

# セルオートマトンによる交通流と 渋滞現象の研究

青山学院大学 理工学部 物理数理学科  
西山研究室

15107024 小渕 伊織

2011年2月21日

# 概略

この論文では交通流解析に用いられているモデルの 1 つであるセルオートマトンモデルを用い、渋滞発生メカニズムについて研究する。交通流におけるセルオートマトンモデルとは車両の挙動を離散化して、その時間発展を調べるものである。その中でもルール 184 と呼ばれるセルオートマトンが単純化した交通流を示すモデルとして適当であるが、このセルオートマトンがどのように導出されるのかを微分方程式の離散化、超離散化という手法を通じて紹介する。

交通流を記述する偏微分方程式である Burgers 方程式と、そこから得られる熱伝導方程式を離散化することによって時間、位置を離散化した差分方程式を導出する。そして超離散化という手法を用い、値の離散化によって、この微分方程式に対応したセルオートマトンである Burgers セルオートマトンを求める。得られた Burgers セルオートマトンの特殊な場合が交通流モデルを考えるのに適当である。またセルオートマトンを用いると、渋滞を引き起こす車の密度の臨界値を理論的に求めることが可能である。

以上のセルオートマトンの理論をふまえて、ある地点で 2 方向に分岐し、またある地点で合流するような周期的経路を考え、その分岐点での条件を変えることによる交通流の変化を考察する。

## 目次

- 1 はじめに
- 2 セルオートマトンモデル
  - 2.1 セルオートマトンとは
  - 2.2 ルール 184 セルオートマトン
- 3 **Burgers** セルオートマトン
  - 3.1 Burger セルオートマトンの導出とルール 184 セルオートマトンの対応
  - 3.2 超離散化
- 4 臨界密度
  - 4.1 基本図
  - 4.2 ルール 184 セルオートマトンにおける臨界密度
- 5 特殊な場合の経路
  - 5.1 分岐した周期的経路
  - 5.2 分岐した周期的経路の具体例
- 6 まとめと今後の展望
- 7 参考文献

## 1 はじめに

交通流の問題は、様々な方法を用いて研究されている。その方法には、確率論を用いたモデル、交通流を連続的なものとして扱う流体モデル、また、交通流を構成している車や時間を不連続なものとして考えるセルオートマトンモデルの主に 3 つがある。中でもセルオートマトンモデルは計算機でのシミュレーションが行いやすく、近年非常に発達してきている。

この論文では、セルオートマトンモデルを用い、交通流をできるだけ単純化して渋滞発生のメカニズムを理解することを目的としている。

§2 では、セルオートマトンモデルの理論について述べる。

§3 では、交通流モデルに使うことが適当であるとされる **Burgers** セルオートマトンがどのようにして得られるかを紹介する。これは 1 次元衝撃波の運動を記述する **Burgers** 方程式を変数変換により線形化し、そこから離散化、超離散化という手法を用いて得られるセルオートマトンモデルである。**Burgers** セルオートマトンの特別な場合を考えると、ルール 184 と呼ばれる単純化した交通流モデルに対応していることがわかる。

§4 では渋滞発生の臨界密度について述べる。道の長さに対して車の密度を大きくしていくと、ある値を境にして渋滞が発生するようになる。この時の密度を臨界密度と言ひ、ここでは主にルール 184 セルオートマトンモデルの臨界密度を紹介する。

そして§5 では分岐した周期的経路を考える。ある地点で分岐しているセルではルール 184 とは異なる規則の時間発展を考えなければならない。そのようにして時間発展させた経路の例をいくつか挙げ、また残された課題も記す。

## 2 セルオートマトンモデル

### 2.1 セルオートマトンとは

セルオートマトンモデルとは、有限個の状態をとるセルから構成され、離散的に時間経過させると、ある時間におけるセルの状態が、そのセル自身および隣接するセルの直前の状態によって決定されるようなモデルである。

これを車の流れで考えてみる。実際の車の流れは非常に複雑で、何もない 1 本の道を考えてとしても、様々な要因によって渋滞は引き起こされてしまう。そこでまず道路を 1 つ 1 つのセルに分割し、各セルの車の有無を決める。さらに時間発展のルールを決め、それをもとにして変化させることでセルオートマトンモデルを導入する。

## 2.2 ルール 184 セルオートマトン

1次元セルオートマトンのモデルには時間発展後のセルの変化の仕方によってルールが決まっている。ここではルール 184 と呼ばれるものについて説明する。時間発展のルールを以下のように決める。

- 1つのセルに入ることが出来る車両は最大1台
- 進行方向は右にとり、1回の時間発展で1セル分だけ進める。
- 1つ先のセルに車両が存在すれば、次の時間発展には先のセルに進めず、そのセルに留まる。
- 1つ先のセルに車両が存在しなければ、次の時間発展に先のセルに進める。

