整数の結合について

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科
15106088　福富 俊介　(西山研究室)

2010 年 2 月 17 日

目次

1　プロローグ

この論文では、整数の結合 (または順序つき分割とも呼ぶ) をテーマにしている。本研究を行った動機は、私がセミナーで用いた教科書 (参考文献 [1]) に載っていた、結合とフィボナッチ数に関する演習問題に興味を持ったことである。教科書で紹介していた結合は、n の和因子として 1 と 2 のみを許す結合のみだった為、指定する和因子をより一般化することを目標とした。その結合について説明する為に、まずは整数の分割を紹介しよう。分割とは、例えば 5 という整数を $4+1$ や $2+2+1$ などと表す書き表し方のことをいい、実際に 5 の分割は、

$$5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1$$

の 7 通りある。分割を表す各正整数のことを和因子といい、ある分割の和因子の並びを入れ替えても同じ分割を表すものとする。従って、分割を表すときは、大きい和因子から小さい和因子へと並べることにする。

それに対し、ある分割の和因子の並びを入れ替えたものを別の対象と考えた方がよいこともある。このように和因子の順序を考慮に入れた分割を結合という。例えば、分割で $2+2+1$ としていたものは、結合では $2+2+1, 2+1+2, 1+2+2$ の異なる 3 つの結合と見なす。

本研究では、結合の和因子が集合 $1, 2, \cdots \ell$ に属する場合と、1 と m のみからなる場合の 2 通りの場合を考え、そのときの結合の個数について漸化式を用いて研究する。この研究の主定理は、以下の 2 つの定理である。

定理 1.1. 和因子が $1, 2, \cdots, \ell$ からなる $n \geq 1$ の結合の個数を $\gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n)$ と書くと、漸化式

$$\gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n) = \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n-\ell)$$

が成り立つ。

定理 1.2. 和因子が 1 と m のみからなる $n \geq 1$ の結合の個数を $\gamma_{1,m}(n)$ と書くと、

$$\gamma_{1,m}(n) = \sum_{k=0}^{s} \binom{n-k(m-1)}{k} \qquad s = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$$

が成り立つ。但し、$\lfloor x \rfloor$ は、x 以下の整数のうち最大のものを表す。

元になった公式は、和因子が 1 と 2 からなる n の結合の個数は、その前の 2 項の和に等しいというものである。定理 1.1 は、$1, 2, \cdots$ と続けて ℓ までを和因子に許す n の結合の個数は、その前の ℓ 項までの総和に等しいという $(\ell + 1)$ 項間漸化式で示せている。定理 1.2 は、和因子に 1 ともう 1 種類の自然数 m を許す結合の個数について調べたものである。和因子 m がどのような現れ方をするかという点に着目して、二項係数で示した定理である。

この論文の構成は、この第 1 章を含め、全 5 章からなっている。第 2 章では、本研究の基礎である分割と結合に関する基本的な概念を導入し、第 3 章で本研究に用いるフィボナッチ数列についての解説と、そのフィボナッチ数列に一致する結合の紹介をする。第 4 章で主結果の解説を行い、本研究のまとめと将来の展望を第 5 章に記している。

2 整数の分割と結合

この章では分割と結合に関する基本的な性質を紹介すると共に、後で用いる記号を用意する。分割と結合に関しては主に参考文献 [1] を参照した。

2.1 整数の分割

自然数 n の分割とは、n をいくつかの自然数の和で表す方法のことをいう。

定義 2.1 (n の分割). 自然数の単調非増加列

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$$
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0$$

を考え、

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l = n$$

を満たしているとき、λ を n の**分割**といい、λ_i を**和因子**という。n の分割の集合 (分割全体) を P_n と書く。

例えば、$6 = 3 + 2 + 1$ と表されていれば、$\lambda = (3, 2, 1)$ は 6 の分割である。

定義 2.2 (分割関数). 自然数 n の分割の集合 P_n に含まれる分割の個数を $P(n)$ で表し、$P(n)$ を**分割関数**という。但し、$n = 0$ のときは $p(0) = 1$ ($\varnothing$ の分割が 1 つある)、n が負の整数のときは $p(n) = 0$ と決める。

