フランクリン対応を用いた分割恒等式の証明

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科

西山研究室

15107023　緒方　孝茂

2011 年 2 月 22 日

目次

1　はじめに

4 という整数は

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

と表せる。このように、ある非負整数を自然数の和に書き表す方法のことを整数の分割といい、その方法の総数を分割数という。たとえば 4 の分割数は 5 である。また、和因子にある条件をつけた分割の個数と別の条件をつけた分割の個数の間に成り立つ等式を分割恒等式という。

整数の分割の研究はオイラーをはじめ、ルジャンドル、ラマヌジャンなど多くの数学者を魅了してきた。現在ではこの分野は数学の興味深い研究対象としてだけではなく、統計力学 (Maxwell-Boltzmann 統計、Bose-Einstein 統計、Fermi-Dirac 統計) などの物理学で実際の問題を解決するのにも用いられているということである。

この論文では、まずオイラーの五角数定理を整数の分割の概念を用いて分割恒等式として言い換え、全単射による証明を紹介する。この証明はフランクリン (Fabian Franklin,1881) によって発見されたもので、この証明の中で用いられる対応を「フランクリン対応」と呼んでいる。そしてその証明のアルゴリズムを一部変更することによって、私が発見した新しい恒等式を導く。その恒等式とは以下のものである。

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}\\ &= \sum_{k,l,m\in\mathbf{Z}_{\geq 0}} (-1)^{l+m} q^{(l+m+2)(l+2m+3)+(m+1)(k+1)} \begin{bmatrix} k+l \\ l \end{bmatrix}_q\end{aligned}$$

先行研究は私が知っているものでは論文 [5] にて「和因子は相異なる偶数個で値は m 以上」を満たす分割と「和因子は相異なる奇数個で値は m 以上」を満たす分割にフランクリン対応を拡張し全単射を構成することによって以下の等式を証明している。

$$\prod_{n>m}(1-q^n) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix}_q q^{\frac{3n^2+n}{2}+nm}(1-q^{2n+m+1})$$

2　整数の分割

2.1　整数の分割

ある非負整数 n を何個かの自然数の和に表す方法を n の**分割**という。たとえば $n = 4$ とすると、4 は

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

と 5 通りに表せる。これに対応して、4 の分割

$$(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1) \tag{1}$$

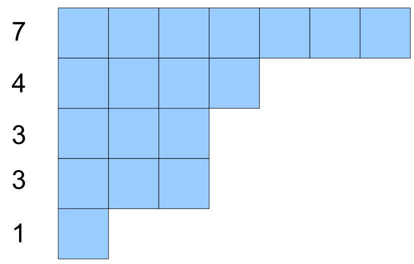


図 1　$\lambda=(7,4,3,3,1)$ **のヤング図形**

が定まる。成分の順番が違っても同じものだとみなす。分割の成分は大きい順に書き表すことが多いので本論文でもそのように書くことにする。また、分割は必要に応じて

$$(4),(3,1),(2^2),(2,1^2),(1^4)$$

とも表す。

一般に、自然数の広義減少列

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)\quad(\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_l>0)$$

を分割といい、その成分 λ_i を**和因子**とよぶ。和因子の総和を $|\lambda|=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i$ で表す。$|\lambda|=n$ のときが n の分割である。また、l を λ の**長さ**といい、$l(\lambda)$ で表す。n のすべての分割の集合を $\mathcal{P}_n$ と書く。

分割を考えるときには和因子に条件をつけたものを考えることも多い。たとえば 4 の分割で、和因子がすべて奇数の分割は $(3,1),(1^4)$ である。

2.2　ヤング図形

分割は図形的に考えるとわかりやすくなることがよくある。分割を視覚的に考えるために、次のような図形 (**ヤング図形**という) を用いることがある。分割 λ に対応するヤング図形は、上から 1 行目に λ_1 個の箱をおき、上から 2 行目に λ_2 個の箱をおき、同じように 3 行目、4 行目、$\cdots$、l 行目に箱をおくことによって得られる。こうして得られたヤング図形は分割と一対一に対応する。

また、分割 λ に対応するヤング図形の行と列を転置することにより得られる分割を、元の分割の**共役な分割**といい、${}^t\lambda$ と表す。λ の共役な分割が λ 自身となるとき、つまり ${}^t\lambda=\lambda$ を満たすとき、λ は**自己共役**であるという。

