

長方形領域のドミノタイル張りについて

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科

西山研究室

15107089 藤野 優祐

目次

1	はじめに	3
2	ドミノタイル張りについて	3
2.1	ドミノタイル張り	3
2.2	ドミノタイル張りの可能性	6
3	グラフ理論	7
3.1	グラフ	7
3.2	2部グラフとマッチング	7
3.3	2部グラフとドミノタイル張り	8
3.4	Kasteleyn, Fisher, Temperley の公式	9
4	母関数による考え方	12
4.1	ドミノ演算	12
4.2	$3 \times 2n$ の大きさの長方形	13
5	まとめと将来の展望	16

1 はじめに

ドミノタイル張りとは、与えられた格子状の図形にドミノ（正方形を二つ並べた 2×1 の大きさの長方形）を敷き詰めることをいう。

この論文では、このドミノタイル張りについて論じている。私は、「不可能を証明する」（瀬山士郎著、青土社、2010）を読みドミノタイル張りに出逢った。この本には、「ある図形が与えられ、その図形をドミノで敷き詰められるかどうか？」という問題が記載されている。このパズル的な問題のユニークな解法に魅せられ、私はドミノタイル張りに興味を持った。このドミノタイル張りを数学的に考察したいと思ったことが、本研究を行った動機である。

ドミノタイル張りは、敷き詰めが可能か否かの問題に留まらず、その敷き詰め方法が一体何通り存在するのかを求めることも興味深い問題である。また、グラフ理論やダイマーという分子モデルとも関係があり、話が統計物理学にまで発展し、単なるパズルの枠に留まらない大変興味深いものである。

本研究では、与えられた長方形のドミノタイル張りの方法が何パターン存在するのかについて研究している。偶数 \times 偶数の大きさの長方形のドミノタイル張りの個数については、1960年代初頭、すでに物理学者の Kasteleyn, Fisher, Temperley によって公式が導かれているため、本研究では長方形の縦の長さが 3 で横の長さが偶数の場合について母関数を用いた手法で考えてみた。

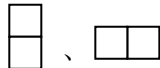
グラフ理論やダイマーとの関係については紹介という形での記載となるため、更に詳しい内容については関係する文献[3], [4], [5]などを参照されたい。

本論文は全 5 章から構成されている。第 1 章では、本研究を行った動機、本研究内容について述べた。第 2 章では、ドミノタイル張りについての説明を述べた。第 3 章では、グラフ理論とドミノタイル張りの関係性について紹介した。第 4 章では、母関数を用いてドミノタイル張りについて考察した結果を記した。最後に第 5 章で、まとめと将来の展望を述べる。

2 ドミノタイル張りについて

この章では本研究のメインテーマであるドミノタイル張りについて紹介する。

2.1 ドミノタイル張り

ドミノタイル張りとは、与えられた格子状の図形にドミノ （正方形を二つ並べた 2×1 または 1×2 の大きさの長方形）を敷き詰めることをいう。

例 2.1 10×10 の大きさの格子状の図形

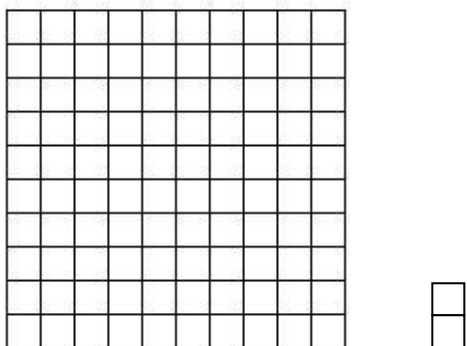


図 2.1

10×10 の大きさの格子状の図形はドミノで敷き詰めることができる (図 2.1)。試してみればわかることだが、この場合はただ単に同じ方向のドミノを規則的に繰り返して敷き詰めていけばよい。例えば、図 2.1 のドミノの向きで左上隅から順に並べていけばドミノタイル張りが成立する。

