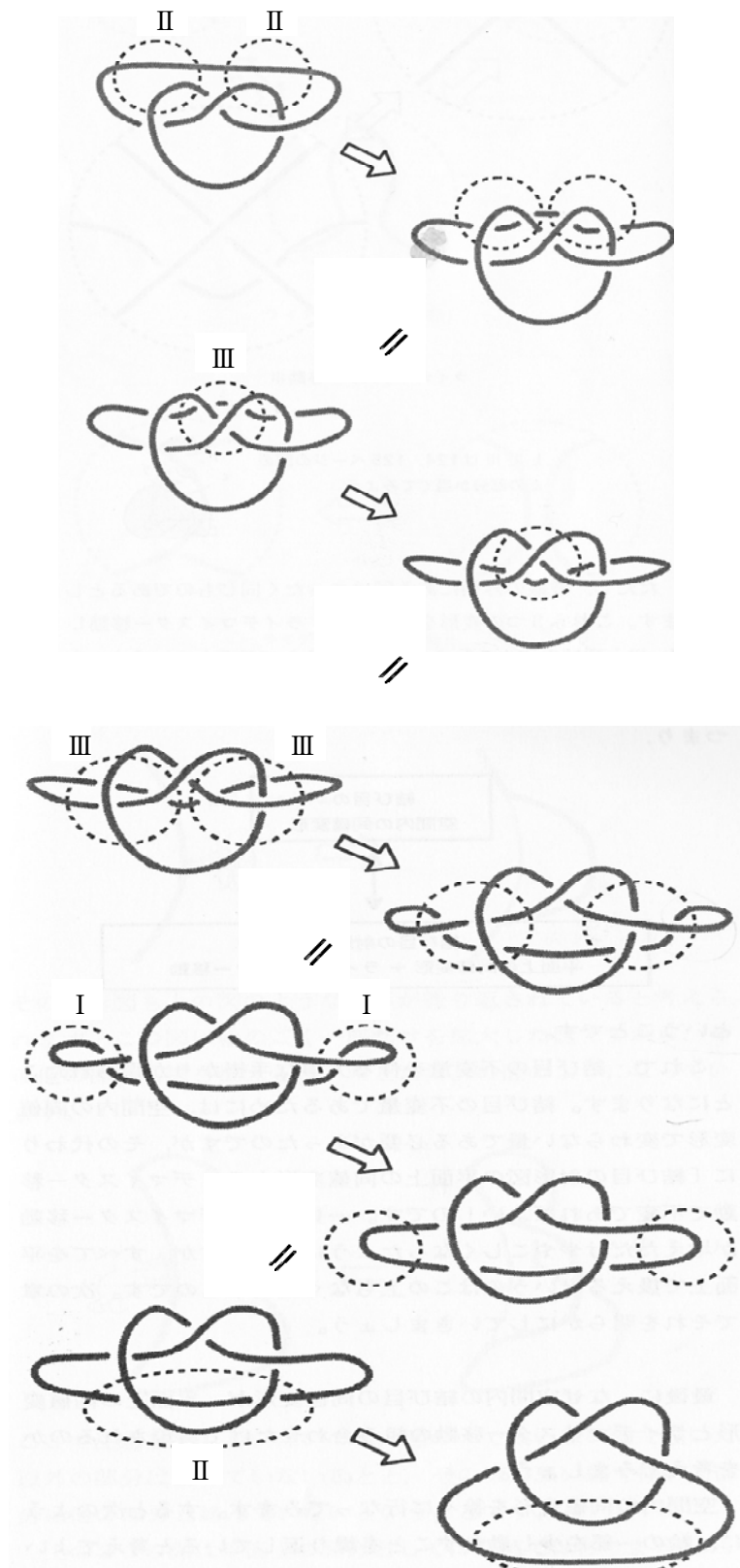


図2.1で紹介した2つの同値な結び目を実際に射影図のライデマイスター移動を用いた同値変形で移してみよう。



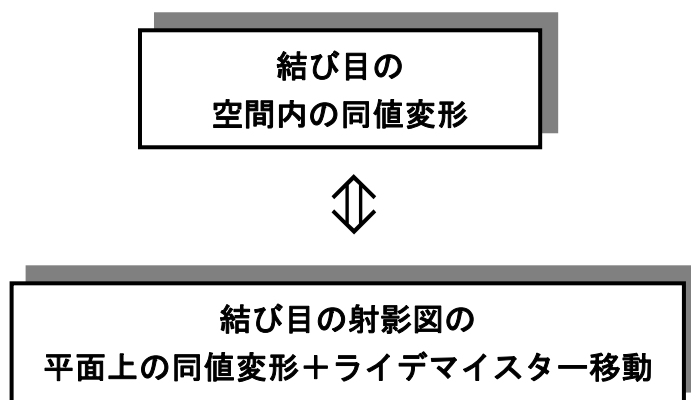
実は、空間内の同値変形はみな、射影図のライデマイスター移動と平面上の同値変形の組み合わせにより表現できる。

**定理 2.1** 2つの結び目  $K_1, K_2$  を考え、その射影図を  $D_1, D_2$  とする。

このとき、 $K_1$  が空間内の同値変形で  $K_2$  に変形できるための必要十分条件はライデマイスター移動 I, II, III と平面上の同値変形を用いて  $D_1$  が  $D_2$  に変形できることである。■

[証明] 参考文献 [4] 定理 4.1.1 参照。■

つまり、定理 2.1 は次のようにまとめることができる。



### 2.3 結び目の不変量

結び目の不変量とは、結び目に付随した量（数やベクトル、多項式など）であって、同値変形を行っても変わらない量のことを指す。不変量は結び目同士が同値かどうかを判定する手掛かりとなる重要な量である。

