ブレスードの全単射対応の一般化と分割恒等式の証明

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科
西山研究室

15106091　宝積佑樹

2010 年 2 月 18 日

目次

1　序

数の足し合わせは 1 万年前の人類によってすでに行われていた．それは当時の壁画などから伺える．では, 逆にある数をいくつかの数に分けるということは行われていたのだろうか．その答えはわからないが, 本研究では, 先史時代人にも説明できるような組み合わせ論的な議論で考察を進める．例えば, 次のような場面を想像してみよう．牧場に 4 頭馬がいるとする．その中で雄雌それぞれ 2 頭いて, その内分けとして大人と子どもが 1 頭ずついる．その際に馬の数え方としてただ 4 頭いるという訳でなく, 雄 2 頭雌 2 頭で合わせて 4 頭という数え方 $(2+2=4)$ もあれば, 大人と子どもを別として数えるとしたら, 雄の大人 1 頭, 雄の子ども 1 頭, 雌の大人 1 頭, 雌の子ども 1 頭で合わせて 4 頭いる $(1+1+1+1)$ と考えることもできる．では今度は元気な馬が 3 いたら．馬の数をもっと増やしたら．親子をペアで 1 頭とするならば．このように数をいくつかの数に分けて, その分け方はいくらあるか, 少し条件をつけたらどうなるかということをような問題も考えられる．このような問題を数の分割と呼び, 数を分けた際の各成分を和因子と呼ぶ．卒業研究ではそのような分割の理論について研究を行った．

分割の個数を分割関数呼び, 2 種の分割関数が等しいような主張を分割恒等式と呼ぶのだが, 卒業研究において, 私はブレスードが導いた分割恒等式に興味を持ち, 研究範囲を狭めた．　詳しくは第 3 章を見てもらいたいのだが, 彼は和因子が k-差的な n の分割を条件をつけた n の分割の個数と等しいこと導いた．ここで, 和因子が k-差的とは, 隣あった和因子同士が少なくとも k 以上離れていることである．

私は彼が行ったアルゴリズムを応用して新しい分割恒等式を 2 つ導いた．

1 つ目は, 和因子は $(2k+1)$-差的な n の分割の個数と, 和因子は相異なり, かつ, (偶数和因子) $\geq 2 \times$ (奇数和因子の個数)+2, かつ, 偶数和因子同士, 奇数和因子同士は $(2k+2)$-差的な n の分割の個数が等しいという分割恒等式を．

2 つ目として, 和因子は d-差的な n の分割の個数と, 和因子は相異なり, かつ, (d の倍数の和因子) $\geq d \times$ (d の倍数でない和因子の個数) $+d$, かつ, d の倍数でない和因子は d-差的な n の分割の個数は等しいという分割恒等式を導いた．ブレスードと私が導いたアルゴリズムは似ているが, 別の分割恒等式を導いていることが分かる．なぜ違うのか, どこが異なっているのを本論文§ 3, § 4 に記載したので, みていただきたい．論文の構成として, 第 2 章に私の主定理をを読むための基本知識を記載し, 第 3 章にブレスードが導いた分割恒等式を紹介する．第 4 章に私の研究結果を記載した．その後に, まとめ, 今後の展望, 参考文献を書いた．

それでは先史時代人でも理解できる数学の世界へ導こう.

2　分割

2.1　分割

自然数 n をいくつかの自然数の和に分ける仕方のことを**分割**という. 例えば, $6 = 3+2+1$ だから, $(3+2+1)$ は 6 の分割である. これを $(3,2,1)$ のように書くこともある. また, 分割 (上の例では 3,2,1) の各成分のことを**和因子**と呼ぶ. 以下に分割を表す記号を紹介する. 自然数 n に対して $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l$ と書けているとき, その和因子 $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ を大きいものから広義単調減少になるように並べて分割 λ を

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l), \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0$$

と表す. このとき

$$n = |\lambda| = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \qquad (\lambda : \text{分割} \quad \lambda_i : \text{和因子})$$

である. $n = |\lambda|$ を分割の**サイズ**, l を $l(\lambda)$ と書いて, λ の**長さ**と呼ぶ. n の全ての分割の集合を $\mathcal{P}_n$ と書き

$$\mathcal{P}_n = \{\lambda \,|\, |\lambda| = n\}$$

と表す.