例 2.2 特殊な形状の格子状の図形

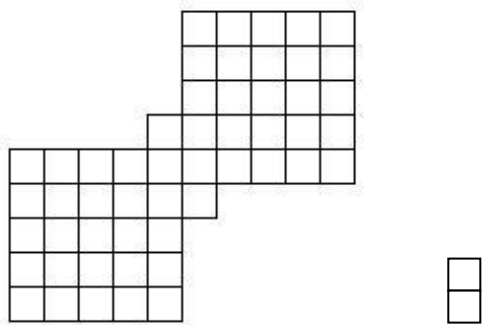




図 2.2

この特殊な形状の格子状の図形もドミノタイル張りできる。敷き詰め方法は何通りかあるが、一例を図 2.3 に示す。この図では、わかりやすくするために、ドミノを  ,  で表している。

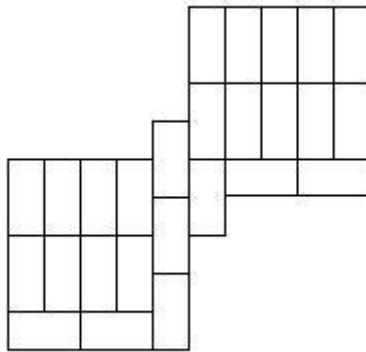



図 2.3

ドミノタイル張りが可能な場合もあれば当然不可能な図形もある。以下に記す図 2.4 から図 2.6 の場合はいずれもドミノタイル張り不可能な図形である。図 2.4 はマス目の数が奇数であるため敷き詰めが不可能であることは明らかである。図 2.5 は敷き詰められないことが容易にわかる。図 2.6 は、ドミノを隅に置くとその後順にドミノの置き方が決まっていき、最終的に残るマス目は  となる。この図形はドミノで敷き詰め不可能であるため、図 2.6 はドミノタイル張り不可能である。

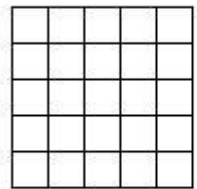


図 2.4

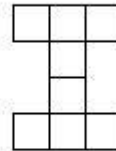


図 2.5

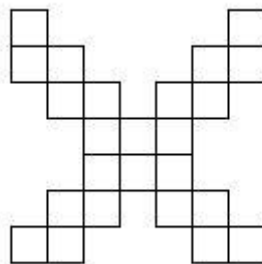


図 2.6

2.2 ドミノタイル張りの可能性

与えられた図形のドミノタイル張りが可能か否かという問題について考える。

問題. 図 2.1 の 10×10 の正方形の対角の隅にある 2 つのマス目を取り除いた図形はドミノタイル張りできるか？ (図 2.7)

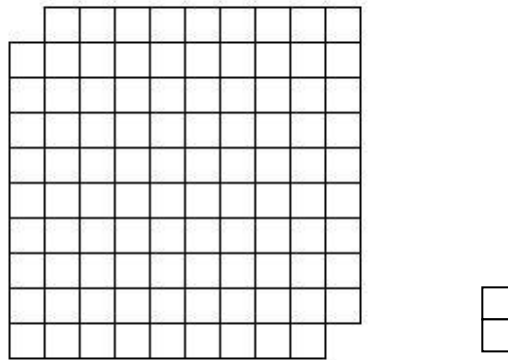


図 2.7

解. 色塗り法で考える。まず、問題の図形を市松模様(チェッカーボード模様)に塗り分ける (図 2.8)。

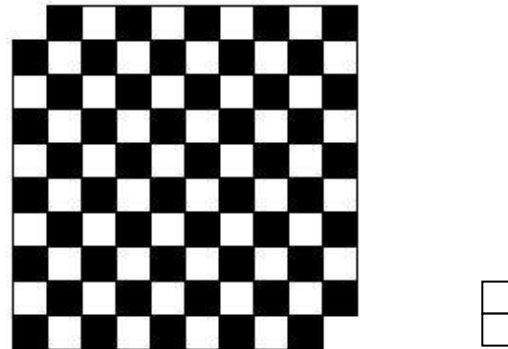


図 2.8

ここで、ドミノはこの図形上で必ず隣り合うマス目を覆う。従って、ドミノは一つ置く毎に黒のマス目と白のマス目を一つずつ覆うことになる。つまり、ドミノタイル張り可能な図形は黒、白のマス目が必ず同数になる。