後に定義する彩色数、ジョーンズ多項式などは結び目の不変量である。また、ここでは定義しないが、コンウェイ多項式、バシリエフ不変量など結び目には多くの有名な不変量が存在する。（参考文献 [1] p142 及び p186 参照）

次の章で、結び目の不変量として彩色数を定義し、本題である結び目のほどける、ほどけない、を判定していく。

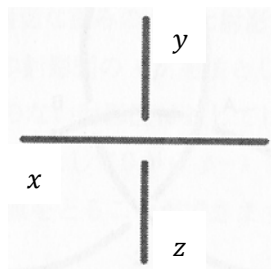
### 3 結び目の彩色数

#### 3.1 彩色数の定義

結び目がほどける、ほどけない、を調べるために重要となる結び目の彩色数を定義する。彩色数を定義する前に、いくつかの用語を説明する。

- **弧** . . . 射影図の交点の数を  $n$  とすると結び目の射影図は切れ目によって  $n$  個の曲線に分解する (ただし、 $n=0$  の時は1つ) この曲線のことを**弧**と呼ぶ。
- **重み (色)** . . . 自然数  $p$  を固定し、各弧に  $0$  から  $p-1$  までの整数のうち1つを対応させたもの。重みをつけた射影図を**重みのついた射影図**と呼ぶ。 $0$  から  $p-1$  の数が色の種類を表すと考えるとイメージが湧きやすいであろう。

1つの交点の周りに着目し、各弧に重みをつけると以下のようになる。



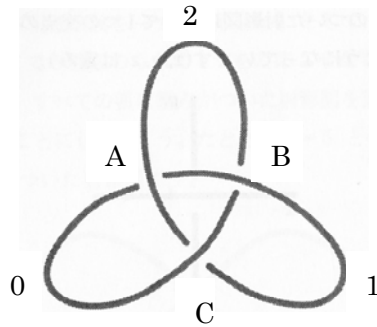
ここで重みの付け方に関して、次の条件 (交点条件) を考える。

$$\text{(交点条件)} \quad 2x \equiv y + z \pmod{p}$$

すべての交点で交点条件を満たすような重みを**適切な重み**と呼び、適切な重みのついた射影図の総数を  $p$ -**彩色数**と呼ぶ。各弧に同じ重みをつけると交点条件を満たすことは明らかであるから、 $p$ -彩色数は  $p$  以上である。しかし、結び目によっては各弧にそれぞれ違う重み付けをしても交点条件を満たすことがある。このようなとき、結び目は  $p$ -**彩色可能**と呼ばれる。



例 1



$$\text{交点 A: } 2 \times 2 \equiv 1 + 0 \pmod{3}$$

$$\text{交点 B: } 2 \times 1 \equiv 2 + 0 \pmod{3}$$

$$\text{交点 C: } 2 \times 0 \equiv 2 + 1 \pmod{3}$$

例 1 はすべての交点で交点条件を満たす結び目の重み付けの例である。この結び目の重み付けは相異なるので 3 - 彩色可能である。

自明な結び目に対しては交点が存在しないため、適切な重みとして 0 から  $p - 1$  までの任意の重みをつけるしかない。したがって、**自明な結び目の  $p$  - 彩色数は  $p$  となる。**

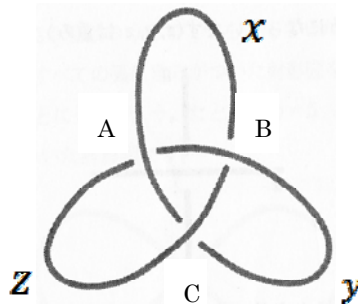
結び目の彩色数を判定するにあたって、係数行列の**準簡約化**を用いる。通常、行列 A の行の基本変形と呼ばれているのは次の 3 種類の変形である。

$$\begin{cases} \text{L1: (A の } i \text{ 行と } j \text{ 行の入れ換え)} \\ \text{L2: ( } i \text{ 行の } \lambda \neq 0 \text{ を倍)} \\ \text{L3: ( } i \text{ 行に } j \text{ 行の } \lambda \text{ 倍を加える)} \end{cases}$$

行列 A の基本変形のうち L1, L3 のみで階数行列に直すことを本論文では**準簡約化**と呼ぶ。

実際に例 1 の結び目の各弧に以下の通り重みを付けて計算してみる。

例 2



$$\text{(交点条件)} \quad \begin{cases} \text{A: } 2y \equiv x + z \pmod{p} \\ \text{B: } 2x \equiv y + z \pmod{p} \\ \text{C: } 2z \equiv x + y \pmod{p} \end{cases}$$

交点条件を連立させ、準簡約化を適用し、連立一次方程式を解く

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$p \neq 3n$  ( $n$ : 自然数) のとき連立一次方程式は

$$\begin{cases} x + y - 2z \equiv 0 & \dots \textcircled{1} \\ 3y - 3z \equiv 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

となるが  $p$  と 3 は互いに素であるから、第 2 式より  $y \equiv z \pmod{p}$  が分かる。

したがって解は

$$x \equiv y \equiv z \pmod{p}$$

ゆえに、この結び目の彩色数は  $p$  となる。

$p = 3$  のとき、②は自明な等式になり、①より解はパラメータが 2 つの一次方程式となる。

$$x \equiv -y + 2z \quad (y, z \text{ は任意})$$

$0 \leq y < 3, 0 \leq z < 3$  より、交点条件をみたま解 (射影図) の個数は 9 通りで 3-彩色可能である。

**定理 3.1** 結び目の射影図の  $p$ -彩色数は結び目の不変量である。■

[定理の証明] 以下の 2 つの変形について、変形を行う前の射影図上の適切な重みのつけかたと、変形を行った後の射影図上の適切な重みのつけ方が 1 対 1 に対応していればよい。