このルールのもとで全てのセルで同時に時間発展させる。これを繰り返していくことで交通流を解析できる。

$t = 0 \cdots$	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0
$t = 1 \cdots$	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
$t = 2 \cdots$	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
$t = 3 \cdots$	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1

図1 セルオートマトンモデルによる時間発展の様子

図1は車が存在するセルを「1」、無いセルを「0」として時間発展させた時の例である。見てみると、車が隣り合っている部分（渋滞部分）が後ろに伝播していることがわかる。このような単純なルールでも車の動きのモデルになっているのである。

図1のセルオートマトンの例は、セルを横並びにして1次元的に考えているので、1次元セルオートマトンと言われている。そして、あるセルの状態の時間変化は、そのセル自身の状態とその両隣のセルの状態の3つのセルによって決められている。これを式で表す。いま、時刻 $n$ における $j$ 番目のセルの状態を $U_j^n \in \{0,1\}$ と書くと、次の時刻でのセルの状態は3つのセルの状態によって決まるので、時間発展の規則は適当な関数 $F$ を用いて

$$U_j^{n+1} = F(U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) \quad (2.1)$$

と書ける。ここでセルは車が存在する状態「1」、存在しない状態「0」の2つの状態があるので、関数 $F$ の引数としては

$$(U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n) \in \{111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000\} \quad (2.2)$$

の8通り考えられる。また、この8通りそれぞれに次の時刻の状態（「1」または「0」）が決まるので、全部で $2^8 = 256$ 通りのルールがあると考えられる。

ここで上記の交通流のルールに則って時間発展をみると

$$\frac{U_{j-1}^n U_j^n U_{j+1}^n}{U_j^{n+1}} = \frac{111}{1}, \frac{110}{0}, \frac{101}{1}, \frac{100}{1}, \frac{011}{1}, \frac{010}{0}, \frac{001}{0}, \frac{000}{0} \quad (2.3)$$

と書ける。分母の数を左から並べると、10111000 となり、これを 2 進数と見て 10 進数に直すと  $128+32+16+8=184$  となる。したがってこのように時間発展するセルオートマトンをルール 184 セルオートマトンと呼んでいる。

### 3 Burgers セルオートマトン

#### 3.1 Burgers セルオートマトンの導出とルール 184 セルオートマトンの対応

この節では、超離散化という手法を用いて、Burgers 方程式から Burgers セルオートマトンを導く手法を紹介する。

Burgers 方程式は、時間変数を  $t$ 、空間変数 (1 次元) を  $x$  としたとき、未知関数  $u = u(t, x)$  に関する非線形偏微分方程式

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} \quad (3.1)$$

である。この方程式は流体の 1 次元衝撃波の運動を記述するモデルであり、交通流を研究する上でよく用いられている。これを Cole-Hopf 変換

$$u = \frac{f_x}{f} \quad (3.2)$$

によって線形化する。まず(3.2)式の両辺を  $t$  で微分すると、

$$u_t = \frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2} \quad (3.3)$$

となる。同様に(3.2)式の両辺を  $x$  で 1 階微分、2 階微分すると

$$u_x = \frac{f_{xx}}{f} - \frac{f_x^2}{f^2} \quad (3.4)$$

$$u_{xx} = \frac{f_{xxx}}{f} - 3 \frac{f_x f_{xx}}{f^2} + 2 \frac{f_x^3}{f^3} \quad (3.5)$$

となる。そして得られた(3.3)式、(3.4)式、(3.5)式を(3.1)式に代入する。

$$\frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2} = 2 \cdot \frac{f_x}{f} \cdot \left( \frac{f_{xx}}{f} - \frac{f_x^2}{f^2} \right) + \frac{f_{xxx}}{f} - 3 \frac{f_x f_{xx}}{f^2} + 2 \frac{f_x^3}{f^3} \quad (3.6)$$

整理すると

$$f^2 f_{xt} - f f_x f_t = 2 f f_x f_{xx} - 2 f_x^3 + f^2 f_{xxx} - 3 f f_x f_{xx} + 2 f_x^3$$

$$f^2 f_{xt} - f f_x (f_t - f_{xx}) - f^2 f_{xxx} = 0$$

ここで、 $f_{xt} = \frac{\partial}{\partial x} f_t$ 、 $f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x} f_{xx}$  より

$$\begin{aligned}
f^2 \frac{\partial}{\partial x} (f_t - f_{xx}) - f f_x (f_t - f_{xx}) &= 0 \\
\frac{f}{f_x} \frac{\partial}{\partial x} (f_t - f_{xx}) - (f_t - f_{xx}) &= 0 \\
\left(1 - \frac{f}{f_x} \frac{\partial}{\partial x}\right) (f_t - f_{xx}) &= 0 \tag{3.7}
\end{aligned}$$