実際に図 2.8 を数えてみると、黒が 50、白が 48 であり、ドミノタイル張りが不可能であることがわかる。

3 グラフ理論

ドミノタイル張りは、グラフ理論と深い関係がある。この章では、その関係性について紹介する。

3.1 グラフ

グラフとは、いくつかの頂点とそれを結ぶ辺からなる図形のことである。つまり、グラフは頂点の集合 V と辺の集合 E の組を与えれば決まるので、これを

$$G = (V, E)$$

と表す。

任意の 2 頂点間に辺が高々 1 つしかないグラフでは、辺の両端 v, v' を指定すれば、辺

$$e = (v, v')$$

が決まる (図 3.1)。

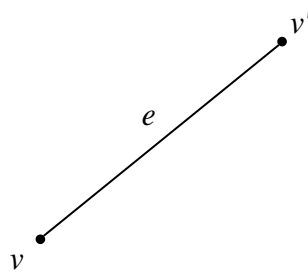


図 3.1

図 3.1 において、 (v, v') と (v', v) が同じ辺を表すものとして考えたグラフを無向グラフという。本研究では、無向グラフのみを考える。

3.2 2部グラフとマッチング

グラフ G において、頂点集合 V が 2 つの素な部分集合 V_1 と V_2 に分割され ($V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \phi$)、 G のすべての辺が V_1 の点と V_2 の点を結ぶようなグラフ G を 2部グラフという。つまり、辺は V_1 と V_2 の間にのみ存在し、 V_1 の頂点同士の間には辺がなく、同様に V_2 の頂点同士の間にも辺がない。2部グラフ G は、

$$G = (V_1, V_2, E) \quad (E \text{ は辺の集合})$$

というように三つ組として書き表す。2部グラフの例を以下に挙げる (図 3.2 , 図 3.3)。

$$\begin{cases} \odot & : V_1 \\ \bullet & : V_2 \end{cases}$$

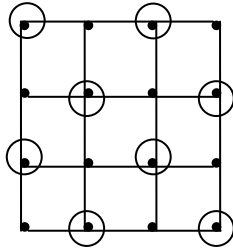


図 3.2 平方格子

$$\begin{cases} \odot & : V_1 \\ \bullet & : V_2 \end{cases}$$

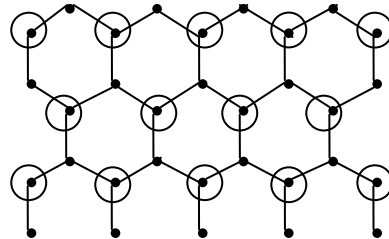


図 3.3 六角格子

2部グラフ $G = (V_1, V_2, E)$ において、端点を共有しない、いくつかの辺からなる集合

$$M = \{(w_1, b_1), (w_2, b_2), \dots, (w_n, b_n)\} \quad , \quad w_i \neq w_j, \quad b_i \neq b_j \quad (i \neq j)$$

を **マッチング** という。 M は E の部分集合である。図 3.4 から図 3.6 は平方格子におけるマッチングの例である。

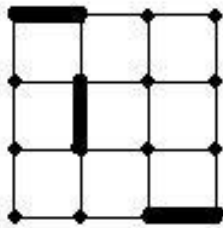


図 3.4

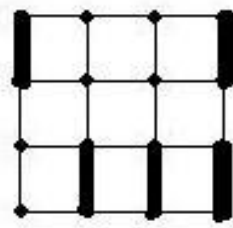


図 3.5

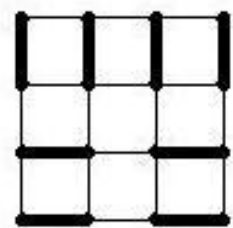


図 3.6

マッチング M において、

$$\{w_1, w_2, \dots, w_n\} = V_1 \quad , \quad \{b_1, b_2, \dots, b_n\} = V_2$$

というように M の端点が G のすべての頂点を覆うとき、**完全マッチング** という。例えば図 3.6 は完全マッチングの例である。しかし、図 3.4 と図 3.5 は完全マッチングではない。