- 平面上の同値変形で彩色数が不変となる。
- ライデマイスター移動で彩色数が不変となる。

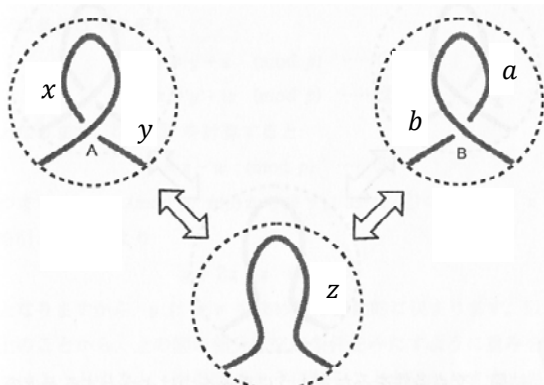
★平面上の同値変形で彩色数が不変となることの証明

平面上の同値変形では、変形の前後で結び目の交点は変化しないし、各交点をつないでいる各曲線のつながり方も同じである。ゆえに、各交点及び各弧が 1 対 1 に対応し、適切な重みのつけ方も 1 対 1 に対応しているため彩色数は不変となる。

★ライデマイスター移動 I で彩色数が不変となることの証明

図のように重みを付ける

図 3.1



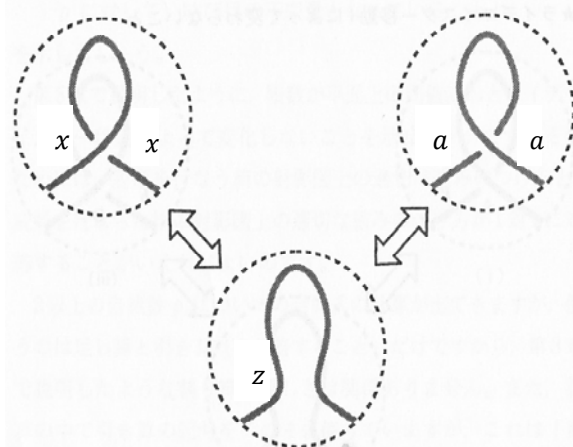
ここで交点条件を書き下すと

$$(\text{交点条件}) \quad \begin{cases} A: 2x \equiv x + y \pmod{p} \Rightarrow x \equiv y \pmod{p} \\ B: 2a \equiv a + b \pmod{p} \Rightarrow a \equiv b \pmod{p} \end{cases}$$

となり、 $x \equiv y$  及び  $a \equiv b$  であることが分かる。

したがって、交点条件を満たすように重みをつけると以下のようなになる。

図 3.2

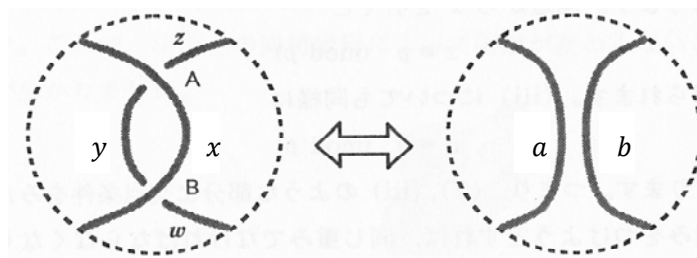


そこで、 $x = a = z$  と取ると適切な重みは 1 対 1 に対応する。したがって、彩色数は不変となる。

★ライデマイスター移動 II で彩色数が不変となることの証明

図のように重みをつける。

図 3.3



ここで交点条件を書き下すと

$$\text{(交点条件)} \quad \begin{cases} A: 2x \equiv y + z \pmod{p} \\ B: 2x \equiv y + w \pmod{p} \end{cases}$$

交点条件で得られる2つの式を連立し、行列の準簡約化を用いて連立一次方程式を解く。

$$\begin{cases} -2x + y + z \equiv 0 \\ -2x + y + w \equiv 0 \end{cases} \pmod{p}$$

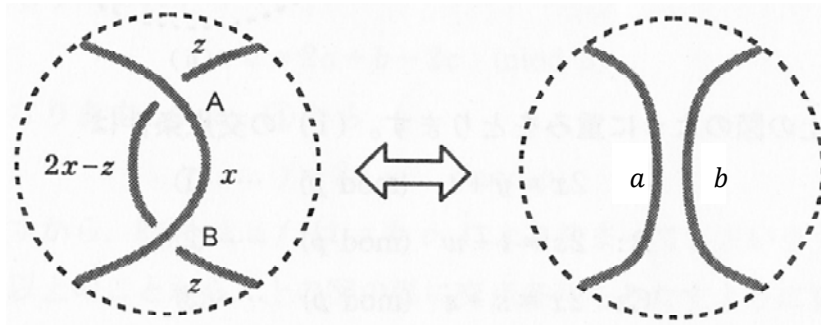
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} 2x - y - w \equiv 0 \\ z - w \equiv 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \equiv 2x - w \\ z \equiv w \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x - w \\ w \\ w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x, w \text{ は任意})$$