例 1. $n = 4$ の分割

$$\mathcal{P}_4 = \{(4), (3,1), (2,2), (2,1,1,1), (1,1,1,1)\}$$

分割 λ が k-差的であるとは, その和因子が

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq k \quad (1 \leq i \leq l(\lambda) - 1)$$

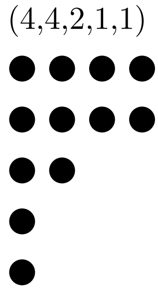
を満たすことであるこれは隣り合った和因子が少なくとも k だけ離れていることを意味している. 例えば 1-差的な分割は, 和因子が相異なる分割に等しい.

例 2. 3 差的な $n = 6$ の分割

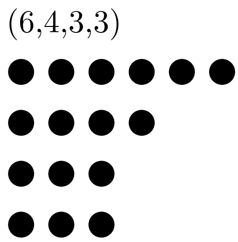
$$\mathcal{P}_6 = \{(6), (5,1)\}$$

2.2 フェラーズグラフ

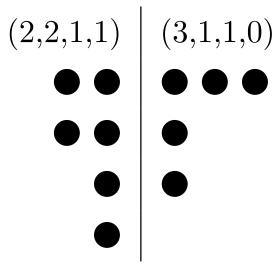
分割を図示する方法として, ドットを用いた表示方法がある. この表示方法をフェラーズグラフという. フェラーズグラフでは横の並びを行, 縦の並びを列と呼ぶ. λ のフェラーズグラフは第 i 行目に λ_i 個のドットを左端がそろうように並べる. 例として, 分割 $(4,4,2,1,1)$ に対しては第 1 行目にドットを 4 つ, 第 2 行目にもドットを 4 つ, 第 3 行目にドットを 2 つ, 第 4 行目にドットを 1 つ, そして, 第 5 行目にドットを 1 つ並べると



となる. 同様にして $(6,4,3,3)$ のフェラーズグラフは



となる. また, $(2,2,1,1)+(3,1,1,0)$ と表示した際はフェラーズグラフにおいて



のことを示し, 分割としては $(5,3,2,1)$ と等しいことを表している.

2.3 分割関数

ある条件 Q を満たす n の分割の個数を $p(n|$ 条件 Q$)$ で表し, 関数 $p(n|$ 条件 Q$)$ を**分割関数**を呼ぶ. また分割関数を記号を用いて表すと,

$$p(n|\text{ 条件 Q}) := |\{\lambda \in \mathcal{P}_n | \lambda_i \text{ は条件 Q を満たす }\}|$$

となる.

例 3. 条件 Q を「和因子は全て奇数である」と置き換えて, $n = 6$ の分割を考える. すると, $n = 6$ の「和因子は全て奇数である」分割の集合は

$$\{\lambda \in \mathcal{P}_6 | \lambda_i \in 2\mathbf{Z} + 1\} = \{(5,1),(3,3),(3,1,1,1),(1,1,1,1,1,1)\}$$

となり, $n = 6$ の「和因子は全て奇数である」分割の分割関数は

$$p(6|\lambda_i \in 2\mathbf{Z} + 1) = 4$$

となる. これは $p(6)$ 以下になることが分かる.

例 4. 条件 Q「和因子は全て 1 と 2 からなる」と置き換えて, $n = 5$ の分割を考える. すると, $n =$ の「和因子は全て 1 と 2 なる」分割の集合は

$$\{\lambda \in \mathcal{P}_5 | \lambda_i \in \{1,2\}\} = \{(2,2,1),(2,1,1,1),(1,1,1,1,1)\}$$

となり, $n = 5$ の「和因子は全て 1 と 2 からなる」分割の分割関数は

$$p(5|\lambda_i \in \{1,2\}) = 3$$

となる. これは $p(5)$ 以下になることが分かる.

例のように分割の和因子に条件 Q をつけると, 分割の個数は少なくなることが分かる.