となる。よって次の熱伝導方程式

$$f_t = f_{xx} \tag{3.8}$$

の解が得られると、(3.2)式によって  $u = f_x/f$  はこの Burgers 方程式の解になる。従って Burgers 方程式は線形化可能である。

(3.1)式をセルオートマトンモデルにするためには、この線形化可能という性質を保つように時間・空間変数を離散化しなければならない。そのために、まず熱伝導方程式を差分化する。 $\Delta t/(\Delta x)^2 = \delta$  とおくと(3.8)式の差分化は

$$f_j^{n+1} - f_j^n = \delta(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) \tag{3.9}$$

となる。さらに Cole-Hopf 変換自身も差分化すると

$$\begin{aligned}
u_j^n &= \frac{1}{f_j^n} \left( \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x} \right) \\
&= \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} - 1 \right)
\end{aligned}$$

となり、 $1/\Delta x = c$  とおき、さらに  $u_j^n$  を、 $c + u_j^n = v_j^n$  と変数変換することで

$$v_j^n = c \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} \tag{3.10}$$

が得られる。そこで(3.9)式,(3.10)式を用いて  $v_j^n$  に関する時間発展方程式を導く。

$$\begin{aligned}
v_j^{n+1} &= c \cdot \frac{f_{j+1}^n + \delta(f_{j+2}^n - 2f_{j+1}^n + f_j^n)}{f_j^n + \delta(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n)} \\
&= c \cdot \frac{(1-2\delta)f_{j+1}^n + \delta(f_{j+2}^n + f_j^n)}{(1-2\delta)f_j^n + \delta(f_{j+1}^n + f_{j-1}^n)} \\
&= c \cdot \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} \cdot \frac{(1-2\delta) + \delta \left( \frac{f_{j+2}^n}{f_{j+1}^n} + \frac{f_j^n}{f_{j+1}^n} \right)}{(1-2\delta) + \delta \left( \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} + \frac{f_{j-1}^n}{f_j^n} \right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v_j^n \cdot \frac{(1-2\delta) + \delta \left( \frac{v_{j+1}^n}{c} + \frac{c}{v_j^n} \right)}{(1-2\delta) + \delta \left( \frac{v_j^n}{c} + \frac{c}{v_{j-1}^n} \right)} \\
&= v_j^n \cdot \frac{\frac{1-2\delta}{c} + \delta \left( \frac{v_{j+1}^n}{c^2} + \frac{1}{v_j^n} \right)}{\frac{1-2\delta}{c} + \delta \left( \frac{v_j^n}{c^2} + \frac{1}{v_{j-1}^n} \right)} \\
&= v_{j-1}^n \cdot \frac{\frac{(1-2\delta)}{c} v_j^n + \delta \left( 1 + \frac{1}{c^2} v_{j+1}^n v_j^n \right)}{\frac{(1-2\delta)}{c} v_{j-1}^n + \delta \left( 1 + \frac{1}{c^2} v_{j-1}^n v_j^n \right)} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

となる。したがって

$$v_j^{n+1} = v_{j-1}^n \cdot \frac{\frac{(1-2\delta)}{c} v_j^n + \delta \left( 1 + \frac{1}{c^2} v_{j+1}^n v_j^n \right)}{\frac{(1-2\delta)}{c} v_{j-1}^n + \delta \left( 1 + \frac{1}{c^2} v_{j-1}^n v_j^n \right)} \tag{3.12}$$

が得られた。これが時間・空間変数を差分化した Burgers 方程式である。これをセルオートマトンに変換するために関数値の離散化が必要である。これには超離散化という手法を用いる。([1],[2]を参照)

まず超離散化を行う上で用いる、極限に関する公式を証明しておこう。

**補題 3.1** 実数  $A_1, \dots, A_n$  に対して次の式が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A_1/\varepsilon} + e^{A_2/\varepsilon} + \dots + e^{A_n/\varepsilon}) = \max(A_1, A_2, \dots, A_n) \tag{3.13}$$

*Proof.*  $\max(A_1, A_2, \dots, A_n) = A_i$  とする。左辺の  $\log$  の中を  $e^{A_i/\varepsilon}$  で括ると

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log((e^{A_i/\varepsilon})(e^{(A_1-A_i)/\varepsilon} + e^{(A_2-A_i)/\varepsilon} + \dots + 1 + \dots + e^{(A_n-A_i)/\varepsilon})) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon (\log(e^{A_i/\varepsilon}) + \log(e^{(A_1-A_i)/\varepsilon} + e^{(A_2-A_i)/\varepsilon} + \dots + 1 + \dots + e^{(A_n-A_i)/\varepsilon})) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (A_i + \varepsilon \log(1 + e^{(A_1-A_i)/\varepsilon} + e^{(A_2-A_i)/\varepsilon} + \dots + e^{(A_n-A_i)/\varepsilon})) \tag{3.14}
\end{aligned}$$

