シルベスターの分割恒等式の一般化

15106087

物理・数理学科 4−I−19

西山研究室

深井亮

目次

0 章　はじめに

シルベスターの分割恒等式とは次のような恒等式である。

定理 0.1 シルベスターの分割恒等式

相異なる奇数の和因子を持つ分割は差が 6 以上かつ 2 を含まない和因子を持つ分割と全単射対応する、つまり

$$P(N \mid \lambda_i \equiv 1 \pmod{2}, \lambda_i \neq \lambda_{i-1}) = P(N \mid |\lambda_i - \lambda_{i+1}| \geqq 6 \ \wedge \ \lambda_i \neq 2)$$

が成り立つ。

この定理はイギリスの数学者ジェームズ・ジョゼフ・シルベスター（James Joseph Sylvester）が発見した分割恒等式である。（他にもシルベスター行列などに名を残している。）

証明法は、ある分割に対してヤング図形をうまく使って新たな分割を作り出すという方法で全単射対応を構成すればよい。

ここで使われた規則を応用してこの恒等式を一般化する事が本論文の主目的である。

そこでまず、シルベスターの分割恒等式が成り立つ事を証明し、次に全単射対応をダーフィー正方形を用いて構成する。その過程で得られたアルゴリズムを用いて一般化を論じる事にする。

分割同士の対応は和因子だけを使って式に表すと難解に感じられるが、ヤング図形を応用して視覚化する事で驚くほどシンプルに理解する事が出来るであろう。

１章　整数の分割

1.1 整数の分割

整数の分割とは任意の自然数 N を自然数の和で表す方法を指す。
例えば、N=４の分割は、

４、３＋１、２＋２、２＋１＋１、１＋１＋１＋１

の５つである。

分割の表記の仕方は他にもいくつかある。

表記例１）　和因子を書き並べる

（４）（３,１）（２,２）（２,１,１）（１,１,１,１）

表記例２）　和因子を重複度を用いて書く。

（４）（３,１）（2^2）（２、1^2）（1^4）

一般に、自然数の広義減少列

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell) \quad (\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_\ell > 0)$$

を**分割**といい、その成分 λ_i を**分割 λ の和因子**という。

和因子の総和 $\Sigma^{\ell}_{i=1}\lambda_i$ を $|\lambda|$ で表し λ のサイズと呼ぶ。$|\lambda|$ ＝N なら λ は整数 N の分割である。

また l を**分割の長さ**と呼ぶ。

加えて、分割の N の分割の総数を P(N)で表す。（以下分割数という）

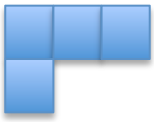
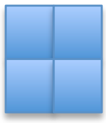
例えば N=4 の分割は５つあるので P(4)=5 である。

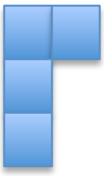
P(N)の表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(N)	1	1	2	3	5	7	11	15	22

1.2 ヤング図形

ヤング図形とは分割を図形表記して視覚的に分かりやすくしたものである。
例えば、N＝４なら

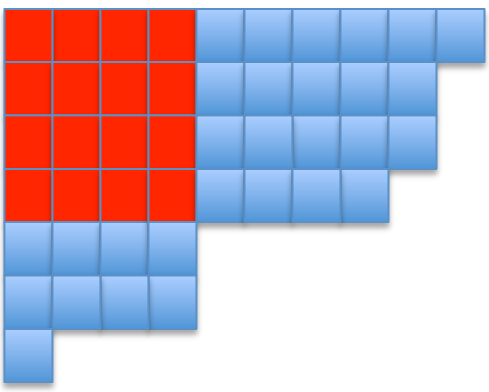
（４）  （３, １）  (2^{2}) 

$(2, 1^{2})$  (1^{4}) 

上記のように、各行に和因子と同じ個数の箱を並べる従って、和因子の長さと同じだけの箱が第１列に並ぶ。

1.3 ダーフィー正方形

ダーフィー正方形とは、ヤング図形の左上隅を含む最大の正方形である。
例えば下図で赤色に色づけされた正方形がこのヤング図形のダーフィー正方形である。



２章シルベスターの分割恒等式

2.1 シルベスターの分割恒等式

相異なる奇数の和因子を持つ分割と差が６以上かつ２を含まない和因子を持つ分割が全単射対応する事が成り立つ。

定理 2.1 シルベスターの分割恒等式

シルベスターの分割恒等式

$P(N\,|\,\lambda_i \equiv 1 \pmod 2, \lambda_i \neq \lambda_{i-1}) = P(N\,|\,|\lambda_i - \lambda_{i+1}| \geqq 6 \wedge \lambda_i \neq 2)$