例 2.1 (5 の分割)**.** $n=5$ のときは、5 の分割は

$$\begin{aligned}&(5)\\&(4,1)\\&(3,2),(3,1,1)\\&(2,2,1),(2,1,1,1)\\&(1^5)\end{aligned}$$

の 7 通りある。ここで $(3,1,1)=(3,1^2)$ とか $(1,1,1,1,1)=(1^5)$ などど書くこともある。このように書いたとき、和因子 i の指数を i の λ における重複度という。従って

$$\begin{aligned}&P_5=\{(5),(4,1),(3,2),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,1,1),(1^5)\}\\&P(5)=7\end{aligned}$$

である。

以降、分割 $(3,1,1)$ のことを $3+1+1$ などのように書くこともある。

2.2 整数の結合

n の結合 (順序つき分割) とは、分割において和因子の順序を考慮に入れたものを指す。

定義 2.3 (n の結合)**.** 自然数の列

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l),\qquad \lambda_i>0 \tag{1}$$

を考え、

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_l=n \tag{2}$$

のとき、λ を n の**結合**という。結合 λ は、(1) のように表すことも (2) のように表すこともある。n の結合の集合 (結合全体) を $C(n)$ と書く。

ここで、分割の際に指定した

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_l>0$$

という条件はない。例えば、分割で $(3,2,1)$ と書き表していたものは、結合では

$$(3,2,1),\ (3,1,2),\ (2,3,1),\ (2,1,3),\ (1,3,2),\ (1,2,3)$$

の 6 通りの書き表し方がある。つまり、

$$\begin{cases} \text{分割} \ \cdots \ \text{順序を考慮しない} & (3,2,1) \\ \text{結合} \ \cdots \ \text{順序を考慮する} & (3,2,1),(3,1,2),(2,3,1),(2,1,3),(1,3,2),(1,2,3) \end{cases}$$

である。

定義 2.4 (結合の個数)**.** 整数 n の結合の集合 $C(n)$ に含まれる分割の個数を $\gamma(n)$ と表す。また、n の和因子が集合 A に属する結合を $C_A(n)$ と書いて、その個数を $\gamma_A(n)$ で表す。分割同様、$n=0$ のときは $\gamma(0)=1$、n が負の整数のときは $\gamma(n)=0$ とする。

例 2.2 (5 の結合)**.** $n=5$ のときは、5 の結合は

$$\begin{aligned} &(5) \\ &(4,1) \\ &(3,2),(3,1,1) \\ &(2,3),(2,2,1),(2,1,2),(2,1,1,1) \\ &(1,4),(1,3,1),(1,2,2),(1,2,1,1),(1,1,3),(1,1,2,1),(1,1,1,2),(1^5) \end{aligned}$$

の 16 通りある。従って

$$\begin{aligned} C(5) = \{&(5),(4,1),(3,2),(3,1,1),(2,3),(2,2,1),(2,1,2),(2,1,1,1) \\ &(1,4),(1,3,1),(1,2,2),(1,2,1,1),(1,1,3),(1,1,2,1),(1,1,1,2),(1^5)\} \\ \gamma(5) = 16& \end{aligned}$$

となる。

以降、結合をいくつか並べるときには左側の和因子から始めて、辞書式順序に従って書き並べることにする。

3 結合とフィボナッチ数

結合に条件をつけて考えることもよくあり、本研究でも扱う場合は全てそのような場合である。まずは 和因子として 1 と 2 のみを許すような結合を考えて、$\gamma_{\{1,2\}}(n)$ を求める。この個数は有名な数列『フィボナッチ数』と一致するが、以下ではこれを示そう。フィボナッチ数に関しては主に参考文献 [2] を参照した。

以降、簡単のために $\gamma_{\{1,2\}}(n)$ を $\gamma_{1,2}(n)$ と書く。

3.1 フィボナッチ数

まず 1 を 2 つ

$$1, 1$$

と並べる。そのすぐ後にこの 2 つの和 $1 + 1 = 2$ を書き加える。

$$1, 1, 2$$

次に最後の 2 つの和 $1 + 2 = 3$ を書き加えよう。

$$1, 1, 2, 3$$

以下同様に、数列の最後から 2 つの数の和を数列につけ加えていくと、次のような数列が並ぶ。

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots \tag{3}$$

こうしてできる数列を、**フィボナッチ数列**という。

定義 3.1 (フィボナッチ数)**.** $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ を初期値とし、漸化式