2.4 分割恒等式

「任意の正整数に対し, ある種の分割と別の種の分割とが同数存在する」というような主張を**分割恒等式**という. 例として, 有名なオイラーの定理を証明する. 和因子が全て奇数の n の分割の個数と和因子が全て相異なる n の分割の個数は等しい. つまり

定理 5 (オイラーの恒等式)**.**

$$p(n|\text{ 和因子は全て奇数}) = p(n|\text{ 和因子は全て 1 と 2 からなる})$$

が成立する．

証明．和因子が全て奇数である条件を A, 和因子が全て 1 と 2 からなる条件を B とし

$$
\begin{aligned}
\text{条件 A} &: \lambda_i \in 2\mathbf{Z}+1 \quad (1 \leq i \leq l) \\
\text{条件 B} &: \lambda_i \neq \lambda_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1)
\end{aligned}
$$

と書く．証明のアルゴリズムを以下のように行う．

1 条件 A を満たす分割を考える．$(3,3,3,1,1,1,1)$

2 先頭から見て 2 つ同じ和因子が並んでいたら, その和を 1 つの和因子に置き換える．$(3,3,3,1,1,1,1) \to ((3,3),3,(1,1),(1,1)) \to (6,3,2,2)$

3 これを同じものがなくなるまで繰り返す．$(6,3,2,2) \to (6,3,(2,2)) \to (6,3,4)$

この操作を行うと最終的に条件 B を満たす分割を得る．この操作は可逆で, 条件 B を満たす分割を考え, 和因子が偶数であれば 2 つに分け, その操作を和因子全てが 2 つに分けることができない, つまり, 和因子がすべて奇数になるときに操作を終了させると, 条件 A を満たす分割となる．したがって, 条件 A を満たす分割と条件 B を満たす分割は 1 対 1 のペアを作れ, 条件 A を満たす分割の個数と条件 B を満たす分割の個数は等しくなる． $\square$

例 6. $n=6$ とすると, 条件 A を満たす分割と条件 B を満たす分割は以下のようになる．

条件 A を満たす分割	条件 B を満たす分割
(1,1,1,1,1,1)	(6)
(3,1,1,1)	(5,1)
(3,3)	(4,2)
(5,1)	(3,2,1)
4 通り	4 通り

オイラーの恒等式のアルゴリズムで上の表に対応させると, $(1,1,1,1,1,1)$ と $(4,2)$ が, $(3,1,1,1)$ と $(3,2,1)$ が, $(3,3)$ と (6) が, $(5,1)$ と $(5,1)$ がペアとなり, 条件 A を満たす分割の個数と条件 B を満たす分割の個数は等しくなることがわかる．

3　ブレスードの全単射

3.1　ブレスードのプロフィール

ブレスード (David Mairus Bressoud) 教授はアメリカ生まれの数学者でマクレクター大学の教授である．またアメリカ数学協会の理事長も努めている．彼は整数論, 組み合わせ論を専門としており, ロジャース-ラマヌジャン恒等式に興味をもっている．今回紹介する定理もロジャース-ラマヌジャンの恒等式の一般化を目指して生まれたものである．

3.2　ブレスードの美しい全単射

彼が導いた定理は以下のものである．k-差的な n の分割の個数と, 和因子が全て相異なり, かつ, $1 \leq i \leq k$ において, (mod k) で i に合同である最小の和因子は, $k \times \sum_{j=1}^{i-1} r(j)$, ($r(j)$ は (mod k) で j に合同である和因子の個数) より大きい n の分割の個数に等しいというものである. 数式で表すと, 上の設定の下に次の分割恒等式が成り立つ.

定理 7. [Bressoud,1978][2]

$$
\begin{aligned}
&p(n|k\text{-差的}) \\
&= p(n|\text{和因子は相異なり}, \text{かつ}, \\
&\qquad ((\mathrm{mod}\ k) \text{ で } i \text{ に合同になる和因子}) \\
&\qquad > k\sum_{j=1}^{i-1} r(j),\ r(j) = ((\mathrm{mod}\ k) \text{ で } j \text{ に合同となる和因子の個数}))
\end{aligned}
$$