3.3 2部グラフとドミノタイル張り

では、グラフ理論とドミノタイル張りの間には一体どのような関係があるのだろうか。実は、ドミノタイル張りは先程述べた 2部グラフの完全マッチングと対応する。完全マッチングの辺をドミノに置き換えると、ドミノタイル張りが完成するのである (図 3.7, 3.8)。

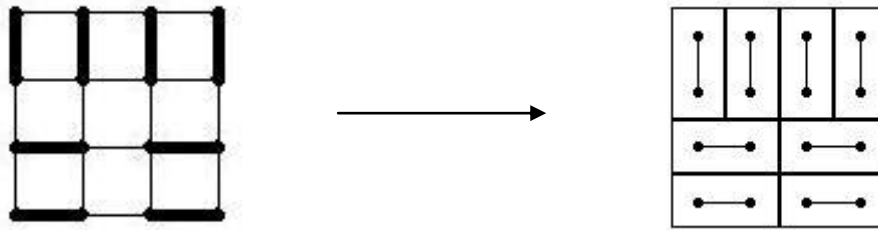


図 3.7

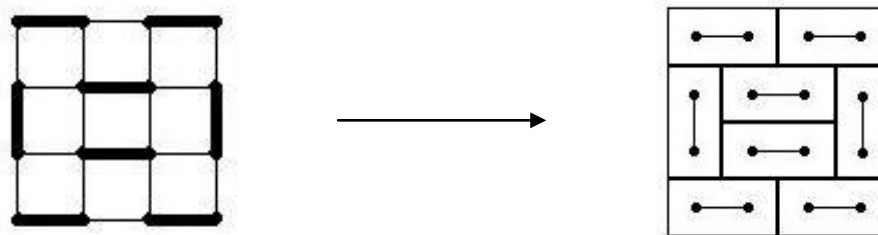


図 3.8

このことからドミノタイル張りは、このダイマー（ $\bullet\text{---}\bullet$ ）模型に翻訳できる。ダイマーとは 2 つの原子からなる分子を意味しており、ダイマー模型ではダイマーの配置問題を統計力学的な観点から考察する。物理学者の Kasteleyn, Fisher, Temperley は、ダイマーの配置を考えることにより、ドミノタイル張りの個数を求める式を導き出した。

3.4 Kasteleyn, Fisher, Temperley の公式

定理 3.1 (Kasteleyn, Fisher, Temperley の公式) 縦横 2 辺の長さが偶数 ($2m \times 2n$ とする) の長方形のドミノタイル張りの個数は、

$$N(m, n) = \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(4 \cos^2 \frac{\pi j}{2m+1} + 4 \cos^2 \frac{\pi k}{2n+1} \right) \quad (1)$$