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

で定まる数列をフィボナッチ数列と呼び、F_n をフィボナッチ数という。

3.1.1 フィボナッチ数の一般項

フィボナッチ数の一般項は、次の式で表せる。

定理 3.1 (F_n の一般項)**.** フィボナッチ数は黄金比 $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ を用いて、

$$F_n = \frac{\tau^n - (-\tau^{-1})^n}{\sqrt{5}} \qquad (n \geq 1)$$

と表すことができる。

Proof. 任意の初期値 G_1,G_2 を与えて、漸化式

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n \tag{4}$$

で決まる数列を、**一般フィボナッチ数列**という。等比数列 $\{r^n\}_{n=1}^{\infty}$ $(r \neq 0)$ であって (4) を満たすものをまず考えよう。そのための必要十分条件は

$$r^{n+2} = r^{n+1} + r^n \tag{5}$$

であるので、(5) の特性方程式

$$r^2 - r - 1 = 0 \tag{6}$$

を考える。特製方程式 (6) の 2 つの解を

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

と書くと、

$$\begin{cases} \alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \\ \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n \end{cases}$$

が成り立つので、α^n と β^n はともに漸化式 (4) を満たす。これらの線形結合を考えると、

$$c\alpha^{n+2} + d\beta^{n+2} = (c\alpha^{n+1} + d\beta^{n+1}) + (c\alpha^n + d\beta^n)$$

となり、$c\alpha^n + d\beta^n$ もまた (4) を満たす。ここで、任意の初期値 G_1,G_2 に対して、連立一次方程式

$$\begin{cases} c\alpha + d\beta = G_1 \\ c\alpha^2 + d\beta^2 = G_2 \end{cases} \tag{7}$$

を考える。

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix}$$

と置くと、$\det A = \sqrt{5}$ $(\neq 0)$ なので、A は逆行列を持つ。ゆえに A は正則行列であって、

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$$

となり、c, d は初期値 G_1, G_2 が与えられれば一意に定まる。よって、G_n の一般項は

$$G_n = c\alpha^n + d\beta^n \qquad (n \geq 1) \tag{8}$$

となる。ここで特に $G_1 = 1, G_2 = 1$ とおくと、$G_n = F_n$ はフィボナッチ数列となるから、連立一次方程式

$$\begin{cases} c\alpha + d\beta = 1 \\ c\alpha^2 + d\beta^2 = 1 \end{cases}$$

を解いて、

$$c = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad d = \frac{-1}{\alpha - \beta} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

がわかる。式 (8) に c, d の値を代入して、定理 3.1 が示せた。 □

[問題]　[一般フィボナッチ数の一般項] $G_1 = s, G_2 = t$ のとき、一般フィボナッチ数列 G_n の一般項

$$G_n = \frac{s(1+\sqrt{5}) + t(1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}\alpha^n + \frac{-s(3+\sqrt{5}) + t(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}\beta^n \tag{9}$$

を示せ。

[解]　$G_1 = s, G_2 = t$ のとき、

$$\begin{cases} c\alpha + d\beta = s \\ c\alpha^2 + d\beta^2 = t \end{cases} \tag{10}$$

である。(10) の第一式の両辺に α を掛けた式と β を掛けた式を用意する。

$$\begin{cases} c\alpha^2 + d\alpha\beta = s\alpha \\ c\alpha\beta + d\alpha^2 = s\beta \end{cases}$$

これに (10) の第二式を用いて、それぞれ c と d を消去した式を作る。

$$c = \frac{s\beta - t}{\alpha\beta - \alpha^2} \quad , \quad d = \frac{s\alpha - t}{\alpha\beta - \beta^2}$$