ここで  $A_k - A_i \leq 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) なので極限  $\varepsilon \rightarrow +0$  をとると  $\log(1 + e^{(A_1-A_i)/\varepsilon} + e^{(A_2-A_i)/\varepsilon} + \dots + e^{(A_n-A_i)/\varepsilon})$  の項は  $\log m$  ( $m$  は最大値  $A_i$  と一致する  $A_1, \dots, A_n$  の個数) に収束する。よって

$$(3.14) = A_i$$

となり、公式が成り立つ。■

この極限公式(3.13)式を用い、(3.12)式を超離散化する。まず、



$$v_j^n = \exp\left(\frac{U_j^n}{\varepsilon}\right) \quad (3.15)$$

とにおいて、新しく変数  $\varepsilon$  を導入する。さらに

$$\frac{1-2\delta}{c\delta} = \exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right) \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{c^2} = \exp\left(-\frac{L}{\varepsilon}\right) \quad (3.17)$$

とにおいて、 $c, \delta$  の代わりに  $L, M > 0$  を導入する。そして(3.12)式に代入すると

$$\exp\left(\frac{U_j^{n+1}}{\varepsilon}\right) = \exp\left(\frac{U_{j-1}^n}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{U_j^n}{\varepsilon}\right) + 1 + \exp\left(-\frac{L}{\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{U_j^n}{\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{U_{j+1}^n}{\varepsilon}\right)}{\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{U_{j-1}^n}{\varepsilon}\right) + 1 + \exp\left(-\frac{L}{\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{U_{j-1}^n}{\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{U_j^n}{\varepsilon}\right)}$$

となり、両辺の対数をとると、

$$\begin{aligned} \frac{U_j^{n+1}}{\varepsilon} &= \frac{U_{j-1}^n}{\varepsilon} + \log\left\{\exp\left(\frac{-M + U_j^n}{\varepsilon}\right) + 1 + \exp\left(\frac{-L + U_j^n + U_{j+1}^n}{\varepsilon}\right)\right\} \\ &\quad - \log\left\{\exp\left(\frac{-M + U_{j-1}^n}{\varepsilon}\right) + 1 + \exp\left(\frac{-L + U_{j-1}^n + U_j^n}{\varepsilon}\right)\right\} \end{aligned}$$

となる。さらに両辺に  $\varepsilon$  をかけ、極限  $\varepsilon \rightarrow +0$  をとると、

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_{j-1}^n + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log\left\{\exp\left(\frac{-M + U_j^n}{\varepsilon}\right) + 1 + \exp\left(\frac{-L + U_j^n + U_{j+1}^n}{\varepsilon}\right)\right\} \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log\left\{\exp\left(\frac{-M + U_{j-1}^n}{\varepsilon}\right) + 1 + \exp\left(\frac{-L + U_{j-1}^n + U_j^n}{\varepsilon}\right)\right\} \end{aligned}$$

となる。ここで極限公式(3.13)式より、

$$U_j^{n+1} = U_{j-1}^n + \max(0, U_j^n - M, U_j^n + U_{j+1}^n - L) - \max(0, U_{j-1}^n - M, U_{j-1}^n + U_j^n - L)$$

となり、右辺を整理すると、

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \min(M, U_{j-1}^n, L - U_j^n) - \min(M, U_j^n, L - U_{j+1}^n) \quad (3.18)$$

という式を得る。これが Burgers セルオートマトンである。この Burgers セルオートマトンにおいては  $M > 0, L > 0$  は定数であり、かつ任意の  $j$  に対して  $0 \leq U_j^n \leq L$  を仮定している。

(3.18)式の右辺を2通りに変形すると、

$$U_j^{n+1} = \min(U_j^n + M, U_j^n + U_{j-1}^n, L) - \min(M, U_j^n, L - U_{j+1}^n) \quad (3.19)$$

$$U_j^{n+1} = \min(M, U_{j-1}^n, L - U_j^n) - \min(M - U_j^n, 0, L - U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (3.20)$$

となり、(3.19)式の右辺第一項は  $L$  以下、第二項は  $0$  以上、そして(3.20)式の右辺第一項は  $0$  以上、第二項は  $0$  以下となるので全ての  $j$  に対して

$$0 \leq U_j^{n+1} \leq L \quad (3.21)$$

が成り立つことが示せる。つまり、もし初期時刻  $n = 0$  で  $U_j^0$  の値が全て  $0$  から  $L$  までの整数値で与えられていたら、それ以降の任意の時刻  $n$  でも  $U_j^n$  の値は  $0$  から  $L$  までの整数値しかとらない。

また、(3.18)式の  $M, L$  はそれぞれ

- $M$  : 1 度に動ける車の上限
- $L$  : 1 つのセルに存在できる車の上限

を表している。ここで重要なことは  $M = L = 1$  として、 $U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n$  に車の有無の状態「1」, 「0」の組み合わせ 8 通りを代入すると(2.3)と同じ時間発展をすることである。つまりこれはルール 184 セルオートマトンに対応していることがわかり、Burgers セルオートマトンの特別な場合が交通流の基本的なモデルと一致することがわかった。