である。

例 $m = n = 2$ のときを考える。まず(1)を変形する。 $m = n$ なので、

$$\begin{aligned}
N(m, m) &= \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \left(4 \cos^2 \frac{\pi j}{2m+1} + 4 \cos^2 \frac{\pi k}{2m+1} \right) \\
&= \prod_{j=1}^m \left\{ 4 \left(\cos^2 \frac{\pi j}{2m+1} + \cos^2 \frac{\pi}{2m+1} \right) \times 4 \left(\cos^2 \frac{\pi j}{2m+1} + \cos^2 \frac{2\pi}{2m+1} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \cdots \times 4 \left(\cos^2 \frac{\pi j}{2m+1} + \cos^2 \frac{n\pi}{2m+1} \right) \right\} \\
&= \left\{ 4 \left(\cos^2 \frac{\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{\pi}{2m+1} \right) \times \cdots \times 4 \left(\cos^2 \frac{\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{n\pi}{2m+1} \right) \right\} \\
&\quad \times \left\{ 4 \left(\cos^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{\pi}{2m+1} \right) \times \cdots \times 4 \left(\cos^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{n\pi}{2m+1} \right) \right\} \\
&\quad \times \cdots \\
&\quad \times \left\{ 4 \left(\cos^2 \frac{n\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{\pi}{2m+1} \right) \times \cdots \times 4 \left(\cos^2 \frac{n\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{n\pi}{2m+1} \right) \right\} \\
&= 4^{n^2} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \left(\cos^2 \frac{\pi j}{2m+1} + \cos^2 \frac{\pi k}{2m+1} \right) \tag{2}
\end{aligned}$$

(2)に $m = 2$ を代入する。

$$\begin{aligned}
N(2, 2) &= 4^{2^2} \prod_{j=1}^2 \prod_{k=1}^2 \left(\cos^2 \frac{\pi j}{5} + \cos^2 \frac{\pi k}{5} \right) \\
&= 4^4 \prod_{j=1}^2 \left\{ \left(\cos^2 \frac{\pi j}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{5} \right) \times \left(\cos^2 \frac{\pi j}{5} + \cos^2 \frac{2\pi}{5} \right) \right\} \\
&= 4^4 \times 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} \times \left(\cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{2\pi}{5} \right)^2 \times 2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} \tag{3}
\end{aligned}$$

次に、 $\cos \frac{\pi}{5}$ を求める。

$$\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} = e^{i \frac{\pi}{5}} = z \quad \text{より} \quad z^5 = e^{i\pi} = -1 \tag{4}$$

(4)より

$$\begin{aligned} z^5 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$z+1 \neq 0$ より、

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow z^2 \left(z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$z^2 \neq 0$ より、

$$z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \tag{5}$$

$z + \frac{1}{z}$ と $z^2 + \frac{1}{z^2}$ を求める。

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{-i\frac{\pi}{5}} = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5} = 2 \cos \frac{\pi}{5}$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2 = \left(2 \cos \frac{\pi}{5} \right)^2 - 2 = 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2$$

これを(5)に代入する。

$$\begin{aligned} z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 - 2 \cos \frac{\pi}{5} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{\pi}{5} - 1 &= 0 \qquad \therefore \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

$\cos \frac{2\pi}{5}$ も同様にして求めると、

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

最後に、求めた $\cos \frac{\pi}{5}$ と $\cos \frac{2\pi}{5}$ を(3)に代入する。

$$\begin{aligned}
N(2, 2) &= 4^5 \times \cos^2 \frac{\pi}{5} \times \left(\cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{2\pi}{5} \right)^2 \times \cos^2 \frac{2\pi}{5} \\
&= 4 \times 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} \times \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{5} + 4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} \right)^2 \times 4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} \\
&= 4 \left(2 \cos \frac{\pi}{5} + 1 \right) \left(2 \cos \frac{\pi}{5} + 1 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 1 \right)^2 \left(-2 \cos \frac{2\pi}{5} + 1 \right) \\
&= 4 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 \right)^2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 \right) \\
&= 4 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\
&= 36
\end{aligned}$$

これで、**Kasteleyn, Fisher, Temperley** の公式より 4×4 の長方形のドミノタイル張りの仕方の総数が 36 であることがわかった。

4 母関数による考え方

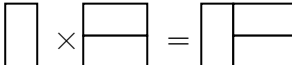
Kasteleyn, Fisher, Temperley は、縦横 2 辺の長さが任意の偶数 ($2m \times 2n$ とする) の長方形について考えた。私は本研究で、奇数の場合について母関数による考え方をを用いて考察した。

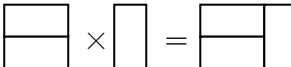
4.1 ドミノ演算

ドミノタイル張りした図形の間、ドミノ演算を以下のように定義する。

1. 加法は形式的な一次結合

2. 積は図形をつなげる

(例) 