αとβ には、$\alpha^{-1} = \beta, \beta^{-1} = -\alpha$ の関係があるので、

$$c = \frac{s\beta - t}{\alpha(\beta - \alpha)} = \frac{\beta(s\beta - t)}{\beta - \alpha} = \frac{s\frac{1+\sqrt{5}}{2} + t\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{s(1+\sqrt{5}) + t(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{s\alpha - t}{\beta(\alpha - \beta)} = \frac{-\alpha(s\alpha - t)}{\alpha - \beta} = \frac{-s\frac{3+\sqrt{5}}{2} + t\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{-s(3+\sqrt{5}) + t(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$$

c, d はそれぞれ α^n, β^n の係数なので、(9) を満たす。

3.1.2 フィボナッチとウサギのつがい

フィボナッチは今から約 800 年前、イタリアのトスカーナ地方で活躍した数学者である。本名はレオナルド・ピサノ (Leonard Pisano) で、フィボナッチとはボナッチの息子を意味する。フィボナッチ数に関連する有名な問題として、以下に示す「ウサギのつがいの問題」がある。

[問題] ある人が壁で囲まれた場所に 1 つがいの親ウサギを入れました。1 年間に何つがいのウサギが増えるでしょうか？ 但し、どのつがいも生まれて 2 ヶ月目から毎月 1 つがいのウサギを産むものとする。

[解] $n \geq 1$ に対して数列 T_n, A_n, B_n を次のように決める。

$$\begin{aligned} T_n &: n \text{ ヶ月後のウサギのつがいの総数} \\ A_n &: \text{成熟したウサギのつがいの総数} \\ B_n &: \text{赤ちゃんウサギのつがいの総数} \end{aligned}$$

このように置くと、

$$T_n = A_n + B_n \tag{11}$$

が成り立っている。赤ちゃんつがいは前の月の成熟したつがいの数だけ生まれるので、

$$B_n = A_{n-1} \tag{12}$$

前の月のウサギはずべて、当月には成熟しているから、

$$A_n = T_{n-1} \tag{13}$$

(12), (13) より、

$$B_n = A_{n-1} = T_{n-2} \tag{14}$$

(11), (13), (14) より、T_n は漸化式

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{15}$$

を満たし、これは一般フィボナッチ数列の漸化式 (4) と同じである。ここで条件より、$T_1 = 2, T_2 = 3$ なので、フィボナッチ数 F_n と初期値を比較すると、 $T_n = F_{n+2}$ であることがわかる。したがって、1 ヶ月後 (12 ヶ月後) のウサギの数は、$T_{12} = F_{14} = 377$ となる。以上でフィボナッチ数列の考察を終え、我々の問題に戻ろう。

3.2　和因子が 1 と 2 のみからなる n の結合

和因子が 1 と 2 からなる結合の個数 $\gamma_{1,2}(n)$ は以下の定理で示す通り、その前の 2 項からなる漸化式で表すことができる。これを利用すると、$\gamma_{1,2}(n)$ はフィボナッチ数の項を 1 つずらしたものに他ならないことがわかる。

定理 3.2 (和因子が 1 と 2 からなる n の結合の個数)**.** $n \geq 1$ に対して、

$$\gamma_{1,2}(n) = \gamma_{1,2}(n-1) + \gamma_{1,2}(n-2) \tag{16}$$

が成り立つ。従って、$\gamma_{1,2}(n)$ はフィボナッチ数 F_{n+1} に等しい。但し、$n < 0$ のときは、$\gamma_{1,2}(n) = 0$ と解釈する。

この定理は参考文献 [1] を参照した。

例 3.1 (和因子が 1 と 2 からなる 5 の結合)**.** n が 0 から 5 までの結合について考える。まず、いちばん左の和因子 λ_1 が 1 のときと 2 のときで場合分けをして表組みをする。

表 3.1 (n が 0 から 5 までの場合の $C_{1,2}(n)$)**.**

n	$C_{1,2}(n), \lambda_1 = 2$	$C_{1,2}(n), \lambda_1 = 1$	$\gamma_{1,2}(n)$
0			1
1		(1)	1
2	(2)	(1^2)	2
3	$(2,1)$	$(1,2), (1^3)$	3
4	$(2,2), (2,1,1)$	$(1,2,1), (1,1,2), (1^4)$	5
5	$(2,2,1), (2,1,2), (2,1,1,1)$	$(1,2,2), (1,2,1,1), (1,1,2,1), (1,1,1,2), (1^5)$	8