証明. $k \geq 1$ とする．$(q(1), \ldots, q(k))$ を (mod k) で互いに合同でない剰余形 $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ の完全代表系とする．この $(q(1), \ldots, q(k))$ に対して, (mod k) で $(q(1), \ldots, q(k))$ と合同にさせることを行う．$r(i)$ を (mod k) で $q(i)$ に合同な和因子の個数として, このような分割の全体を

$$C(n; k; q(1), \ldots, q(k); r(1), \ldots, r(k))$$

と書く．さらに C の部分集合 A, B を次のように定義する．

$$\begin{aligned}&A(n;k;q(1),\dots,q(k);r(1),\dots,r(k))\\&\qquad\qquad := k\text{-差的である } n \text{ の分割の個数}\\&B(n;k;q(1),\dots,q(k);r(1),\dots,r(k))\\&\qquad\qquad := \text{和因子は相異なり, かつ, } (\mathrm{mod}\ k) \text{ で } q(i) \text{ に合同な和因子のうち,}\\&\qquad\qquad\qquad \text{最小なものは } k\times\sum_{j=1}^{i-1} r(j) \text{ よりも大きい } n \text{ の分割の個数}\end{aligned}$$

また, S を分割の和因子の個数とし,

$$S=\sum_{j=1}^{k} r(j)$$

である．

補題 8.

$$\begin{aligned}&A(n;k;q(1),\dots,q(k);r(1),\dots,r(k))\\&\qquad = C(n-kS(S-1)/2;k;q(1),\dots,q(k);r(1),\dots,r(k))\end{aligned}$$

証明. k-差的な分割を考える．この分割の 2 番目に小さい和因子から k を引き, 3 番目に小さい和因子から $2k$ を引き, 同様にして, j 番目に小さい和因子から $k(j-1)$ を引く．すると, $(\mathrm{mod}\ k)$ で $q(i)$ と合同となる和因子の個数が $r(i)$ を満たす $n-kS(S-1)/2$ の分割を得る．この操作は可逆で, $n-kS(S-1)/2$ の分割の j 番目に小さい和因子に $k(j-1)$ だけ加えると, k-差的な分割を得る． □

補題 9.

$$\begin{aligned}&B(n;k;q(1),\dots,q(k);r(1),\dots,r(k))\\&\qquad = C(n-kS(S-1)/2;k;q(1),\dots,q(k);r(1),\dots,r(k))\end{aligned}$$

証明. 和因子は相異なり, $(\mathrm{mod}\ k)$ で $q(i)$ と合同となる最小の和因子は $k\times\sum_{l=1}^{i-1} r(l)$ より大きい分割を考える．$(\mathrm{mod}\ k)$ で $q(1)$ と合同となる 2 番目に小さい和因子から k だけ引き, $(\mathrm{mod}\ k)$ で $q(1)$ と合同となる 3 番目に小さい和因子から $2k$ だけ引き, 同様にして, $(\mathrm{mod}\ k)$ で $q(1)$ と合同となる最も大きい和因子から $k(r(1)-1)$ だけ引く．

次に, $(\mathrm{mod}\ k)$ で $q(2)$ と合同となる最小の和因子から $kr(1)$ だけ引き, $(\mathrm{mod}\ k)$ で $q(2)$ と合同となる 2 番目に最小となる和因子から $k(r(1)+1)$ 引き, 同様にして, $(\mathrm{mod}\ k)$ で $q(2)$ と合同となる最大の和因子から $k(r(1)+r(2)-1)$ 引く．

この操作を続けていき一般的な (mod k) で $q(i)$ と合同となる j 番目の和因子から $k(j-1+\sum_{l=1}^{i-1} r(l))$ 引く．ここで,

$$\begin{aligned}
&((\mathrm{mod}\ k)\ で\ q(i)\ と合同となる\ j\ 番目に小さい和因子)\\
&\qquad \geq k(j-1) + ((\mathrm{mod}\ k)\ で\ q(i)\ と合同となる最小和因子)\\
&\qquad > k(j-1) + k\sum_{l=1}^{i-1} r(l)
\end{aligned}$$

また,

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r(i)} k(j-1+\sum_{l=1}^{i-1} r(l)) = kS(S-1)/2$$

であるから, このようにして $1 \leq i \leq k$ に対して, (mod k) で $q(i)$ と合同となる和因子の個数が $r(i)$ となる $n - kS(S-1)/2$ の分割を得る．この操作は可逆で, (mod k) で $q(i)$ と合同となる和因子の個数が $r(i)$ であるような $n - kS(S-1)/2$ の分割を考え, (mod k) で $q(i)$ と合同となる j 番目に小さい和因子に $k(j-1+\sum_{l=1}^{i-1} r(l))$ だけ加える．すると和因子は相異なり, かつ, (mod k) で最小になる和因子は $k \times \sum_{l=1}^{i} r(l)$ より大きい n の分割を与える． □