∴ 非可換




このドミノ演算を利用してドミノタイル張りについて考察する。

4.2 $3 \times 2n$ の大きさの長方形

$3 \times 2n$ の大きさの長方形のドミノタイル張りすべての和を取ったものを U_n として、すべてのドミノタイル張りの形式的な和を U とおく。

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots$$

$$\begin{aligned}
 &= \phi + \underbrace{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}}_{U_0} + \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}_{U_1} + \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{U_2} + \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{U_2} + \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{U_2} + \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{U_2} + \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{U_2} + \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{U_2} + \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{U_2} + \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}_{U_2} + \cdots \quad (6)
 \end{aligned}$$

(6)式をみると、空でないドミノタイル張りの左端は、 か  か  のいずれかの形をしている。この3つをそれぞれ L_1 , L_2 , K と置き、ドミノ演算を使って U を表すと、

$$U = \phi + L_1 V + L_2 W + K U \quad (7)$$

となる。ここで、 V , W は、

$$\begin{aligned}
 V &= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \cdots \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} U + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} V \\
 &= S_1 U + T_1 V \quad (S_1 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \text{と置いた}) \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \cdots \\
 &= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} U + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} W \\
 &= S_2 U + T_2 W \quad (S_2 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \text{と置いた}) \quad (9)
 \end{aligned}$$

(7), (8), (9)を連立して解く。

まず、(8)より

$$V = (\phi - T_1)^{-1} \cdot S_1 U \quad (10)$$

ここで、 $(\phi - T_1)^{-1}$ の意味を考える。ドミノ演算の意味を考えると、

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots \quad \text{より、} \quad (\phi - T_1)^{-1} = \phi + T_1 + T_1^2 + \dots$$

となることがわかる。また、(9)より

$$W = (\phi - T_2)^{-1} \cdot S_2 U \quad (11)$$

(10), (11)を(7)に代入する。

$$\begin{aligned} U &= \phi + L_1 \cdot (\phi - T_1)^{-1} \cdot S_1 U + L_2 \cdot (\phi - T_2)^{-1} \cdot S_2 U + KU \\ &= \phi + L_1 \cdot (\underbrace{\phi + T_1 + T_1^2 + \dots}_{\text{左端が } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}) \cdot S_1 U + L_2 \cdot (\underbrace{\phi + T_2 + T_2^2 + \dots}_{\text{左端が } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}) \cdot S_2 U + \underbrace{KU}_{\text{左端が } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\therefore U = \frac{\phi}{\phi - L_1 \cdot (\phi - T_1)^{-1} \cdot S_1 - L_2 \cdot (\phi - T_2)^{-1} \cdot S_2 - K} \quad (13)$$

次に、 $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ と $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ を z に置き換えて数式化する。 ϕ は 1 に置き換える。例えば、

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}^4 \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}^2 = z^4 \cdot z^2 = z^6$$

とする。この方法で(6)式を数式化すると、

$$\begin{aligned} U(z) &= 1 + (z^3 + z^3 + z^3) + (z^6 + z^6 + z^6 + z^6 + z^6 + z^6 + z^6 + z^6 + z^6 + z^6 + z^6) + \dots \\ &= 1 + 3z^3 + 11z^6 + \dots \end{aligned}$$

つまり、数式化を行った式の各項の係数を見れば、使用するドミノの数に応じたドミノ
タイル張りが何パターン存在するのかがわかる。

(12)式

$$U = \phi + L_1 \cdot (\phi + T_1 + T_1^2 + \dots) \cdot S_1 U + L_2 \cdot (\phi + T_2 + T_2^2 + \dots) \cdot S_2 U + KU$$