以上より  $y, z$  は  $x, w$  を決めれば自動的に決まる。そこで、交点条件を満たすように重みをつけると以下のようなになる。

図 3.4

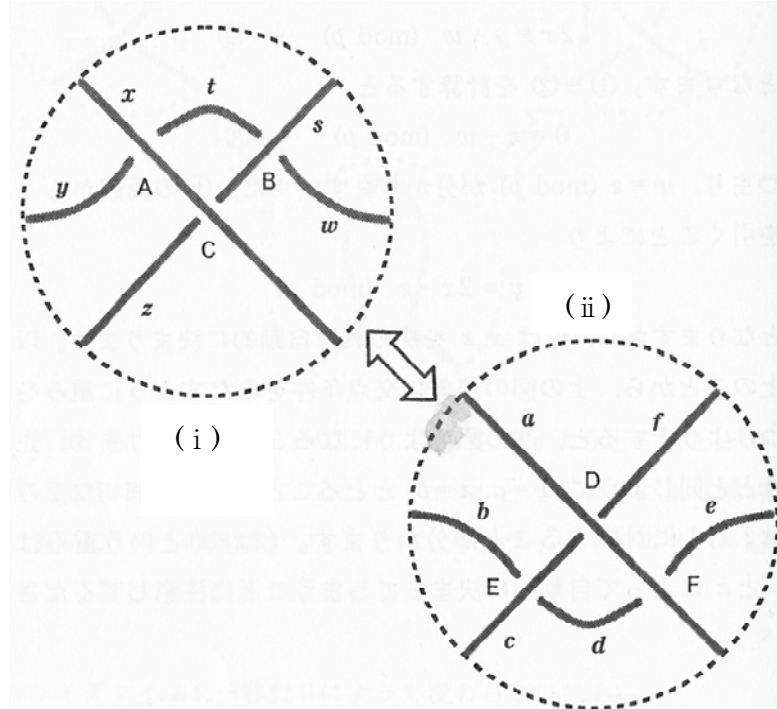


$x = a, w = b$  と取ると  $y$  と  $z$  は自動的に決まってしまうので、2つの射影図の適切な重みは1対1に対応する。したがって、彩色数は不変となる。

★ライデマイスター移動Ⅲで彩色数が不変となることの証明

図のように重みをつける。

図 3.5



(i) について

$$(\text{交点条件}) \quad \begin{cases} A: 2x \equiv y + t \pmod{p} \\ B: 2s \equiv t + w \pmod{p} \\ C: 2x \equiv s + z \pmod{p} \end{cases}$$

ライデマイスター移動Ⅱの時と同様に行列の準簡約化を用いて連立一次方程式で解く。

$$\begin{cases} -2x - z - s & \equiv 0 \\ -2s + t + w & \equiv 0 \pmod{p} \\ -2x + z + s & \equiv 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x & -z - s & \equiv 0 \\ y - z - s + t & \equiv 0 \\ 2s - t - w & \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s \equiv 2x - z \\ t \equiv -y + z + s \\ w \equiv 2s - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s \equiv 2x - z \\ t \equiv 2x - y \\ w \equiv 2x + y - 2z \end{cases}$$

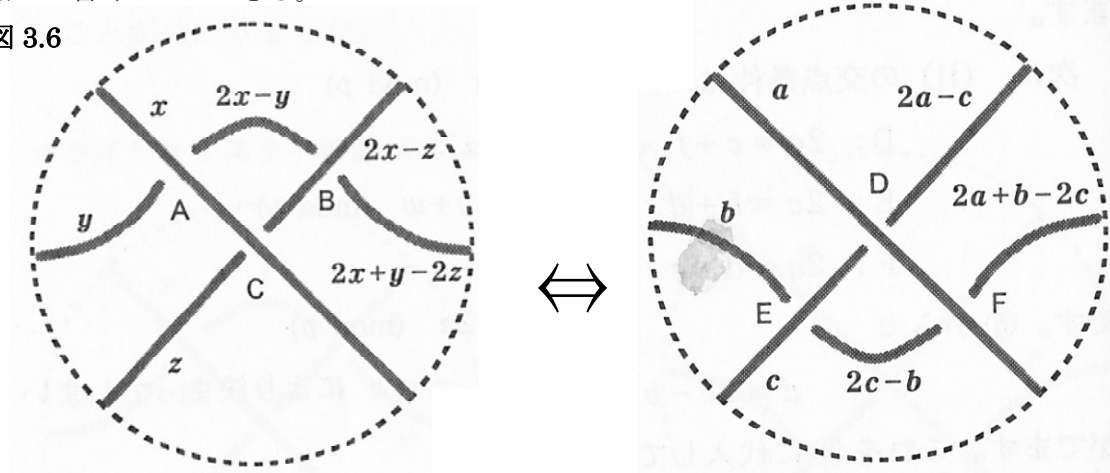
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 2x-z \\ 2x-y \\ 2x+y-2z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x, y, z \text{ は任意})$$

(ii)についても同様に計算を行う

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -b+2c \\ 2a+b-2c \\ 2a-c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (a, b, c \text{ は任意})$$

従って、交点条件を満たすように重みをつけると図 3.6 のように  $x, y, z$  及び  $a, b, c$  のみを用いて書くことができる。

図 3.6



以上より  $x = a, y = b, z = c$  と取ることにより、適切な重みは 1 対 1 に対応する。したがって、彩色数はライデマイスター移動Ⅲで不変である。

これで、平面上の同値変形とライデマイスター移動Ⅰ,Ⅱ,Ⅲによって彩色数が変化しないことが示された。よって、彩色数は結び目の不変量である。■

定理 3.1 が証明されたことにより、結び目の  $p$ -彩色数が  $p$  でなければその結び目は自明な結び目でない。つまり、結び目はほどけないということが分かる。

例 2 では  $p \neq 3n$  ( $n$ : 自然数) のとき結び目の彩色数は  $p$  であり、自明な結び目と区別はつかなかったが、 $p = 3$  のとき、交点条件を満たす解の個数 (彩色数) は 9 通りであった。つまり、例 2 における結び目は自明な結び目でない (結び目はほどけない) ことが分かった。