以上, 補題 8, 補題 9 より定理が示せた．[定理の証明終わり] □

系 10. **定理 7** で $k=2$ とすると次の分割恒等式を得る．

$$\begin{aligned}
&p(n\,|\,2\text{-差的})\\
&= p(n\,|\,和因子は相異なり, かつ, (偶数和因子) > 2 \times (奇数和因子の個数))
\end{aligned}$$

例 11. $n=13$ としたときの 2-差的な分割の集合と個数と, 和因子は相異なり, かつ, (偶数和因子) $>$ 2 $\times$ (奇数和因子の個数) の条件を満たす分割の集合と個数を以下の表に記載する．

2-差的な分割	和因子は相異なり, かつ, (偶数和因子) $>$ 2 $\times$ (奇数和因子の個数)
(13), (12,1), (11,2), (10,3), (9,4), (8,5), (8,4,1)	(13), (12,1), (10,3), (9,4), (8,5), (8,4,1), (7,6)
7 通り	7 通り

4　k-差的な分割の分割恒等式

この章ではブレスードのアルゴリズムを応用して, 私が導いた分割恒等式を紹介する.

4.1　$(2k+1)$-差的な分割の分割恒等式

$(2k+1)$-差な分割とは, 和因子同士の差が $(2k+1)$ 以上の分割のことを示す. $(2k+1)$-差的な n の分割の個数は, 和因子は相異なり, かつ, (偶数和因子) $\geq 2\,\times$ (奇数和因子の個数)+2, かつ, 偶数和因子同士, 奇数和因子同士は $(2k+2)$-差的な n の分割の個数に等しいことを導いた. 数式を以下の定理で書くと $(2k+1)$-差的な分割に対して、次の分割恒等式が成り立つ.

定理 12.

$$p(n|\ \text{和因子は}\ (2k+1)\text{-差的}) = p(n|\ \text{条件}\quad,\quad,\quad,\quad\text{を満たす})$$

ただし、条件　,　,　,　は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
&\text{条件}\quad : \lambda_i \neq \lambda_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1) \\
&\text{条件}\quad : \lambda_i \in 2\mathbf{Z} \implies \lambda_i \geq 2 \times |\{j|1 \leq j \leq l, \lambda_j \in 2\mathbf{Z}+1\}| + 2 \\
&\text{条件}\quad : \lambda_i, \lambda_j \in 2\mathbf{Z} \implies |\lambda_i - \lambda_j| \geq 2k+2 \quad (1 \leq i, j \leq l) \\
&\text{条件}\quad : \lambda_i, \lambda_j \in 2\mathbf{Z}+1 \implies |\lambda_i - \lambda_j| \geq 2k+2 \quad (1 \leq i, j \leq l)
\end{aligned}$$

証明. 以下のアルゴリズムで証明する. まず $k=1$, つまり 3-差的な n の分割に対して証明しよう.

(I) 3-差的な分割を考える.　$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l-1}, \lambda_l)$

(II) この分割を左端が上に行くにつれ 2 ずつ左にずれていくように整列しなおす. 垂直線をその左側には最後の行の和因子が 1 になるように引く.

$$\begin{array}{c|c}
2l-1 & \lambda_1 - (2l-1) \\
2l-3 & \lambda_2 - (2l-3) \\
\vdots & \vdots \\
3 & \lambda_{l-1} - 3 \\
1 & \lambda_l - 1
\end{array}$$

(　) 垂直線の右側において, 和因子が奇数のものを和因子が大きいものから小さいものへと並べ, 次に和因子が偶数の行を同様に並べ直す.

$$
\begin{array}{c|c}
2l-1 & \mu_1 \\
2l-3 & \mu_2 \\
\vdots & \vdots \\
2(l-s+1)+1 & \mu_s \\
\hline
2t-1 & \mu_{s+1} \\
\vdots & \vdots \\
3 & \mu_{s+t-1} \\
1 & \mu_{s+t}
\end{array}
$$

$$
(\mu_1, \ldots, \mu_s \in 2\mathbf{Z}+1, \mu_i \neq \mu_{i+1} \quad (1 \leq i \leq s-1), \mu_s \geq 1,
$$

$$
\mu_{s+1}, \ldots, \mu_{s+t} \in 2\mathbf{Z}, \mu_j \neq \mu_{j+1} \quad (1 \leq j \leq t-1), \mu_{s+t} \geq 0, s+t=l)
$$