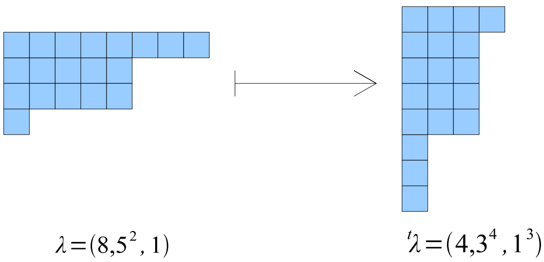


図 2　共役な分割の例

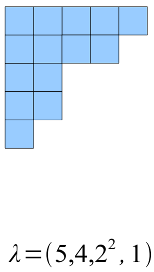


図 3　自己共役な分割の例

2.3　分割数

n の分割の個数 $p(n)$ を n の**分割数**という。$p(n)=|\mathcal{P}_n|$ である。ここで $|A|$ は集合 A の濃度を表す。整数 0 の分割は空の分割 ϕ が一つあると考え $p(0)=1$ と約束する。和因子に条件をつけた n の分割の個数は $p(n|$ 条件 $)$ と書く。たとえば式 (1) より 4 の分割は 5 コあるから $p(4)=5$ である。また 4 の分割で和因子が奇数のものは $(3,1),(1,1,1,1)$ の 2 つだから $p(4|$ 和因子は奇数 $)=2$ である。

$p_{odd}(n):=p(n|$ 和因子は奇数 $)$ とおくと、$n=15$ までの $p(n)$ と $p_{odd}(n)$ は以下のとおりである。

表 1　$n=10$ **までの** $p(n)$ **と** $p_{odd}(n)$ **の値**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	$\cdots$
$p_{odd}(n)$	1	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	$\cdots$

2.4　分割数の母関数

ある数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を係数にもつ形式冪級数を $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**母関数**という。式で書くと、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{2}$$

となる。分割数の母関数は、以下のような無限乗積表示を持つ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} \tag{3}$$

なぜならば、

$$
\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n} &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{1\cdot n}+q^{2\cdot n}+q^{3\cdot n}+\cdots) \qquad\qquad (\because \text{無限等比級数の和の公式})\\
&= (1+q^{1\cdot 3}+q^{2\cdot 3}+q^{3\cdot 3}+\cdots)(1+q^{1\cdot 2}+q^{2\cdot 2}+q^{3\cdot 2}+\cdots)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times(1+q^{1\cdot 1}+q^{2\cdot 1}+q^{3\cdot 1}+\cdots)\cdots\\
&= \sum_{m_1=0}^{\infty}q^{m_1\cdot 1}\sum_{m_2=0}^{\infty}q^{m_2\cdot 2}\sum_{m_3=0}^{\infty}q^{m_3\cdot 3}\cdots\\
&= \sum_{m_1,m_2,m_3\cdots\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} q^{m_1\cdot 1+m_2\cdot 2+m_3\cdot 3+\cdots} \qquad (4)\\
&= q^0+q^{1\cdot 1}+(q^{1\cdot 2}+q^{2\cdot 1})+(q^{1\cdot 3}+q^{1\cdot 1+1\cdot 2}+q^{3\cdot 1})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +(q^{1\cdot 4}+q^{1\cdot 3+1\cdot 1}+q^{2\cdot 2}+q^{1\cdot 2+2\cdot 1}+q^{4\cdot 1})+\cdots\\
&= p(0)+p(1)q+p(2)q^2+p(3)q^3+p(4)q^4+\cdots\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n
\end{aligned}
$$

となるからである。

2.5 分割恒等式

和因子にある条件をつけた分割の個数と別の条件をつけた分割の個数の間に成り立つ等式を**分割恒等式**という。ここでは最も有名な分割恒等式のひとつであるオイラーの分割恒等式を例に挙げておく。

定理 1. (オイラーの分割恒等式)

$$p(n|\ \text{和因子は相異なる}\ ) = p(n|\ \text{和因子は奇数}\ )$$

$\mathcal{D}_n := (n$ の相異なる和因子を持つ分割の集合)、$\mathcal{O}_n := (n$ の奇数和因子を持つ分割の集合) とし、

$q(n) := |\mathcal{D}_n|$、$p_{odd}(n) := |\mathcal{O}_n|$ とおくと、オイラーの分割恒等式はすべての非負整数 n について、$q(n) = p_{odd}(n)$ を主張する。たとえば $n = 5$ のとき、

$$\mathcal{D}_5 = \{(5),(4,1),(3,2)\} \qquad \mathcal{O}_5 = \{(5),(3,1,1),(1,1,1,1,1)\}$$

だから、$q(5) = p_{odd}(5) = 3$ である。

証明(定理 1) $q(n)$ と $p_{odd}(n)$ の母関数は以下のように書ける。

$$\sum_{n=0}^{\infty}q(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k) \qquad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_{odd}(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2k-1}} \qquad (6)$$