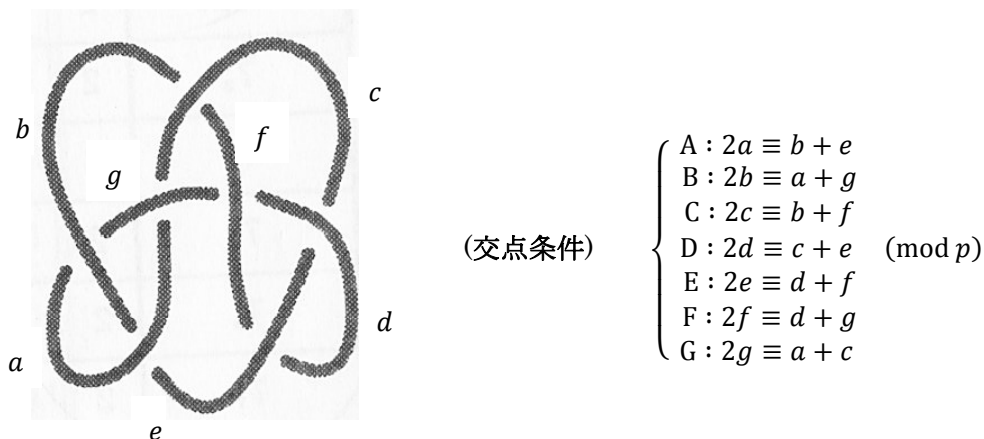
### 3.2 彩色数と退化因子

行列の零ベクトルでない行ベクトルの最初の成分を**行の主成分**という。ひとえ結びの例のように、交点数  $n$  の結び目に対して、結び目の交点条件を連立し、行列の準簡約化を用いて  $p$  を法とした連立一次方程式を解くとき、準簡約化によって得られた行列の主成分に現れる 1 と 0 を除く成分を**退化因子**と呼ぶ。ただし、主成分が 1 と 0 のみのときは退化因子を 1 とする。また、退化因子に含まれる素因数を**退化素因子**と呼ぶ。結び目  $K$  の退化因子の集合を  $D(K)$  で表す。退化因子が 1 のときは  $D(K) = \emptyset$  とする。

退化因子、退化素因子は法  $p$  で考えたとき行列の rank を減らす因子である。ゆえに、結び目の交点条件を表す連立一次方程式の係数行列を準簡約化したとき、行の主成分に退化因子（退化素因子）  $N \neq 1$  が含まれている場合、その結び目は自明でない。

ここで結び目  $7_7$  を紹介するが、結び目の記法については 3.4 (p.20) で詳しく説明する。

例 3  $7_7$



(交点条件)

$$\begin{cases} A: 2a \equiv b + e \\ B: 2b \equiv a + g \\ C: 2c \equiv b + f \\ D: 2d \equiv c + e \\ E: 2e \equiv d + f \\ F: 2f \equiv d + g \\ G: 2g \equiv a + c \end{cases} \pmod{p}$$

図のように重みをつけ、行列の準簡約化を用いて連立一次方程式を解く。

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -25 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mod 3 または mod 7 のとき解は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ -8 \\ 2 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} -7 \\ -24 \\ 9 \\ -1 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} g \quad (f, g : \text{任意})$$

退化因子は 21、退化素因子は  $D(7_7) = \{3, 7\}$  である。実際に

$$\begin{aligned} p = 3 \text{ の時} & \quad 0 \leq f < 3, 0 \leq g < 3 \text{ より彩色数は } 3 \times 3 = 9 = 3^2 \\ p = 7 \text{ の時} & \quad 0 \leq f < 7, 0 \leq g < 7 \text{ より彩色数は } 7 \times 7 = 49 = 7^2 \end{aligned}$$

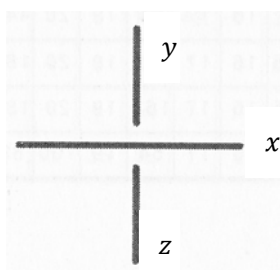
従って、この結び目は自明でないことが分かる。

### 3.3 彩色数の性質と結び目の合成

結び目の彩色数が満たす基本的な性質を紹介しよう。

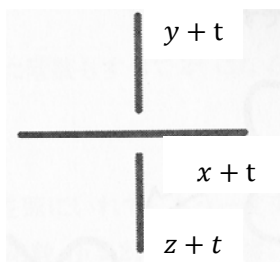
**定理 3.2**  $p$  を法とした彩色数は必ず  $p$  で割り切れる。■

[証明]



$$\text{(交点条件)} \quad 2x \equiv y + z \pmod{p}$$

各弧の重みに  $t$  ( $0 \leq t \leq p-1$ ) を加える。



$$\begin{aligned} 2(x+t) & \equiv (y+t) + (z+t) \pmod{p} \\ \Rightarrow 2x + 2t & \equiv y + z + 2t \pmod{p} \\ 2x & \equiv y + z \pmod{p} \end{aligned}$$

$t$  の選び方は  $0$  から  $t-1$  までの  $p$  通りあるので、適切な重みが  $1$  つ得られれば、 $p$  個の適切な重みが得られる。よって彩色数は  $p$  の倍数となる。■



**定理 3.3** 2 を法とした彩色数はつねに 2 である。■

[証明] 2 を法とした時の交点条件は

$$\begin{aligned} 2x &\equiv y + z \pmod{2} \\ \Rightarrow 0 &\equiv y + z \pmod{2} \\ \Rightarrow y &\equiv z \pmod{2} \end{aligned}$$

これは、交点の下を通る弧の重みは 2 を法として合同でなければならないということを表している。ひとつの弧に重みをつければその隣の弧も同じ重みとなり、次々と弧の重みは等しくなっていく。