(　) 垂直線を取り除きグラフの各行を新しい和因子とみなす. すると $\mu_i \neq \mu_{i+1}, \mu_j \neq \mu_{j+1}$ より条件　を満たし, $2(l-s+1)+1+\mu_s \geq 2(l-s+1)+1+1 \geq 2t+2$ より条件　を満たし, $\mu_i \neq \mu_{i+1}$ より条件　を満たし, $\mu_j \neq \mu_{j+1}$ より条件　を満たす分割を得た. 今の操作の逆を行えば, 条件　,　,　,　を満たす分割は和因子が 3-差的な分割を得る. したがって, 3-差的な分割と条件　,　,　,　を満たす分割は 1 対 1 でペアを作れその個数は等しい (証明終わり) □

例 13. **定理 12** において, $n=13$,$k=1$ としたときの 3-差的な分割の集合と, 条件　,　,　,　を満たす分割の集合を以下の表に記載する.

3-差的な分割	条件　,　,　,　を満たす分割
(13), (12,1), (11,2), (10.3) (9,4), (8,5), (8,4,1)	(13), (12,1), (10,3), (9,4) (8,5), (8,4,1), (7,6)
7 通り	7 通り

4.2　d-差的な分割の分割恒等式

前章の [定理 12] は, 和因子の差が奇数のときに成り立つ分割恒等式であった. この章では和因子の差に制限をなくし, d-差的な分割の個数に対する分割恒等式を紹介する. 和因子が d-差的な n の分割の個数は, 和因子が相異なり, かつ, (和因子は d の倍数) $\geq d \times$ (d でない和因子の個数) $+ d$, かつ, d の倍数でない和因子は d 差的な n の分割の個数と等し

いことを紹介する．数式を以下の定理で書くと d-差的な分割に対して，次の分割恒等式が成り立つ．

定理 14.

$$p(n|\text{ 条件 } C) = p(n|\text{ 条件 } D, E, F)$$

ただし，条件 C,D,E,F は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
&\text{条件 } C : \lambda_i \geq \lambda_{i+1} + d \quad (1 \leq i \leq l-1) \\
&\text{条件 } D : \lambda_i \neq \lambda_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1) \\
&\text{条件 } E : \forall \lambda_i \in d\mathbf{Z}, \lambda_i \geq d \times |\{\lambda_j | \lambda_j \notin d\mathbf{Z}\}| + d \quad (1 \leq i, j \leq l) \\
&\text{条件 } F : \lambda_i, \lambda_j \notin d\mathbf{Z} \Rightarrow |\lambda_i - \lambda_j| \geq d \quad (1 \leq i, j \leq l)
\end{aligned}$$

証明. 以下に 2 種類の分割の間の全単射を与えるアルゴリズムを紹介する．ここでは $d = 3$ の場合を例にとって説明しよう．

( ) 条件 C を満たす分割 λ を考える． $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l-1}, \lambda_l)$

( ) この分割を左端が上に向かって 3 ずつ左にずらして並べる．垂直線をその左側には最後の行の和因子が 0 になるように引く．

$$\begin{array}{c|c}
3(l-1) & \lambda_1 - 3(l-1) \\
3(l-2) & \lambda_2 - 3(l-2) \\
\vdots & \vdots \\
3 & \lambda_{l-1} - 3 \\
0 & \lambda_l
\end{array}$$

( ) 垂直線の右側において，まず和因子が 3 の倍数で大きいものから小さいものへと並べ，次に和因子が 3 の倍数でないものを同様に並べ直す．

$$\begin{array}{c|c}
3(l-1) & \mu_1 \\
3(l-2) & \mu_2 \\
\vdots & \vdots \\
3(l-s) & \mu_s \\
\hline
3(t-1) & \mu_{s+1} \\
\vdots & \vdots \\
3 & \mu_{s+t-1} \\
0 & \mu_{s+t}
\end{array}$$

$$(\mu_1, \ldots, \mu_s \quad (1 \le i \le s), \in 3\mathbf{Z}, \mu_s \ge 3, \mu_{s+1}, \ldots, \mu_{s+t} \quad (1 \le j \le t), \notin 3\mathbf{Z}, \\ \mu_{s+t} \ge 1, s+t = l)$$

(　) 垂直線を取り除きグラフの各行を新しい和因子とみなす．すると $\mu_i \ge \mu_{i+1}, \mu_j \ge \mu_{j+1}$ より条件 D を満たし, $3(l-s) + \mu_s \ge 3(l-s) + 3 = 3t + 3$ より条件 E を満たし, $\mu_i \ge \mu_{i+1}$ より条件 F を満たす分割を得た.