これを具体例で見ると次の表のようになる。

	相異なる奇数の和因子	和因子の差６以上、≠2
N＝８	（７,１）（５,３）	（８）（７,１）
N＝９	（９）（５,３,１）	（９）（８,１）
N＝１０	（９,１）（７,３）	（１０）（９,１）
N＝２０	（１９,１）（１７,３） （１５,５）（１３,７） （１１,９）（１１,５,３,１）	（２０）（１９,１）（１７,３） （１６,４）（１５,５）（１４,６）

以上のように実際に二種類の分割の個数はどの N についても同じである。

具体的な証明は 2.3 で与える。

2.2 ヤング図形を鍵状に見る

分割 $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)$ のヤング図形を考える。

例えば、

$$\lambda : 9+8+8+7+4+4+1$$

の場合が下の図１である。（赤の部分がダーフィー正方形）

$(9,8^2,7,4^2,1)$ のヤング図形とダーフィー正方形

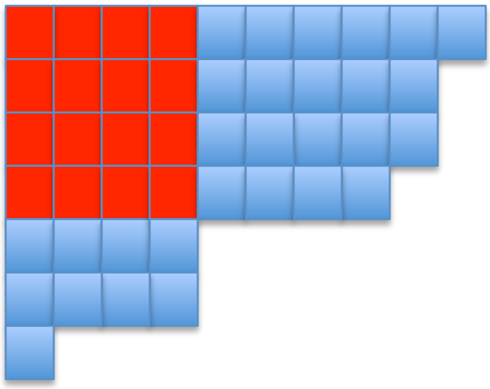


図１

λ のダーフィー正方形を D(λ)で表し、その一辺の長さを|D(λ)|で表す。
図１の場合は|D(λ)|=4 である。
次に、分割 λ のヤング図形を鍵状に数える事によって与えられる分割 μ を図２に作る。
$(9,8^2,7,4^2,1)$のヤング図形を(16,12,10,7)と鍵状に読みかえる。

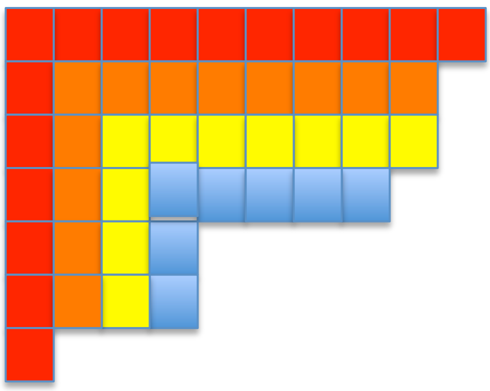


図２

図２を見ると内側の鍵はいかなる場合も外側の鍵より２マス以上短い事が分かり、

$$\mu_{i-1} - \mu_i \geqq 2$$

が成り立つ。よってλが相異なる和因子を持てば内側の鍵が外側の鍵より３マス以上短いので

$$\mu_{i-1} - \mu_i \geqq 3$$

である事が分かる。加えて分割μの和因子の長さと|D(λ)|は同じになる事が分かる。このように得られた対応λ→μが全単射というのは自明ではないので、次の節で全単射である事を証明する。

2.3 シルベスターの分割恒等式の全単射証明

相異なる奇数の和因子を持つ分割λを２つの部品で構成されたヤング図形で表そう。まず各和因子を$\lambda_i = 2k+1$ と書いて、第 i 行に２を k_i 個並べ右端に１を置く。

$$\lambda : (19,17,15,11,9,7,1)$$

なら

$$19 = 2+2+2+2+2+2+2+2+2+1 = 2 \times 14 + 1$$

などと考え図３のように表す。これを図２のようにやはり鍵状に読み取る事で分割μを得る。例えば最も外側の鍵では

$$(1+2\cdot\cdot\cdot+2+1) = 1 + 2 \times 14 + 1 = 30$$

となり、これが分割μの第１和因子である。

$$\mu : (30,23,17,8,1)$$　を得る。

2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	1	
2	2	2	2	2	2	2	1		
2	2	2	2	2	1				
2	2	2	2	1					
2	2	2	1						
1									

図３

前節で述べたのと同じように、内側の鍵は外側の鍵より３マス以上短いので、

$$\mu_{i-1} - \mu_i \geqq 6 = 3\times 2$$

が成り立つ。

この際右端の１は全ての鍵に出てくるので差 $|\mu_{i-1} - \mu_i|$ には影響しない事に注意する。また $\mu_{i-1} - \mu_i$ が最小になるときは下端に１が出てこないので上の条件に支障はない。