ゆえに、すべての弧の重みは等しくなる。弧の重みの選び方は 2 を法としているため、0 か 1 の 2 通り。したがって、2 を法とした時の彩色数はつねに 2 である。■

ここで、結び目の合成について説明する。

図 3.7

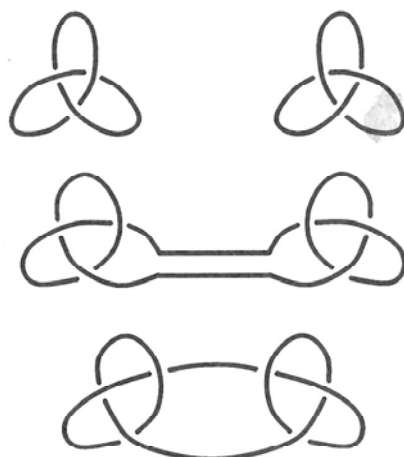


図 3.7 のように、2 つの結び目をつなぎ合わせるにより、新しい結び目を作ることができる。このような操作を結び目の**合成**と呼ぶ。合成の逆の操作を**分解**と呼ぶ。

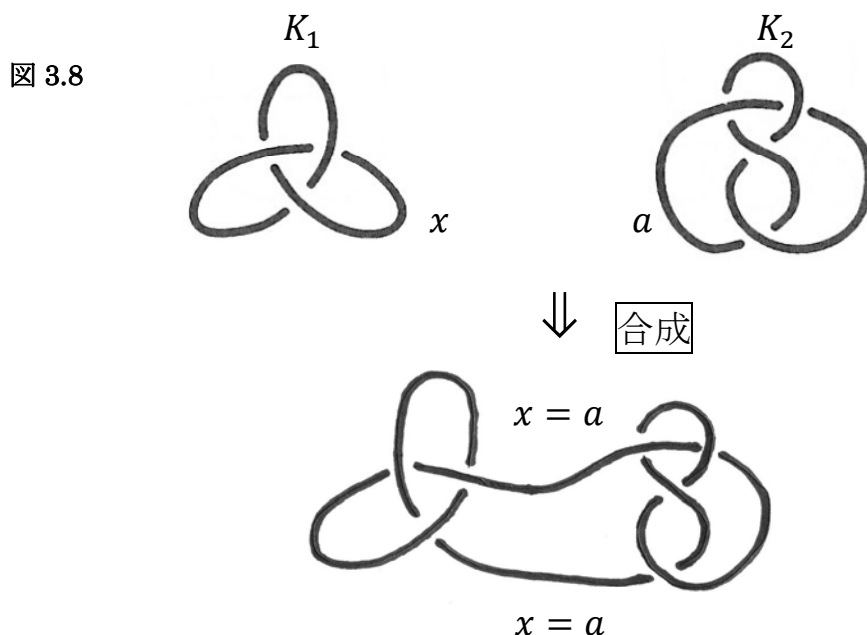
また、結び目  $K_1$  と結び目  $K_2$  を合成した結び目を  $K_1 \# K_2$  と表す。

**定理 3.4** 結び目  $K_1$  (退化素因子  $D(K_1)$ ) と結び目  $K_2$  (退化素因子  $D(K_2)$ ) を合成した結び目  $K_1 \# K_2$  の退化素因子は

$$D(K_1) \cup D(K_2) \subset D(K_1 \# K_2)$$

を満たす ■

[定理の証明] 図 3.8 のように結び目  $K_1$  の弧のうち  $K_2$  と合成する際に  $K_2$  とつながる弧の重みを  $x$  とする。同様に  $K_2$  側の弧の重みを  $a$  とする。

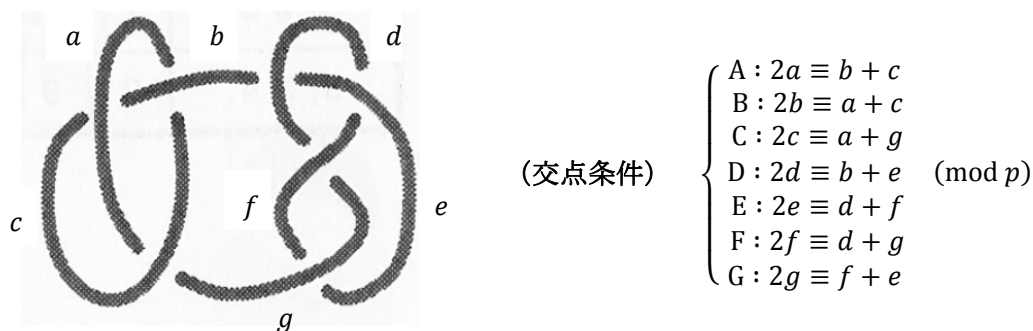


$K_1$  の  $p_1$ -彩色数を  $m_1 = p_1 \cdot m_1'$  とする。  $p_1 \in D(K_1)$  なので、  $m_1' \geq 2$  であることに注意しよう。また、  $K_2$  の  $p_1$ -彩色数を  $m_2 = p_1 \cdot m_2'$  とする。そこで、  $K_1$  の彩色に従って  $x$  を決め、  $x = a$  として  $K_2$  を彩色する。このとき、  $a$  は決められているから、  $K_2$  の彩色数の自由度は  $p_1$  だけ減ることになる。したがって

$$(K_1 \# K_2 \text{ の彩色数}) \geq \frac{m_1 \cdot m_2}{p_1} = \frac{p_1 m_1' \cdot p_1 m_2'}{p_1} = p_1 m_1' m_2' > p_1 \quad (*)$$