ここで、λ_1 の値に注目する。$\lambda_1 = 1$ の n の結合の個数は、$n-1$ の結合の個数と一致し、$\lambda_1 = 2$ の n の結合の個数は、$n-2$ の結合の個数と一致している。さらに言えば、n の結合の各和因子から λ_1 を取り除くと、$\lambda_1 = 1$ の n の結合は $n-1$ の結合と、$\lambda_1 = 2$ の n の結合は $n-2$ の結合と一致している。$n = 5$ の結合に対しては、

$$C_{1,2}(5;\lambda_1 = 1) \text{ の各和因子から}\lambda_1\text{を除いた結合} = C_{1,2}(4)$$
$$C_{1,2}(5;\lambda_1 = 2) \text{ の各和因子から}\lambda_1\text{を除いた結合} = C_{1,2}(3)$$

が言える。(”;” 以降は、その結合の条件を指定している。) 当然、両辺の個数も一致する

ので、

$$\gamma_{1,2}(5;\lambda_1=1)=\gamma_{1,2}(4)$$
$$\gamma_{1,2}(5;\lambda_1=2)=\gamma_{1,2}(3)$$

が言えて、$n=5$ で

$$\gamma_{1,2}(5)=\gamma_{1,2}(4)+\gamma_{1,2}(3)$$

が示せた。

Proof. 先ほどの例で挙げた "$\lambda_1=a$ の n の結合の個数は、$n-a$ の結合の個数と一致" することが一般に通用することを示すことができれば、一般の n の場合にも同様のことが言える。ある正整数からなる結合

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_l)$$

と、λ から和因子 λ_1 を除いた結合

$$\lambda'=(\lambda_2,\dots,\lambda_l)$$

は、λ_1 を出し入れすることで自由に変換できる。ゆえに、λ を結合、$|C|$ を集合 C の元の個数として

$$C_{1,2}(n)=\{\lambda\in C_n;\lambda_i=\{1,2\}\}$$
$$\gamma_{1,2}(n)=|\{\lambda\in C_n;\lambda_i=\{1,2\}\}|\quad\big(=|C_{1,2}(n)|\big)$$

と書くと、$n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_l$ のとき

$$\{\lambda'\in C_n;\lambda_i\{1,2\},\lambda_1=a\}$$

と

$$\{\lambda\in C_{n-a};\lambda_i=\{1,2\}\}$$

との間には全単射が存在する。よって両辺の個数も一致するので、

$$|\{\lambda'\in C_n;\lambda_i=\{1,2\},\lambda_1=a\}|=|\{\lambda\in C_{n-a};\lambda_i=\{1,2\}\}|$$

である。今回は $a=\{1,2\}$ なので、

$$\begin{cases}\gamma_{1,2}(n;\lambda_1=1)=\gamma_{1,2}(n-1)\\ \gamma_{1,2}(n;\lambda_1=2)=\gamma_{1,2}(n-2)\end{cases}$$

であり、上の 2 式の和をとると、(16) のそれぞれ左辺、右辺にあたる。 $\square$

先ほどのフィボナッチ数と同様に、$\gamma_{1,2}(n)$ の一般項を示す。一般フィボナッチ数の一般項をすでに求めているので、$\gamma_{1,2}(1)=1, \gamma_{1,2}(2)=2$ を、それぞれ (10) の s,t に代入すると、$\gamma_{1,2}(n)$ の一般項が導ける。

定理 3.3 ($\gamma_{1,2}(n)$ の一般項)**.** $n \geq 1$ に対して、$\gamma_{1,2}(n)$ の一般項は

$$\gamma_{1,2}(n) = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\beta^n \tag{17}$$

と表すことができる。

4　2 通りの一般化

この章では、先ほど示した $\gamma_{1,2}(n)$ の一般化を行う。具体的には

(1) 和因子が $1,2,\cdots,\ell$ からなる結合
(2) 和因子が 1 と m のみからなる結合

の 2 通りの一般化を行う。

4.1　和因子が $1,2,\cdots,\ell$ からなる結合

定理 4.1 (和因子が $1,2,\cdots,\ell$ からなる n の結合の個数)**.** $n \geq 1$ に対して、

$$\gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n) = \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n-\ell) \tag{18}$$