なぜならば、分割の母関数と同様に、

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k) &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots \\ &= \sum_{m_1,m_2,m_3,\dots\in\{0,1\}} q^{m_1\cdot 1+m_2\cdot 2+m_3\cdot 3+\cdots} \\ &= q^0+q^1+q^2+(q^3+q^{2+1})+(q^4+q^{3+1})+\cdots \\ &= q(0)+q(1)q+q(2)q^2+q(3)q^3+q(4)q^4+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q(n)q^n\end{aligned}$$

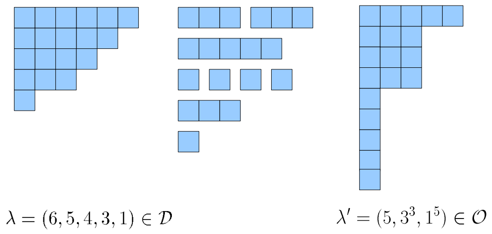
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2k-1}} &= (1+q^{1\cdot 1}+q^{2\cdot 1}+q^{3\cdot 1}+\cdots)(1+q^{1\cdot 3}+q^{2\cdot 3}+q^{3\cdot 3}+\cdots) \\ &\qquad\times(1+q^{1\cdot 5}+q^{2\cdot 5}+q^{3\cdot 5}+\cdots) \\ &= \sum_{m_1,m_3,m_5,\dots\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} q^{m_1\cdot 1+m_3\cdot 3+m_5\cdot 5+\cdots} \\ &= q^0+q^{1\cdot 1}+q^{2\cdot 1}+(q^{3\cdot 1}+q^{1\cdot 3})+(q^{1\cdot 1+1\cdot 3}+q^{4\cdot 1})+\cdots \\ &= p_{odd}(0)+p_{odd}(1)q+p_{odd}(2)q^2+p_{odd}(3)q^3+p_{odd}(4)q^4+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{odd}(n)q^n\end{aligned}$$

となるからである。そして、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} q(n)q^n &= \prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+q^k)(1-q^k)}{1-q^k} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^{2k}}{1-q^k} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2k-1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{odd}(n)q^n\end{aligned}$$

であるので、$q(n) = p_{odd}(n)$ が示された。 //

この定理の上の証明は母関数を用いて行ったが、n の相異なる分割全体の集合 $\mathcal{D}_n$ と n の奇数による分割全体の集合 $\mathcal{O}_n$ の間に全単射を構成することによっても証明をすることができる。



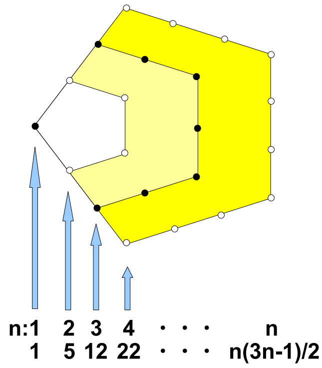


図 4　グレイシャー対応の例　　**図 5　5 角数**

$\lambda \in \mathcal{D}_n$ と $\lambda' \in \mathcal{O}_n$ を対応させる以下の操作は「グレイシャー (Glaisher) 対応」とよばれている (図 4 参照)。対応 $\mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n$ は次のようにして得られる。

$\lambda \in \mathcal{D}_n$ に偶数和因子があるとき、その偶数和因子を奇数になるまで二等分する。この操作を偶数和因子すべてに行う。こうすることで $\lambda' \in \mathcal{O}_n$ が得られる。逆に $\lambda' \in \mathcal{O}_n$ に対しての対応 $\mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{D}_n$ を得るには λ' が持つ同じ値の和因子 2 つを同じ値の和因子がなくなるまで結合する。この操作を行うことで $\lambda \in \mathcal{D}_n$ が得られる。これで証明は終わりである。

3　オイラーの五角数定理

前節では整数の分割を論じるために必要な記号を定義し、また分割恒等式の例を紹介した。この節ではオイラーの五角数定理のフランクリン対応を用いた証明を紹介する。そして次節ではその証明の一般化を論じる。

3.1　オイラーの五角数定理

以下の定理はオイラーが発見したものであり、整数の分割とも深い関係がある。

定理 2. オイラーの 5 角数定理

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} \tag{7}$$

右辺の q のベキは $m \geq 0$ のときには「5 角数」である。右辺には 5 角数のベキをもつ項のみ現れ、5 角数以外のベキを持つ項は現れない。5 角数とは、5 角形の形に点を図 5 のように並べたとき、図に含まれる点の総数にあたる整数である。(6) 式の右辺を変形することによって、

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m (q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}}) \tag{8}$$