## 3.2 超離散化

超離散化とは四則演算で構成された方程式を  $\exp(A/\epsilon)$  型の変数変換を行い、さらに極限  $\epsilon \rightarrow +0$  をとること max-plus 代数の方程式に変換することである。Burgers セルオートマトン(3.18)式において  $M, L$  が整数で、 $U$  の初期値が全て整数なら、以降の任意の時刻での  $U$  の値は整数となる。一般に超離散化が可能ならば、得られた式に含まれる演算は  $\max$  と  $+$  だけであるので、係数、定数、初期値が整数である限り常にこのようなことが成り立つ。以上のことから、次の図式が成り立つ。

	微分方程式	差分方程式	超離散方程式 (セルオートマトン)
独立変数 (時間、位置)	連続	離散	離散
従属変数	連続	連続	離散

つまり差分化で微分方程式における独立変数の離散化を行い、超離散化によって従属変数の離散化を行うことで、あらゆる変数の離散化ができる。このような究極的な離散化という意味で「離散化」に「超」をつけて「超離散化」と呼ぶ。([2]を参照)

## 4 臨界密度

### 4.1 基本図

交通流の状態を表すのに用いられる基本的な量に流量と密度がある。この 2 つの基本的な量の関係を表すのが基本図である。

ここでは、ある周期的な道路を考える。まず道路の長さ (セルの総数) を  $K$ 、その道路内に存在する車両の総数を  $N$ 、1 回の時間経過 (1 ステップ) で動くことのできる車両の数を  $m$  とする。このとき密度は

$$\rho = \frac{N}{K} \quad (4.1)$$

と表せる。また流量は

$$q = \frac{m}{K} \quad (4.2)$$

で表すことが出来る。そして横軸に密度、縦軸に流量をとりその 2 つの関係を示す図が基本図である。基本図は交通容量の推定や、交通流の制御などの領域で非常に有用なものである。

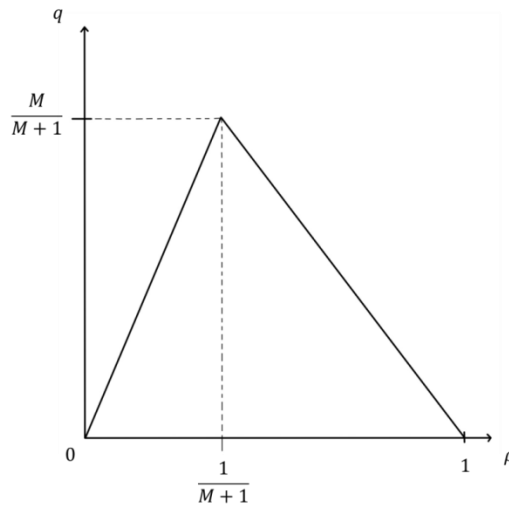


図 2 Burgers セルオートマトンの基本図

#### 4.2 ルール 184 セルオートマトンにおける臨界密度

周期的な道路を考え、ルール 184 の規則で十分に時間を経過させたとする。その状態で基本図を考えると、(ここでは証明しないが) 図 2 のようになることがわかる。([3]の p.4 , 第 1 章、1-2 節を参照)

まず密度が 0、すなわち考えている道路に車両が存在しない場合、当然流量も 0 である。そこから車両の数を増やし密度を上げていくと、それに伴い流量も比例して増えていく。これは道路内の全ての車両が時間発展させた時に止まることなく、動いている状態である。そして、ある密度を境にして流量が減っていくのがわかる。これは時間発展させた時に動けない車両が存在している状態、つまり渋滞が発生している状態を意味している。また密度が 1、つまり道路内のセル全てに車両が詰まっている状態は、時間発展させても動くことのできる車両は存在しないので流量は 0 である。

このように、渋滞が起こっていない非渋滞領域から、渋滞が起こっている渋滞領域になる時の密度を**臨界密度**と呼ぶ。ルール 184 セルオートマトンでの臨界密度は図 2 からわかるように、 $M = 1$ のときなので 0.5 である。

## 5 特殊な場合の経路

### 5.1 分岐した周期的経路

今までは、主に周期的な道路について述べてきたが、ここでは、ある地点で分岐しているような周期的な道路を考えてみる。

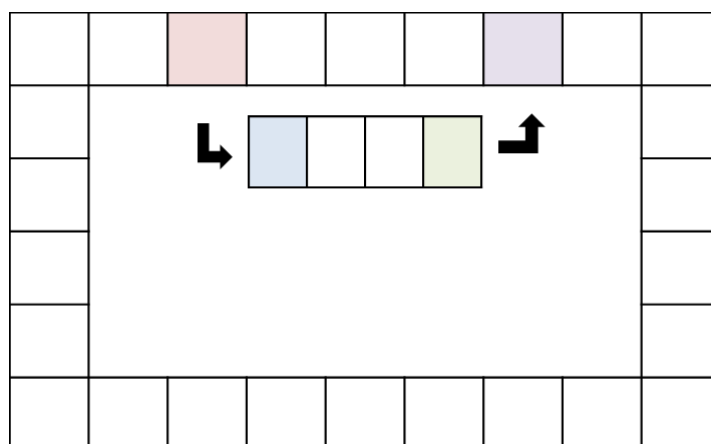
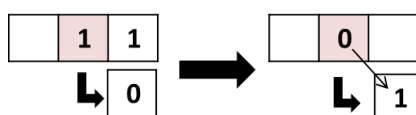