が分かる。これは  $p_1$  が  $K_1 \# K_2$  の退化素因子であることを意味している。 ■

例 4  $3_1 \# 4_1$



図のように重みをつけ、交点条件を連立させ、係数行列として並べる。

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

準簡約化すると以下の行列になる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列から分かるように合成した結び目 $3_1\#4_1$ の退化因子は**3**と**5**である。これは結び目 $3_1$ の退化因子**3**と結び目 $4_1$ の退化因子**5**を確かに含んでいる。

結び目 $3_1\#4_1$ を実際に  $\text{mod } 3$ ,  $\text{mod } 5$  で順序立てて重み付けしていくと、 $\text{mod } 3$  のとき、 $3_1$ の彩色数は9（自明な結び目でない）、 $4_1$ の彩色数は3（自明な結び目）であるため、合成した際に結び目 $3_1$ の退化因子を含むこととなる。ゆえに、結び目 $3_1\#4_1$ は自明な結び目でないことが分かる。 $\text{mod } 5$  に関しても同様である。したがって、合成した結び目は合成される結び目の退化因子を含む。















#### 例5 $6_1\#3_1$

$6_1$ の退化因子は9、 $3_1$ の退化因子は3で、 $6_1\#3_1$ の退化因子は9, 3となる。彩色数は $\text{mod } 3$  で考えたとき、27となって不等式(\*)において等号が成り立っていないことが分かる。

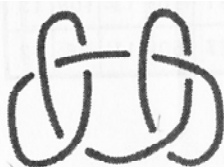

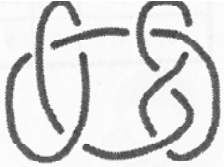
### 3.4 様々な結び目とその彩色数

本研究で取り扱ってきた結び目とその退化因子を参考に載せる。合成した結び目を分解したとき、一方の結び目が必ず自明な結び目となるとき、これを**素な結び目**と呼ぶ。結び目の射影図のうち、交点数が最も少なくなるものを考え、その交点数を**最小交点数**と呼ぶ。表1は最小交点数が7までの素な結び目とその退化因子である。また、この表に出てくる $\bar{3}_1$ とは結び目 $3_1$ を鏡映した結び目を表している。

表 1

結び目	退化因子
	3
	3
	5
	7
	9
	11
	13
	7
	11
	13
	15
	17
	19
	21
$3_1 \# 3_1$	3
$3_1 \# \bar{3}_1$	3
$3_1 \# 4_1$	3, 5

	$3_1 \# 3_1$
	$3_1 \# \bar{3}_1$
	$3_1 \# 4_1$

## 4 ジョーンズ多項式と彩色数

### 4.1 ジョーンズ多項式

ジョーンズ多項式とは向きづけられた結び目 (絡み目) に対して定義されるローラン多項式による不変量である。参考として結び目 $3_1$ から $7_7$ までのジョーンズ多項式を載せる。(参考文献 [1] p.71)

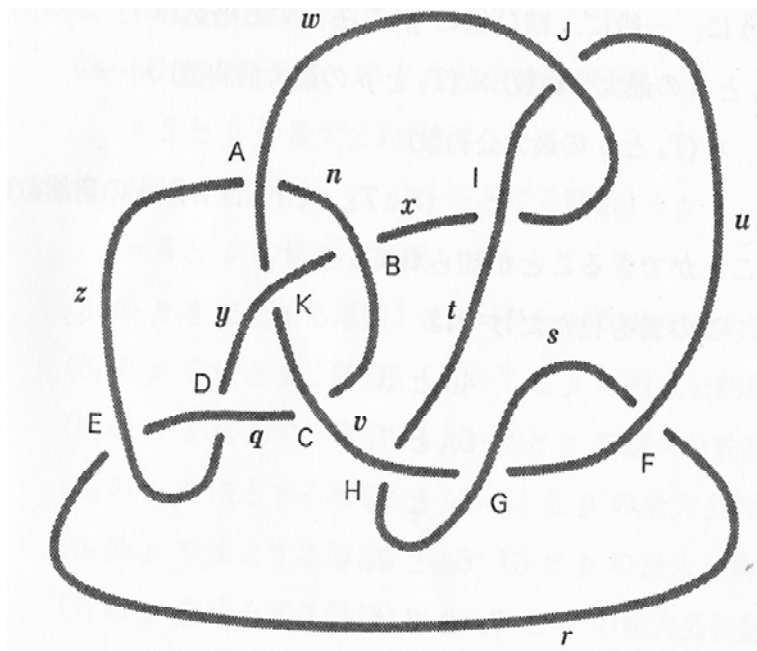
$$\begin{aligned} 3_1 & t(1+t^2-t^3) \\ 4_1 & t^{-2}(1-t+t^2-t^3+t^4) \\ 5_1 & t^2(1+t^2-t^3+t^4-t^5) \\ 5_2 & t(1-t+2t^2-t^3+t^4-t^5) \\ 6_1 & t^{-2}(1-t+2t^2-2t^3+t^4-t^5+t^6) \\ 6_2 & t^{-1}(1-t+2t^2-2t^3+2t^4-2t^5+t^6) \\ 6_3 & t^{-3}(-1+2t-2t^2+3t^3-2t^4+2t^5-t^6) \\ 7_1 & t^3(1+t^2-t^3+t^4-t^5+t^6-t^7) \\ 7_2 & t(1-t+2t^2-2t^3+2t^4-t^5+t^6-t^7) \\ 7_3 & t^2(1-t+2t^2-2t^3+3t^4-2t^5+t^6-t^7) \\ 7_4 & t(1-2t+3t^2-2t^3+3t^4-2t^5+t^6-t^7) \\ 7_5 & t^2(1-t+3t^2-3t^3+3t^4-3t^5+2t^6-t^7) \\ 7_6 & t^{-1}(1-2t+3t^2-3t^3+4t^4-3t^5+2t^6-t^7) \\ 7_7 & t^{-3}(-1+3t-3t^2+4t^3-4t^4+3t^5-2t^6+t^7) \end{aligned}$$