となる。(6) 式の左辺を展開すると

$$\begin{aligned}(6)\ \text{式左辺} &= (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots \\ &= 1-q+q^{2+1}-q^3+q^{3+1}+q^{3+2}-q^{3+2+1}+\cdots \\ &= 1+(q^{2+1}+q^{3+1}+q^{3+2}+\cdots)-(q+q^2+q^3+q^{3+2+1}+\cdots)\end{aligned}$$

となり、相異なる偶数個の和因子をもつ分割がベキに現れる項に正、相異なる奇数個の和因子をもつ分割がベキに現れる項に負の符号がつく。よって、

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n^{even} &:= n\ \text{の相異なる偶数個の和因子への分割すべての集合} \\ \mathcal{D}_n^{odd} &:= n\ \text{の相異なる奇数個の和因子への分割すべての集合}\end{aligned}$$

とし、$q^{even}(n) := |\mathcal{D}_n^{even}|$、$q^{odd}(n) := |\mathcal{D}_n^{odd}|$ とおけば、

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(q^{even}(n)-q^{odd}(n))q^n$$

となることがわかる。よって定理 1 は、

$$q^{even}(n)-q^{odd}(n) = \begin{cases} (-1)^n & (n = j(3j\pm 1)/2)\ \text{のとき} \\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

と言い換えられる。つまり、ほとんどすべての自然数 n では相異なる分割で和因子の個数が偶数のものと、和因子の個数が奇数のものが同じ個数ずつ現れるということである。そして n が $n = j(3j\pm 1)/2$ と表せるときのみ違いが (± 1) コでるということである。

例　n=6($\neq j(3j\pm 1)/2$) のとき $\mathcal{D}_6^{even} = \{(5,1),(4,2)\}, \mathcal{D}_6^{odd} = \{(6),(3,2,1)\}$　であり、$q^{even}(6)-q^{odd}(6) = 0$ である。

n=7($= j(3j\pm 1)/2$) のとき $\mathcal{D}_7^{even} = \{(6,1),(5,2),(4,3)\}, \mathcal{D}_7^{odd} = \{(7),(4,2,1)\}$　であり、$q^{even}(7)-q^{odd}(7) = 1$ である。

3.2　五角数定理のフランクリン対応を用いた証明

この節ではオイラーの五角数定理の証明をフランクリン (Fabian Franklin) が発見した組み合わせ論的証明 (1881) を紹介する。

まず、$S(\lambda)$（λ の「対角線」とよぶことにする）を分割 λ のヤング図形の一番上の列の右端から左斜め下 45^o にある箱すべての集合、$T(\lambda)$ を最短行にある箱すべての集合とする。そして $s(\lambda) = |S(\lambda)|$、$t(\lambda) = |T(\lambda)|$ と定義する。また操作 I を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}s(\lambda) < t(\lambda)\ &\text{ならば}\ s(\lambda)\ \text{を}\ t(\lambda)\ \text{の下の行に移動} \\ s(\lambda) \geq t(\lambda)\ &\text{ならば}\ t(\lambda)\ \text{を}\ s(\lambda)\ \text{の右へ移動}\end{aligned}$$

この操作によって得られる対応を「**フランクリン対応**」という (図 6 参照)。

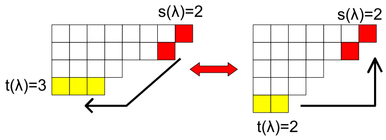


図 6　フランクリン対応の例

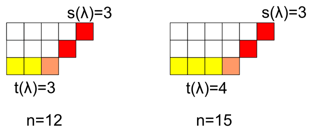


図 7　操作ができない例

そして、対角線が最短行に届いてないとき、つまり $s(\lambda) \neq l(\lambda)$ のとき操作 I を行う。この操作を行うことによって n の相異なる偶数個の和因子を持つ分割と相異なる奇数個の和因子を持つ分割が対応する。

分割 λ の対角線が最短行に届いているとき、つまり $s(\lambda) = l(\lambda)$ のときでも、$s(\lambda) = t(\lambda)$ または $s(\lambda) = t(\lambda) - 1$ を満たさないときは操作 I を行う。もし $s(\lambda) = t(\lambda)$ または $s(\lambda) = t(\lambda) - 1$ を満たすのであれば対応する相異なる分割が存在しないので操作 I を行えない。この操作を行えない分割は図 7 のような 5 角形の分割 (5 角形分割とよぶことにする) である。これらの 5 角形分割を除けば、奇数個の相異なる和因子を持つ分割を偶数個の相異なる和因子を持つ分割にうつす変換が作られた。したがって、

$$p(n| \text{和因子は偶数個で相異なる}) = p(n| \text{和因子は奇数個で相異なる}) + e(n)$$

である。ここで $e(n)$ は n が $j(3l \pm 1)/2(j$ は整数) に等しくないとき $e(n) = 0$ で、等しいとき $l(\lambda)$ が偶数なら 1, 奇数なら -1 である。これでオイラーの五角数定理が証明された。この定理の証明は [1] を参照した。原論文は
Franklin,F.(1881)."Sur le developpement du produit infini$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$...," Comptes Rendus **82**,448-450.
である。