この操作は可逆で, 今の操作の逆を行えば, 条件 D,E,F を満たす分割は条件 C を満たす分割を得る．したがって, 条件 C を満たす分割と条件 D,E,F を満たす分割の間には上のアルゴリズムによって全単射が構成できる．したがって, その個数は等しい． □

例 15. **定理 14** において,$n = 13$, $d = 3$ としたときの条件 C を満たす分割の集合と, 条件 D,E,F を満たす分割の集合を次の表に記載する.

条件 C を満たす分割	条件 D,E,F を満たす分割
$(13), (12,1), (11,2), (10,3),$ $(9,4), (8,5), (8,4,1)$	$(13), (12,1), (11,2), (9,4),$ $(8,5), (8,4,1), (7,6)$
7 通り	7 通り

5　まとめ

和因子が d-差的な n の分割に対する 2 つの分割恒等式を導いた.

1.

$$
\begin{aligned}
&p(n|\text{ 和因子は }(2k+1)\text{-差的}) = p(n|\text{ 条件 }\quad,\quad,\quad,\quad\text{を満たす})\\
&\text{条件}\quad:\lambda_i \neq \lambda_{i+1}\quad(1 \leq i \leq l-1)\\
&\text{条件}\quad:\lambda_i \in 2\mathbf{Z} \implies \lambda_i \geq 2 \times |\{j|1 \leq j \leq l, \lambda_j \in 2\mathbf{Z}+1\}| + 2\\
&\text{条件}\quad:\lambda_i, \lambda_j \in 2\mathbf{Z} \implies |\lambda_i - \lambda_j| \geq 2k+2\quad(1 \leq i,j \leq l)\\
&\text{条件}\quad:\lambda_i, \lambda_j \in 2\mathbf{Z}+1 \implies |\lambda_i - \lambda_j| \geq 2k+2\quad(1 \leq i,j \leq l)
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
&p(n|\text{ 条件 }C) = p(n|\text{ 条件 }D,E,F)\\
&\text{条件 }C: \lambda_i \geq \lambda_{i+1} + d\quad(1 \leq i \leq l-1)\\
&\text{条件 }D: \lambda_i \neq \lambda_{i+1}\quad(1 \leq i \leq l-1)\\
&\text{条件 }E: \forall\lambda_i \in d\mathbf{Z}, \lambda_i \geq d \times |\{\lambda_j|\lambda_j \notin d\mathbf{Z}\}| + d\quad(1 \leq i,j \leq l)\\
&\text{条件 }F: \lambda_i, \lambda_j \notin d\mathbf{Z} \Rightarrow |\lambda_i - \lambda_j| \geq d\quad(1 \leq i,j \leq l)
\end{aligned}
$$

6　今後の展望

本研究で, 教科書 [1] に載っていた 2-差的な分割に対する分割恒等式一般化して, k-差的な和因子をもつ n の分割の分割恒等式を 2 つ導いた. いずれも分割の間に全単射対応を与えるアルゴリズムによるものである. 前者の対応では和因子同士の差が奇数のときしか一般化できなかった. これを奇数という制限だけでなく, 偶数のときもできるようにすることが今後の課題である. 後者の方では和因子同士の差の制限が無いので, うまく導くことができた. また, 後者の定理はブレスードの定理と少し似ている部分があるが, どうして異なる条件になってしまったのか調べてみたい.

全体として, もう少し条件が少なくシンプルな分割恒等式を導けたらよかったと感じる. また, ブレスードのアルゴリズムを使わず, 別のアルゴリズムを発見し, 新たな分割恒等式を導けたらよいと思う.

7 参考文献

参考文献

[1] ジョージ・アンドリュース, キムモ・エリクソン著 佐藤文広 訳 「整数の分割」 数学書房

[2] D.M.Bressoud A new family of partition identities, Pacific J Math. 77(1978)71-74