を数式化すると

$$\begin{aligned}
D(z) &= 1 + z^2 \cdot (1 - z^3)^{-1} \cdot z \cdot D(z) + z^2 \cdot (1 - z^3)^{-1} \cdot z \cdot D(z) + z^3 \cdot D(z) \\
&= \frac{1}{1 - z^2 \cdot (1 - z^3)^{-1} \cdot z - z^2 \cdot (1 - z^3)^{-1} \cdot z - z^3} \\
&= \frac{1 - z^3}{1 - 4z^3 + z^6} \\
&= \frac{1 - t}{1 - 4t + t^2} \quad (z^3 = t \text{ と置いた。}) \\
&= \frac{1 - t}{(t - \alpha) \cdot (t - \beta)} \quad (\alpha = 2 - \sqrt{3}, \beta = 2 + \sqrt{3} \text{ と置いた。}) \\
&= \left(\frac{1}{t - \alpha} - \frac{1}{t - \beta} \right) \cdot \frac{1 - t}{\alpha - \beta} \\
&= \left\{ -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\beta}\right)} \right\} \cdot \frac{1 - t}{\alpha - \beta} \\
&= \left\{ -\frac{1}{\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^n + \frac{1}{\beta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\beta}\right)^n \right\} \cdot \frac{1 - t}{\alpha - \beta} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta^{n+1}} - \frac{1}{\alpha^{n+1}} \right) \cdot t^n \cdot \frac{1 - t}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}} \right) \cdot t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}} \right) \cdot t^{n+1} \right\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}} - \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} \right) \cdot t^n \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\beta^{n+1}} - \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} \right) \cdot t^n \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{n+1}} - \frac{1-\beta}{\beta^{n+1}} \right) \cdot t^n
\end{aligned}$$

$\alpha = 2 - \sqrt{3}$, $\beta = 2 + \sqrt{3}$, $t = z^3$ をもどすと、次式を得る。

$$D(z) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{(2-\sqrt{3})^{n+1}} + \frac{\sqrt{3}+1}{(2+\sqrt{3})^{n+1}} \right) \cdot z^{3n}$$

これが、 $3 \times 2n$ の大きさの長方形のドミノタイル張りの総数の母関数である。

定理 4.1 $3 \times 2n$ の大きさの長方形のドミノタイル張りの総数を P_n と書くと、

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot z^n = \frac{1-z^3}{1-4z^3+z^6} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{(2-\sqrt{3})^{n+1}} + \frac{\sqrt{3}+1}{(2+\sqrt{3})^{n+1}} \right) \cdot z^{3n}$$

が成り立つ。

5 まとめと将来の展望

本研究で、長方形の縦の長さが3で横の長さが偶数の場合のドミノタイル張りについて考えたが、縦の長さが奇数の場合を一般化するまでには至らなかった。おそらく、縦の長さが大きくなるにつれ、式変形がどんどん複雑化してくると考えられる。長方形の縦の長さが5,7,9,...の場合を考え、一般化の場合の予想を立てることが今後の展望となるだろう。今回、母関数を用いて考えたが、他の方法でなら早く一般化までたどり着けるかもしれない。ダイマー模型で考えるのも興味深い。

今回、パズルという万人が馴染み深いものから始めて、より深い問題を数学的に考えることができ嬉しく思っている。理系の道に進んだことによって新たな角度から物事を考えることができると感じた。

本論文の執筆にあたり、多忙である中、終始面倒を見ていただいた西山先生をはじめ、研究室の仲間、関わったすべての方々に感謝したい。

参考文献

- [1] 瀬山士郎「不可能を証明する」, 青土社, 2010.
- [2] G.E.Andrews , K.Eriksson 「整数の分割」, 佐藤文広訳, 数学書房, 2006.
- [3] 高崎金久「ダイマー模型」, 数学セミナー (2011年1月号).
- [4] P.Kasteleyn ,The physics of dimers on a lattice ,Physica 27 1209-1225 ,1961.
- [5] R.J.Wilson 「グラフ理論入門」, 西関隆夫・西関裕子共訳, 近代科学社, 2006.
- [6] R.L.Graham ,D.E.Knuth ,O.Patashnik 「コンピュータの数学」, 有澤誠也訳, 共立出版, 1993.