3.3　ファインの定理

フランクリン対応は五角数定理の証明だけでなく、以下の定理の証明も与えている。

定理 3. *(ファインの定理)* 自然数 n について、n の分割で和因子は相異なり最大和因子は奇数である分割の個数と n の分割で和因子は相異なり最大和因子は偶数である分割の個数の差は n が $n = j(3j-1)/2$ と表せるとき 1、$n = j(3j+1)/2$ と表せるとき -1 であり、それ以外のときは 0 である。つまり

$$q(n| \text{最大和因子は奇}) - q(n| \text{最大和因子は偶}) = \begin{cases} 1 & (n = j(3j-1)/2 \text{ のとき}) \\ -1 & (n = j(3j+1)/2 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

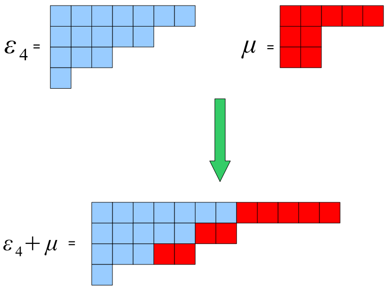


図 8　2 差的分割

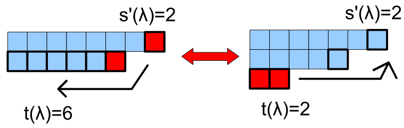


図 9　拡張されたフランクリン対応

分割 λ にフランクリンの操作を行うと、λ の長さが 1 大きくなると同時に最大和因子が 1 小さくなる、または長さが 1 小さくなると同時に最大和因子が 1 大きくなる。よって五角形分割でない分割については最大和因子が奇で相異なる分割と最大和因子が偶で相異なる分割は一対一に対応するので同数存在することがわかる。そして対応が無い分割である五角形分割 λ の最大和因子は $|\lambda| = j(3j-1)/2$ と表せるときには $2l(\lambda)-1$ で奇数、$|\lambda| = j(3j+1)/2$ と表せるときには $2l(\lambda)$ で偶数となるので、ファインの定理が成り立つことがわかる。

4　フランクリン対応の 2 差的な分割に対しての拡張

この章ではフランクリン対応を少し変更して新しい恒等式を導く。そのまえに n 差的という言葉を定義しておこう。自然数 n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)$ が $i = 1, 2, \cdots, l$ について $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq n$ を満たすとき n **差的**であるという。1 差的な分割というのは相異なる分割にほかならない。

2 差的な分割の議論の前に記号を定義しておく。$\mathcal{R}$ を 2 差的な分割すべての集合、$\mathcal{R}_n^{even}$ を n の分割で偶数個の 2 差的な和因子をもつものの集合、$\mathcal{R}_n^{odd}$ を n の分割で奇数個の 2 差的な和因子をもつものの集合と定義する。また、$r^{even}(n) := |\mathcal{R}_n^{even}|$、$r_n^{odd} := |\mathcal{R}_n^{odd}|$ とする。

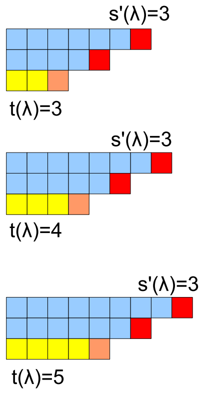
長さ k の 2 差的な分割 λ は図 8 のように、長さが k の「ちょうど 2 差的な分割」$\epsilon_k = (2k-1, 2k-3, \cdots, 3, 1)$ と長さが k 以下の任意の分割 μ を加えることですべて得られる。つまり任意の 2 差的分割 λ は $\lambda = \epsilon_k + \mu$ で表せる。$|\epsilon_k| = 1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2$ であり、μ の母関数は $1/(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)$ とかけるので、2 差的な分割の母関数は以下のようになる。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)} \tag{9}$$

そしてそれらの分割に $(-1)^l q^{|\lambda|}$ の重みをつけて足し合わせることによって

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}(r^{even}(n) - r^{odd}(n))q^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}$$