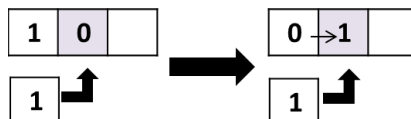
図3 ある地点で分岐した周期的経路

図3のような道路を考え、車を配置し、ルール184の規則で時間発展させることを考える。分岐するセル、合流するセルにおいてルール184は適用できないので、まず、分岐する地点、合流する地点での条件を決めておく。

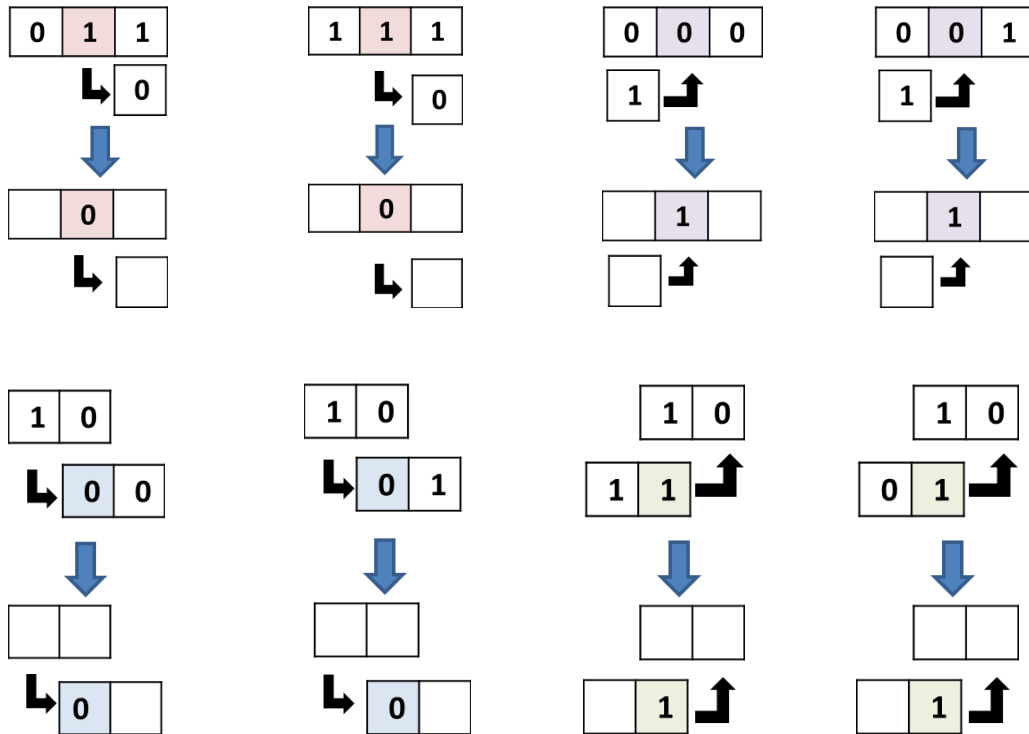
- **分岐セルでの条件**：分岐する地点で車は直進できない場合にのみ、分岐に入るものとする。



- **合流セルでの条件**：合流する地点で直進してくる車と、分岐からくる車が重なってしまう場合は、常に直進する車を優先するものとする。



この条件を踏まえて、車を時間発展させるのだから、注意しなければならないのはルール184の規則通りに時間変化しないセルがあるということである。以下がその例外である。



分岐するセル、合流するセル、分岐路最初のセル、最後のセルにそれぞれ 2 通り、計 8 通りの例外が出てくる。ルール 184 で時間発展させる上で、この例外を踏まえなければならない。

## 5.2 分岐した周期的経路の具体例

以下の例は道路の長さ（セルの総数）を 26、車の総数を 13、つまり密度を 0.5 なるようにして時間発展させたものである。また、それぞれ「分岐路の長さ（セルの数）」、「外周路における分岐点から合流点までの間の長さ」を変えてある。