自明な結び目のジョーンズ多項式は1である。現在までジョーンズ多項式1となる自明でない結び目は発見されていない。もしそういう結び目が存在しないことが証明されれば、少なくともジョーンズ多項式は結び目が自明かどうかを決定することのできる完全な不変量となる。(参考文献 [1] p65~p76 参照)

ジョーンズ多項式については、同研究室 永島真の卒業論文を参照してもらいたい。

## 4.2 樹下 - 寺阪の結び目

次の図は、交点数 11 の樹下 - 寺阪の結び目として有名な例である。この結び目に対し 2 種類の不変量つまり彩色数、ジョーンズ多項式を用いて考える。



交点条件

- A:  $2w \equiv n + z$
- B:  $2n \equiv x + y$
- C:  $2v \equiv n + q$
- D:  $2q \equiv y + z$
- E:  $2z \equiv q + r$
- F:  $2u \equiv r + z$
- G:  $2s \equiv u + v$
- H:  $2v \equiv s + t$
- I:  $2t \equiv x + w$
- J:  $2w \equiv t + u$
- K:  $2y \equiv v + w$

行列の準簡約化を用いて、連立一次方程式で解く

$$\begin{pmatrix}
 -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
 -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

連立一次方程式の解は

$$n = q = r = s = t = u = v = w = x = y = z \pmod{p}$$

したがって、この結び目の彩色数は  $p$  である。これは**自明な結び目**の彩色数と等しく、彩色数ではこの結び目が自明かどうか判定できない。しかし、この結び目はどうにもほどけそうにもない。そこで**ジョーンズ多項式**を用いて不変量を調べてみよう。

樹下 - 寺阪の結び目のジョーンズ多項式を  $V_L$  とすると次の結果が得られた。(詳細は同研究室 永島真の卒業論文参照)

$$V_L = t^{-6}(1 - 2t + 2t^2 - 2t^3 + t^4 + 2t^7 - 2t^8 + 2t^9 - t^{10})$$

これは自明な結び目のジョーンズ多項式 1 と等しくない。ゆえに、樹下 - 寺阪の結び目は**自明な結び目でない**ことがジョーンズ多項式を用いると分かる。

樹下 - 寺阪の結び目に対し、彩色数、ジョーンズ多項式の 2 つの不変量を用いてアプローチすることにより、**彩色数は完全なる不変量でない**ことが明らかとなった。

#### 4.3 退化因子とジョーンズ多項式

結び目の退化因子と  $t = -1$  におけるジョーンズ多項式の値  $V_L(-1)$  の表をあげる。

結び目	$3_1$	$4_1$	$5_1$	$5_2$	$6_1$	$6_2$	$6_3$	$7_1$	$7_2$	$7_3$	$7_4$	$7_5$	$7_6$	$7_7$
退化因子	3	5	5	7	9	11	13	7	11	13	15	17	19	21
$V_L(-1)$	-3	5	5	-7	9	-11	13	-7	-11	13	-15	17	19	-21

結び目	$3_1\#3_1$	$3_1\#\bar{3}_1$	$3_1\#4_1$
退化因子	3	3	3, 5
$V_L(-1)$	3	3	15

表から分かるように、結び目の退化因子の積と  $t = -1$  におけるジョーンズ多項式の絶対値は等しくなっている。このことは証明することができなかつたし、文献を調べてもそのような結果を見つけることができなかった。そこでこれを予想としてここに書いておくことにする。

**予想** 結び目(絡み目)  $L$  の退化素因子を  $p$  とすると  $p$  は  $V_L(-1)$  の素因子である。■

## 5 今後の課題

卒業研究において、いろいろ考えてみたが時間不足のために成し遂げられなかった事や将来の課題についてここにまとめる。

1. 定理 3.4 によって、合成した結び目の退化素因子は合成される結び目の退化素因子を引き継ぐことは明らかとなった。しかし  $K_1, K_2$  を結び目とするとき合成した結び目  $K_1 \# K_2$  の彩色数を具体的に計算したり、公式として与えることができなかった。

2. 第 4 章で彩色数、ジョーンズ多項式の 2 つの不変量で「樹下 - 寺阪の結び目」にアプローチをしたが、彩色数ではこの結び目に対し自明か否かの判定ができなかった。これについての明確な理由、さらには退化因子と  $t = -1$  におけるジョーンズ多項式との関係の予想についても証明ができずに研究を終えたことを非常に残念に思う。

今後の課題として、本論文で明らかにすることができなかったこれらの証明を考えていくとともに、まだまだ多数存在するであろう、不変量のあらゆる関係性を発見していきたいと思う。

## 6 参考文献

- [1] 河野 俊丈 : 『組みひもの数理』 遊星社, 2009.
- [2] 鈴木 晋一 : 『結び目理論入門』 サイエンス社, 1991.
- [3] 村上 斉 : 『結び目のはなし』 遊星社, 2000.
- [4] 村杉 邦男 : 『結び目理論とその応用』 日本評論社, 1993.
- [5] 長谷川 浩司 : 『線型代数』 日本評論社, 2004.

## 謝辞

本研究を行うにあたり西山享教授に大変お世話になりました。良い卒業論文を作成するために多忙のなか何度も添削をしていただきとても感謝しています。私が、研究テーマを広げる際に困っている時にも様々なヒントを与えてくださり、より良い研究へと導いてくれました。西山教授をはじめ西山研究室の加藤春平、筒井慧、永島真の皆さんには大変お世話になりました。本当にありがとうございました。