さらに μ には和因子２が出てこない。これは、図３において２の右には必ず１が現れる事と１だけが上下に並ぶ事がないことよりわかる。

加えて、ダーフィー正方形の右下角が１の時は μ は和因子に１を持つ。これは、１が最右端にある事と（和因子が相異なる場合）１の下に現れる数字がない事から分かる。

これで、

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{N}\,|\,\lambda_i \equiv 1 \pmod 2, \lambda_i \neq \lambda_{i-1}) \to \boldsymbol{P}(\mathrm{N}\,|\,|\lambda_i - \lambda_{i+1}| \geqq 6 \wedge \lambda_i \neq 2)$$

という対応が得られた。

次にこの対応の逆写像を構成しよう。そこで和因子の差が６以上かつ２を含まない分割 μ を与える。

まず和因子の長さと $|D(\mu)|$ が同じになるようなダーフィー正方形を作り、そのマスに２を埋める。しかし、もし μ が和因子１を含むようならダーフィー正方形の右下角を例外的に１とする。例えば

$$\mu\ :\ 30+23+17+8+1$$

なら図４のようなダーフィー正方形を得る。

また以下に出てくる図を鍵状に読む際の記号として外側から $h_1, h_2, \cdots, h_5$ としておく。

2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	1

図４

ここでは h_i と μ_i が同じになる事をゴールとする。

そこで μ を小さい方から順に見ていく。その際に μ_i が偶数なら鍵の一番下にに１を追加する。つまり h_i の下端に１を取ってあげればよい。このとき、１の右には何もなく、左にあきがあれば２を取る事を決めておく。

まず μ の最小和因子は μ_5=１なので下には何も取らない。これによって $\mu_5=h_5$ となる。

次に小さい和因子は８で偶数なので下に１を取りその左にはあきが三つあるので２を取っていく。（図５）

図５

2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	1
2	2	2	1	

次に、残りの和因子を見る。

すると $\mu_3\mu_2$ は奇数なので下端に１を取れない。μ_1 は偶数はなので、h_1 の下端に１を取る。（図６）

図６

2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	1
2	2	2	1	
1				

そして最後μ_i=h_i となるようにダーフィー正方形の右に２（右端のみ１）をいれていく。（図７）

すると h_2は図６で７なので右端に１を取ってやる事で h_2=μ_2となる。

h_3は図６で１０なので右側に２を二つと１を取る事で h_3=μ_3となる。

同様の考え方で h_4h_5も完成させていく。

図７

2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	1	
2	2	2	2	2	2	2	1		
2	2	2	2	2	1				
2	2	2	2	1					
2	2	2	1						
1									

これを行ごとに数え上げる事で相異なる奇数の和因子を持つ分割

$$\lambda : (9,8^2,7,4^2,1)$$

を得る事ができる。一般の場合も同様である。

このように構成される対応が最初の対応の逆を与える事は作り方からほぼ明らかであろう。これでシルベスターの分割恒等式を全単射証明する事が出来た。

３章　シルベスターの分割恒等式の拡張

ここでは、２章で論じた対応を一般化して相異なる３を法として１に合同な和因子を持つ分割がどのような分割と対応するか考える。つまり出発点は分割

$$\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\ \lambda_\ell)\quad ,\lambda_i\equiv 1\pmod 3\qquad (1\geqq i\geqq \ell)$$

である。

まず、相異なる３を法として１に合同な和因子を持つ分割λを２つの部品つまり３と１で構成されたヤング図形で表そう。
行の右端を１として、それ以外を３とする。

例えば

$$19=3+3+3+3+3+3+1$$

という具合に表したものを各行に作り、ヤング図形にして表す。
その際左から順に３を並べ右端に１をとる。（下図参照）

λ:(19,13,10,7,1)

$$\begin{array}{ccccccc}
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1\\
3 & 3 & 3 & 3 & 1 & & \\
3 & 3 & 3 & 1 & & & \\
3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & & & & & &
\end{array}$$

これを鍵状に読むと分割

$$\mu=(29,16,5)$$

を得る。

$|\mu_i-\mu_{i-1}|\geqq 9$ が成り立つ事は、§2.2 で論じた鍵の長さの話より明らかである。
また和因子に０　(mod3)と２を含まない事も簡単に分かる。この対応より

$$P(N\,|\,\lambda_i\equiv 1(\mathrm{mod}3),\lambda_i\neq\lambda_{i-1}))\rightarrow P(N\,|\,\mu_i\neq 0(\mathrm{mod}3),\ \mu_i\neq 2,|\mu_i-\mu_{i-1}|\geqq 9)$$