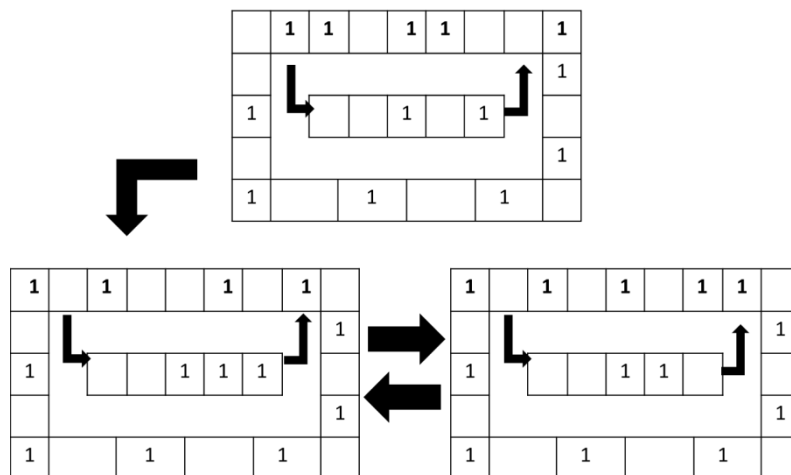


図 4-1 周期的経路の具体例 1

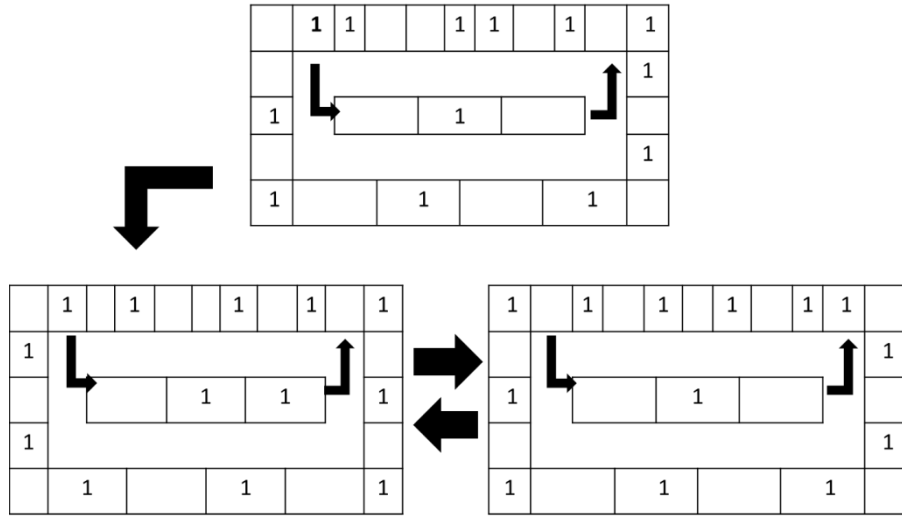


図 4-2 周期的経路の具体例 2

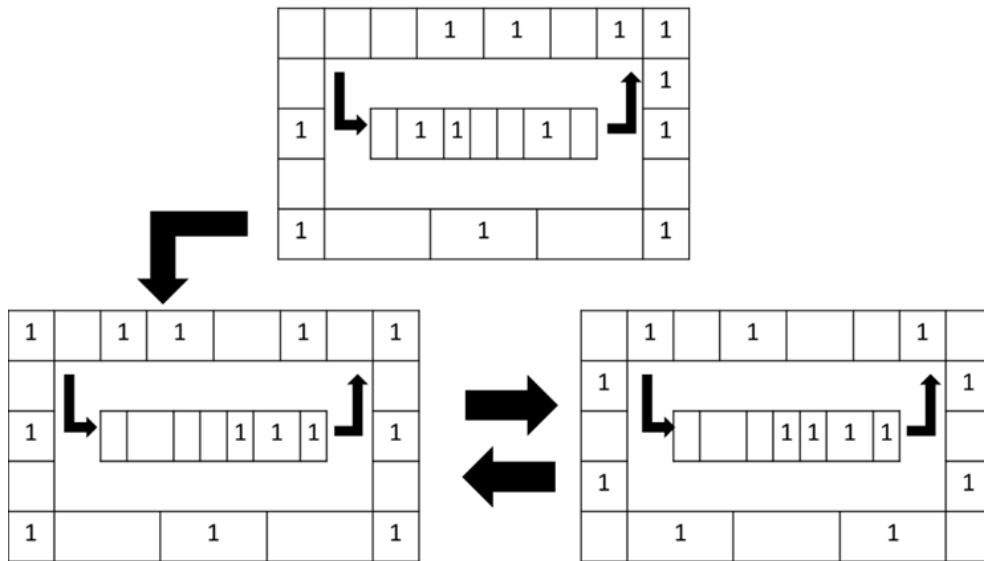


図 4-3 周期的経路の具体例 3

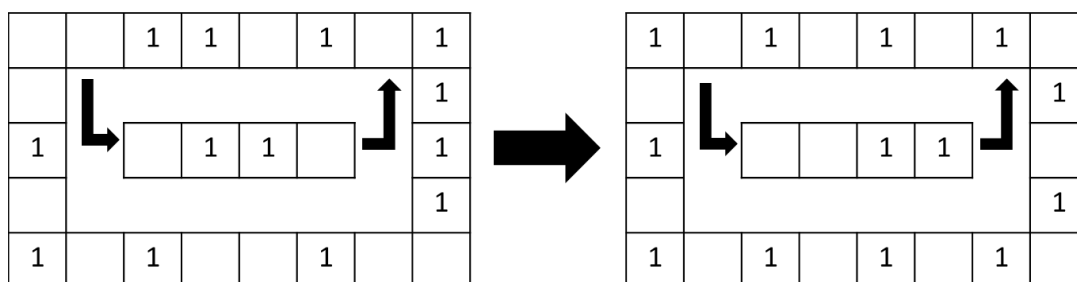


図 4-4 周期的経路の具体例 4

図 4-1~4-4 からわかるように、ある初期状態から時間発展させ、十分に時間が経過すると道路内の交通流は周期的に変化するようになる。図 4-1~4-3 において交通流が周期的になり、その周期はそれぞれ 12 ステップ、16 ステップ、10 ステップである。図 4-4 では十分に時間を経過させると、外周路に車が 1 つおきに存在し、分岐路では前方に車が詰まってしまう状態になる。この状態から時間を経過させても外周路の車だけが動き、分岐路の車は外周路に合流できず、そのままの状態に変化しない。

また図 5 で示すように「外周路における分岐点から合流点までの間の長さ」を  $H$  とする。

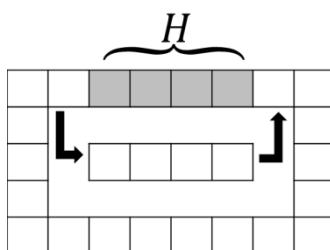


図 5 外周路における分岐点から合流点までの間の長さ

図 4-1 では  $H=5$  で周期は 12 ステップ、図 4-2 では  $H=7$  で周期 16 ステップ、図 4-3 では  $H=4$  で周期 10 ステップとなっている。このことから周期を  $T$  とすると

$$T = 2(H + 1) \quad (5.1)$$

という式で表せることが予想できる。しかしこの式は、少ない例から予想したものであるので必ずしも成り立つとはいえない。また図 4-4 のような(5.1)式で表せない例もある。図 4-1~4-3 と図 4-4 との相違点は外周路の長さ、つまりセルの数が偶数か奇数かということである。

まとめると分岐した周期的経路において、車の密度を 0.5 に保ったまま十分に時間経過させた場合、

- 外周路の長さ（セルの数）が奇数のとき、交通流は周期的に変化するようになる。そのときの周期  $T$  は、「外周路における分岐点から合流点までの間の長さ」  $H$  を用いて