という式が得られる。



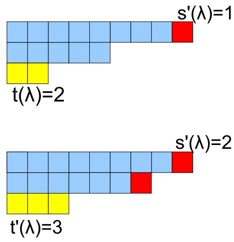


図 10　2 差的な五角形分割の例

図 11　(II) の条件を満たす分割の例

次に $r^{even}(n) - r^{odd}(n)$ を評価するために新たな対応を構成しよう。前章で紹介したフランクリン対応では相異なる分割 λ に対しての対角線 $s(\lambda)$ の傾きは 1 であった。今度はこの傾きを 1/2 にして 2 差的な分割に対してフランクリン対応を拡張してみようと思う。

2 差的な分割 λ のヤング図形の一番右上の箱から左下傾き 1/2 の場所にある箱を集合 $S'(\lambda)$ とし、最短行を $T(\lambda)$ と定義する。そして $s'(\lambda)$ と $t(\lambda)$ を $s'(\lambda) := |S'(\lambda)|$、$t(\lambda) := |T(\lambda)|$ とおく。そして操作 I' を

$$s'(\lambda) < t(\lambda) + 1 \text{ ならば } s'(\lambda) \text{ を } t(\lambda) \text{ の下に移動}$$
$$s'(\lambda) \geq t(\lambda) \text{ ならば } t(\lambda) \text{ を } s'(\lambda) \text{ の右に移動}$$

と定義する。この操作を行うことによって n の相異なる 2 差的な和因子への分割と 2 差的な奇数個の和因子への分割が全単射対応する (図 9 を参照)。この対応を **2 差的なフランクリン対応**とよぶことにする。この操作により別の 2 差的分割にうつせない分割はもとのフランクリン対応と違い、

(I)　2 差的な五角形分割のとき

(II)　(I) を満たさず $t(\lambda) = s'(\lambda) + 1$ のとき

の二通りある。

操作 I' によって 2 差的な偶数個の和因子を持つ分割と 2 差的な奇数個の和因子を持つ分割が全単射対応するので操作 I' が行える分割は $r^{even}(n) - r^{odd}(n)$ を評価するときには数えなくてよい。2 差的な分割すべての集合を $\mathcal{R}$ とし、分割 $\lambda \in \mathcal{R}$ に 2 差的なフランクリン対応する分割を $I'(\lambda)$、対応する 2 差的分割が無い場合については $\lambda = I'(\lambda)$ ということにすると以上の議論より

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{R}} (-1)^{l(\lambda)} q^{|\lambda|} = \sum_{\lambda = I'(\lambda)} (-1)^{l(\lambda)} q^{|\lambda|}$$

とできることがわかる。以下で対応する 2 差的分割が無い分割について考察する。

(I)　2 差的な五角形分割のとき

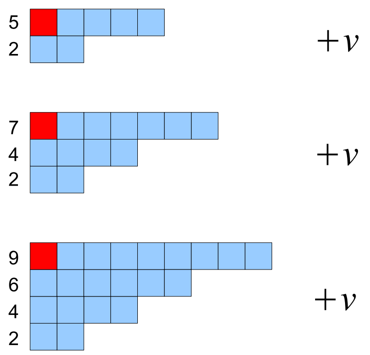


図 12　$t(\lambda) = s'(\lambda) + 1 = 2$ **を満たす分割** μ

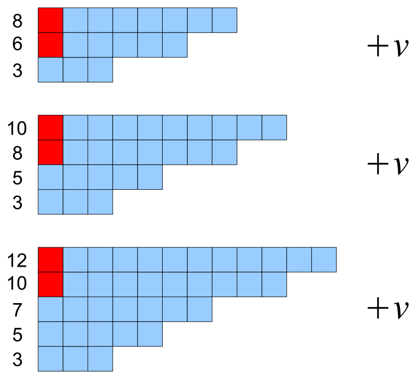


図 13　$t(\lambda) = s'(\lambda) + 1 = 3$ **を満たす分割** μ

もとのフランクリン対応で対応が存在しなかった分割を考えれば

$$s'(\lambda) = l(\lambda) \text{ かつ } s'(\lambda) = t(\lambda) \text{ のとき}$$
$$s'(\lambda) = l(\lambda) \text{ かつ } s'(\lambda) = t(\lambda) - 1 \text{ のとき}$$

以上の場合に操作ができないだろうと予想ができるが、2 差的な分割の場合には以上の場合に加えて

$$s'(\lambda) = l(\lambda) \text{ かつ } s'(\lambda) = t(\lambda) - 2$$

を満たす場合にも対応が存在しない。これらの条件を満たす分割を「2 差的な五角形分割」とよぶことにする (図 10 参照)。$S'(\lambda) \cap T(\lambda) \neq \varnothing$ かつ $s'(\lambda) = t(\lambda)$ という条件を満たす分割 λ の大きさ $|\lambda|$ は

$$\begin{aligned}|\lambda| &= l + (l+2) + (l+4) + \cdots + (l + 2(l-1)) \\ &= 2l^2 - l\end{aligned}$$