に属する分割が得られた。

次に逆写像を構成しよう。

まず和因子の差が９以上かつ、和因子に２と３の倍数を含まない分割μを与える。次に和因子の長さと$|D(\mu)|$が同じになるようなダーフィー正方形を作り、各箱に３を入れる。しかしμに１を含むようならダーフィー正方形の右下角を例外的に１とする。
例えば

$$\mu=29+16+5$$

の場合図８のようになる。
また以下図を鍵状に読む際の記号として外側からに$h_1h_2h_3$と書く。

3	3	3
3	3	3
3	3	3

図８

ここではh_iとμ_iが同じになる事をゴールとする。

そこでμを小さい方から順に見ていく、その際に$\mu_i\equiv 2(\mathrm{mod}3)$なら鍵の下端に１をとる。つまり$h_i$の下端に１を取ってあげればよい。このとき、１の右には何もなく、左にあきがあれば３を取る事を決めておく。

まずμ_3は５なのでh_3の下端に１を取る。
また１の左には二つあきがあるので３を取る。(図９)

図９

3	3	3
3	3	3
3	3	3
3	3	1

次にμ_2は２　(mod3)ではないので下端に１は取りません。最後にμ_1ですがこれは２　(mod3)なのでh_1の下端に１を取る。(図 10)

図 10

3	3	3
3	3	3
3	3	3
3	3	1
1		

次に、μ_iの数字を見ながらダーフィー正方形の右の数字を構成する。アルゴリズムは前章と同様である。
μ_1は５なので h_1の右端に１を取ってやり $h_1=\mu_1$となる。μ_2は１６なので h_2の右に３と１を取る事で $h_2=\mu_2$となる。同様に考え h_1の右に３を三つと１を取る事で $h_1=\mu_1$となる。（図 12）

図 12

3	3	3	3	3	3	1
3	3	3	3	1		
3	3	3	1			
3	3	1				
1						

これを行ごとに数え上げると、各行は右端の箱に１が入り、他が３になっているので結果として、相異なる 1(　mod3)の和因子を持つ分割を得る事が出来る。
作り方から、それが最初の対応の逆を与えるのは明らかであろう。

以上の事をまとめると以下のような定理を得る。

定理

相異なる３を法とする１と合同な和因子を持つ分割は、和因子の差が９以上かつ和因子に３の倍数と２を含まない分割と全単射対応することが成り立つ。

定理 3.1

$$\boxed{\boldsymbol{P}(N \mid \lambda_i \equiv 1 \pmod{3}, \lambda_i \neq \lambda_{i-1})) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}(N \mid \mu_i \neq 0 \pmod{3},\ \mu_i \neq 2, \mid \mu_i - \mu_{i-1} \mid \geqq 9)}$$

が導かれた。

４章　シルベスターの分割恒等式の一般化

この章では和因子の条件をさらに一般化して、相異なる P を法とする Q と合同な和因子を持つ分割 λ がどんな分割と対応するかを考えていきたい。ここで (P>Q≧0)は任意に与えられた非負整数である。
まず、

$$\lambda \in \boldsymbol{P}(\mathrm{N} \mid \mathrm{Q} \pmod{\mathrm{P}})$$

を２つの部品つまり P と Q で構成されたヤング図形で表す。
まず、各和因子を $\lambda_i = \mathrm{P}k_i + \mathrm{Q}$ と書いて i 番目の行に P の箱を k_i 個置き、行の右端の箱に１つ Q を入れる。
例えば

$$\lambda = (7\mathrm{P}+\mathrm{Q}, 5\mathrm{P}+\mathrm{Q}, 4\mathrm{P}+\mathrm{Q}, 3\mathrm{P}+\mathrm{Q}, \mathrm{P}+\mathrm{Q}, \mathrm{Q})$$

なら下図のようになる。

P	P	P	P	P	P	P	Q
P	P	P	P	P	Q		
P	P	P	P	Q			
P	P	P	Q				
P	Q						
Q							

これを鍵状に読むと分割

$$\mu = (11\mathrm{P}+2\mathrm{Q}, 6\mathrm{P}+2\mathrm{Q}, 3\mathrm{P}+\mathrm{Q}, \mathrm{Q})$$