$$T = 2(H + 1)$$

と表せることが予想される。

- 外周路の長さが偶数のとき、外周路には車が 1 つおきに存在し、分岐路では前方に車が詰まる状態（渋滞）になる。このとき分岐路において渋滞を構成している車は、時間経過させても外周路に合流できず動けないままである。
- 密度が 0.5 のとき、時間経過させても常に分岐路において渋滞が発生している。これは臨界密度が 0.5 未満ということである。
- ルール 184 の規則で時間発展させたとしても、分岐があることによって臨界密度が変化することがわかる。

以上のことは具体例から考察したものである。したがって、一般の場合にも同様のことが言えるのかは確かではない。

## 6 まとめと今後の展望

セルオートマトンモデルにより交通流を単純化して解析できることがわかった。また Burgers 方程式という微分方程式から離散化、超離散化という手法を用いることで、単純化した交通流モデルのルール 184 セルオートマトンモデルに対応した Burgers セルオートマトンを導けることがわかった。

本研究では分岐した周期的経路の車の時間発展の具体例を 4 つ挙げたが、これではデータとして非常に不足である。分岐路が無い周期的経路の臨界密度は理論的に求めることが可能である。参考文献[3]に詳細が示されている。しかし分岐路がある場合の臨界密度を理論的に求めることは難しいのではないかと思われる。この困難を克服するには、交通流を解析するモデルの流体モデルや、確率論を用いたモデルを援用すべきかもしれない。

本研究では臨界密度を理論的にではなく、データを用いて求めようとした。そのためにはコンピューターシミュレーションを作成し、分岐した周期的経路の交通流の変化を調べ、臨界密度を調べるのが今後の課題である。また、分岐路がある場合だけではなく、「違う規則で動く車両が 1 つだけ存在する」といった場合など、条件を変えて交通流の変化を見ることが出来る。また他の 2 つのモデルである流体モデルや確率論を用いたモデルで交通流を解析するのも興味深いと思う。

## 7 参考文献

- [1] 西成活祐 「渋滞の研究：超離散アプローチ」  
(基研研究会「統計物理の展望」、研究会報告) (1999)
- [2] 広田良吾、高橋大輔 「差分と超離散」 共立出版 (2003)
- [3] 時弘哲治 「箱玉系の数理」 朝倉書店 (2010)