である。よって $n = 2l^2 - l$ のときは対応が存在しないことがわかる。同様にして $n = 2l^2, 2l^2 + l$ の場合も対応が存在しないことが確かめられる。2 差的な五角形分割は n を決めると 1 コだけ現われるか、ひとつも現われないかのどちらかである。

(II)　(I) を満たさず $t(\lambda) = s'(\lambda) + 1$ のとき

この条件を満たす分割に 2 差的なフランクリン対応を行おうとすると必ず隣り合った自然数を和因子をもつ分割になってしまうので、この条件を満たす分割に対応する 2 差的な分割は存在しない (図 11 参照)。この条件を満たす分割の母関数を場合わけして考えてみる。

(i)$t(\lambda) = s'(\lambda) + 1 = 2$ のとき

この条件を満たす長さ l の分割 $\lambda = \mu + \nu$ は、$\mu = (2l, 2(l-1), 2(l-2), \cdots, 2) + (1, 0, 0, \cdots, 0)$(図 12 参照) と長さが $l-1$ 以下で $\nu_1 = \nu_2$ の条件を満たす任意の分割 ν の和で表される。μ の大きさ

$|\mu|$ は

$$
\begin{aligned}
|\mu| &= (2+4+\cdots+2(k-1)+2k)+1 \\
&= l(l+1)+1
\end{aligned}
$$

であるので分割 λ の母関数に $(-1)^{l(\lambda)}q^{|\lambda|}$ の重みをつけたものは以下のように表せる。

$$
\sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l q^{l(l+1)+1}\sum_{k=0}^{\infty}q^k \begin{bmatrix} k+l-2 \\ l-2 \end{bmatrix}_q \tag{10}
$$

ここで $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$ は q-二項係数とよばれるものであり、

$$
\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q)}
$$

である。$\begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix}_q$ は組み合わせ論的には n 以下の和因子が高々 m 回現われる分割の母関数を表している。(9) 式の二つ目の $\sum$ からが分割 ν を表している部分であり、(ii)、(iii)、$\cdots$ のときにも同様に扱えるようにこのような形で表した。なぜこのように書けるのかというのは以下のように考えればよい。長さ l の分割 λ は長さ l の分割 μ と長さ $l-1$ の分割 ν との和で表せる。分割 ν の母関数はまずひとつめの和因子 λ_1 を決め、その後に λ_1 以下の値の和因子を高々 $l-2$ コ持つような分割を決める。このように考えれば q-二項定理の定義から (9) 式のように書けることがわかる。(9) 式のひとつめの $\sum$ のランニングインデックスの l を 0 からに変更すると

$$
\sum_{k,l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}}(-1)^l q^{(l+2)(l+3)+k+1}\begin{bmatrix} k+l \\ l \end{bmatrix}_q \tag{11}
$$

となる。

(ii)$t(\lambda)=s'(\lambda)+1=3$ のとき

この条件を満たす長さ l の分割 $\lambda=\mu+\nu$ は、$\mu=(2l+1,2l-1,\ cdots,5,3)+(1,1,0,\cdots,0)$(図 13 参照) と長さが $l-1$ 以下の任意の分割 ν の和で表される。μ の大きさ $|\mu|$ は

$$
\begin{aligned}
|\mu| &= (3+5+\cdots+2k-1+2k+1)+2 \\
&= l(l+2)+2
\end{aligned}
$$

であるので分割 λ の母関数に $(-1)^{l(\lambda)}q^{|\lambda|}$ の重みをつけたものは以下のように表せる。

$$
\sum_{l=3}^{\infty}(-1)^l q^{l(l+2)+2}\sum_{k=0}^{\infty}q^{2k} \begin{bmatrix} k+l-3 \\ l-3 \end{bmatrix}_q \tag{12}
$$

(11) 式の二つ目の $\sum$ からが分割 ν を表している部分である。なぜこのように書けるのかというのは以下のように考えればよい。長さ l の分割 λ は長さ l の分割 μ と長さ $l-1$ の分割 ν との和で表せる。分割 ν の母関数はまず和因子 λ_1 を決め、ν の条件より $\lambda_2=\lambda_1$ とする。その後に λ_1 以下

の値の和因子を高々 $l-3$ コ持つような分割を決める。このように考えれば q-二項定理の定義から (11) 式のように書けることがわかる。(9) 式のひとつめの $\sum$ のランニングインデックスの l を 0 からに変更すると

$$\sum_{k,l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}}(-1)^{l+1}q^{(l+3)(l+5)+2(k+1)}\begin{bmatrix}k+l\\ l\end{bmatrix}_q \tag{13}$$