を得る。
§2.2 の鍵の長さの考察と同様に考えて

$$|\mu_i - \mu_{i-1}| \geqq 3\mathrm{P}$$

と分かる。また、上図より

$$\mu_i = \mathrm{Q} \pmod{\mathrm{P}} \vee (\mu_i = 2\mathrm{Q} \pmod{\mathrm{P}} \wedge \mu_i \neq 2\mathrm{Q})$$

と分かる。よって

$$\mathrm{P}(\mathrm{N} \mid \lambda_i \equiv \mathrm{Q} \pmod{\mathrm{P}}, \lambda_i \neq \lambda_{i-1})) \rightarrow$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{N} \mid \mu_i = \mathrm{Q} \pmod{\mathrm{P}} \vee (\mu_i = 2\mathrm{Q} \pmod{\mathrm{P}} \wedge \mu_i \neq 2\mathrm{Q}), |\mu_i - \mu_{i-1}| \geqq 3\mathrm{P})$$

と分かる。

次に逆写像を構成しよう。

まず分割μの和因子の長さと|D(μ)|が同じになるようなダーフィー正方形を作り、そこにPを取る。しかし分割μの和因子にQを含むようならダーフィー正方形の右下角を例外的にQとする。

$$\mu=(11P+2Q,6P+2Q,3P+Q,Q)$$

の場合は図13のようになる。

また以下図を鍵状に読む際の記号として外側からに$h_1h_2h_3h_4$と書く。

図13

P	P	P	P
P	P	P	P
P	P	P	P
P	P	P	Q

ここでは、$h_i=\mu_i$となるようh_iを構成する事をゴールとする。

まずμを小さい方から順に見ていく、その際に$\mu_i\equiv 2Q(\mathrm{mod}P)$なら h_iの下端にQを取る。またQの右には何もなく、左にあきがある場合はPを取る。

この場合μ_4は2Q　(modP)ではないのでh_4の下端には何も取らない。h_3も同様である。μ_2は2Q　(modP)なのでh_2の下端にQを取りあいている左にPを取る。(図14)

図14

P	P	P	P
P	P	P	P
P	P	P	P
P	P	P	Q
P	Q		

同様に、h_1の下にもQを入れる。(図15)

図 15

P	P	P	P
P	P	P	P
P	P	P	P
P	P	P	Q
P	Q		
Q			

次に $h_i=\lambda_i$ となるようにダーフィー正方形の右に文字を入れていく。h_4 はすでに $h_4=\mu_4$ となっている。h_3 は上図で３P なので右に Q を取る事で $h_3=\mu_3$ となる。h_2 は上図で５P＋Q なので右に P と Q を取る事で $h_2=\mu_2$ となる。同様に h_1 の右にも P を三つと Q を取り $h_1=\mu_1$ とする。(図 16)

図 16

P	P	P	P	P	P	P	Q
P	P	P	P	P	Q		
P	P	P	P	Q			
P	P	P	Q				
P	Q						
Q							

これを行ごとに数え上げる事で相異なる P を法とする Q と合同な和因子を持つ分割を与える事が出来る。

このように構成されるのが最初の対応の逆を与える事はほぼ明らかであろう。これより

$$P(N\,|\,\lambda_i\equiv Q \pmod P, \lambda_i\neq\lambda_{i-1}))=$$
$$P(N\,|\,\mu_i\equiv Q \pmod P)\vee(\mu_i\equiv 2Q \pmod P)\wedge\mu_i\neq 2Q), |\mu_i-\mu_{i-1}|\geqq 3P)$$

が分かる。

以上より、シルベスターの分割恒等式の一般化して次の新定理を導く事が出来た。

定理 4.1

相異なる P を法とする Q と合同な和因子を持つ分割は、和因子の差が３P 以上

かつ和因子にＰを法とするＱと合同な和因子もしくは２Ｑ以外のＰを法とする２Ｑと合同な和因子を持つ分割と全単射対応する事が成り立つ。（Ｐ＞Ｑ）

$$P(N \mid \lambda_i \equiv Q \pmod{P}, \lambda_i \neq \lambda_{i-1}) =$$
$$P(N \mid \mu_i \equiv Q \pmod{P} \vee (\mu_i \equiv 2Q \pmod{P} \wedge \mu_i \neq 2Q), |\mu_i - \mu_{i-1}| \geqq 3P)$$

（Ｐ＞Ｑ）

参考文献

山田裕史（2009）『組み合わせ論プロムナード』日本評論社

Krishnaswami Alladi（1998） *“A variation on a theme of Sylvester—a smoother road　to Gollnitz’s　(Big) theorem*”