となる。

$t(\lambda)=s'(\lambda)+1=4$ のとき、(iv)$t(\lambda)=s'(\lambda)+1=5$ のときも同様に考えていくと、

$$\sum_{l=4}^{\infty}(-1)^l q^{l(l+3)+3}\sum_{k=0}^{\infty}q^{3k}\begin{bmatrix}k+l-4\\ l-4\end{bmatrix}_q \tag{14}$$

$$\sum_{l=5}^{\infty}(-1)^l q^{l(l+4)+4}\sum_{k=0}^{\infty}q^{4k}\begin{bmatrix}k+l-5\\ l-5\end{bmatrix}_q \tag{15}$$

となり、ひとつめの $\sum$ のランニングインデックスの l を 0 からに変えてあげると

$$\sum_{k,l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}}(-1)^{l}q^{(l+4)(l+7)+3(k+1)}\begin{bmatrix}k+l\\ l\end{bmatrix}_q \tag{16}$$

$$\sum_{k,l\in\mathbf{Z}_{\geq 0}}(-1)^{l+1}q^{(l+5)(l+9)+4(k+1)}\begin{bmatrix}k+l\\ l\end{bmatrix}_q \tag{17}$$

となる。(10)、(12)、(14)、$\cdots$、とすべての場合を足し合わせることによって

$$\sum_{k,l,m\in\mathbf{Z}_{\geq 0}}(-1)^{l+m}q^{(l+m+2)(l+2m+3)+(m+1)(k+1)}\begin{bmatrix}k+l\\ l\end{bmatrix}_q \tag{18}$$

という式が得られる。

(I)(II) の議論で対応する 2 差的な分割がない分割についての議論が終わった。対応する 2 差的分割がない 2 差的分割で和因子が偶数のものと奇数のものを比べることで以下の式が得られた。

$$\begin{aligned}
&1+\sum_{n=1}^{\infty}(r^{even}(n)-r^{odd}(n))q^n\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}\\
&=\sum_{k,l,m\in\mathbf{Z}_{\geq 0}}(-1)^{l+m}q^{(l+m+2)(l+2m+3)+(m+1)(k+1)}\begin{bmatrix}k+l\\ l\end{bmatrix}_q
\end{aligned}$$

以上で 2 差的な分割に対してのフランクリン対応についての議論は終わりである。

5　今後の展開

・フランクリン対応を 2 差的な分割に拡張することができたので、今後は 3 差的、4 差的、…、n 差的な分割に対しても拡張してみたい。

・オイラーの三角数定理についての組み合わせ論的証明を考えたい。オイラーの三角数定理とは

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}} \tag{19}$$

のことである。オイラーの三角数定理は有名なので組み合わせ論的証明もいくつか知られているかもしれない。この定理の右辺は本論文の議論より、

$$p(n|\text{ 偶数和因子は相異なり偶数個}) - p(n|\text{ 偶数和因子は相異なり奇数個}) \\ = \begin{cases} 1 & (n = j(j+1)/2 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と書き直せることがわかる。この証明は分割の間に全単射を構成して行うことができそうだが、$\mathcal{D}_{even}^{even}$:=(和因子は相異なる偶数個の偶数)、$\mathcal{D}_{even}^{odd}$:=(和因子は相異なる奇数個の偶数)、とおいて $\lambda \in \mathcal{D}_{even}^{even}$ 、 $\mu \in \mathcal{O}$、$\lambda' \in \mathcal{D}_{even}^{odd}$、 $\mu' \in \mathcal{O}$ に対して「結合分割」$J = (\lambda, \mu)$ と $J' = (\lambda', \mu')$ の間に全単射を構成して行っても面白そうだと思う。つまり (18) 式の右辺を

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2m-1}}$$

とみて Vahlen's involution ([4] page1141 参照) のように証明できないかということを私は考えている。

6　参考文献

参考文献

[1] 整数の分割, ジョージ・アンドリュース, キムモ・エリクソン著, 佐藤 文広 訳, 数学書房, (2006)

[2] オイラーに学ぶ 『無限解析序説』への誘い, 野海 正俊 著, 日本評論社,(2007)

[3] 組み合わせ論プロムナード, 山田 裕史 著, 日本評論社,(2009)

[4] Christine Bessenrodt and Igor Pak,Partition congruences by involutions,European Journal of Combinatorics Volume 25, Issue 8, November 2004, Pages 1139-1149

[5] David P .Little, An extension of Franklin's bijection, University of California, San Diego , Sem. Lothar. Combin. 42 (1999)