が成り立つ。但し、$n<0$ のときは、$\gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n)=0$ と解釈する。

Proof. 先ほど示した $\gamma_{1,2}(n)$ は、$\ell=2$ のことである。$\gamma_{1,2}(n)$ のときと同様に、λ_1 に着目する。λ と λ' とは互いに自由に変換できるので、$n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_l$ のとき

$$\{\lambda' \in C_n; \lambda_i = \{1,2,\cdots,\ell\}, \lambda_1 = a\}$$

と

$$\{\lambda \in C_{n-a}; \lambda_i = \{1,2,\cdots,\ell\}\}$$

との間には全単射が存在する。$a = \{1, 2, \cdots, \ell\}$ なので、

$$\begin{cases} \gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n; \lambda_1 = 1) = \gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n-1) \\ \gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n; \lambda_1 = 2) = \gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n-2) \\ \qquad\qquad\vdots \\ \gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n; \lambda_1 = \ell) = \gamma_{1,2,\cdots,\ell}(n-\ell) \end{cases}$$

となり、$\lambda_1 = a$ の n の結合の個数は、$n - a$ の結合の個数と一致していることがわかる。これらの総和をとると、それぞれ (18) 式の左辺と右辺に一致するので、定理 4.1 が示せた。 □

4.2 和因子が 1 と m のみからなる結合

まず、$m = 3$ の場合でどのような傾向があるかを考察する。

表 4.1 (n が 1 から 7 までの $C_{1,3}(n)$).

n	1 のみの結合	3 が 1 つ含まれる結合	3 が 2 つ含まれる結合
1	(1)		
2	(1^2)		
3	(1^3)	(3)	
4	(1^4)	$(3,1),(1,3)$	
5	(1^5)	$(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3)$	
6	(1^6)	$(3,1,1,1),(1,3,1,1),(1,1,3,1),(1,1,1,3)$	$(3,3)$
7	(1^7)	$(3,1,1,1,1),(1,3,1,1,1),(1,1,3,1,1)$ $(1,1,1,3,1),(1,1,1,1,3)$	$(3,3,1),(3,1,3)$ $(1,3,3)$

和因子 3 の現れ方を見る。当然ではあるが、3 が初めて結合に現れるのは $n = 3$ からで、3 が j 個存在する結合は、$n = 3j$ で初めて現れる。次に、結合の個数について考える。例えば、3 が 1 つ含まれる $n = 7$ の結合は、5 個の和因子の中から和因子 3 の場所を 1 つ指定することで結合が決まる。よって、和因子が 1 と 3 からなる 7 の結合の個数は、二項係数を用いて

$$\gamma_{1,3}(7) = \binom{1}{0} + \binom{5}{1} + \binom{3}{2} = 9$$

となる。一般の m の場合が次の定理である。

定理 4.2 (和因子が 1 と m のみからなる n の結合の個数)**.** $n \geq 1$ に対して、

$$\gamma_{1,m}(n) = \sum_{k=0}^{s} \binom{n-k(m-1)}{k}, \quad s = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \tag{19}$$

が成り立つ。但し、$\lfloor x \rfloor$ は x 以下の整数のうち最大のものを表す。

Proof. 和因子 m の現れ方を考える。一般の m の場合には、和因子 m が j 個存在する結合は n の値が mj 以上であることが必要である。ゆえに、$C_{1,m}(n)$ で、和因子 m が s 個のときに m が最大の個数だとすると、s には $n \geq ms$ という条件がつくので、$s = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ ということがわかる。

次に、結合の個数について考える。考え方は、ある結合に和因子 m が j 個含まれているとき、その j 個の和因子 m の指定の仕方が何通りあるかといったものである。$C_{1,m}(n)$ について、和因子 m が j 個ある結合の個数について考える。その結合の全和因子の個数は、和因子 m が j 個と和因子 1 が $n-mj$ 個なので $j+n-mj\Big(=n-j(m-1)\Big)$ 個である。その中から、j 個の和因子 m の場所を指定したいので、二項係数を用いて

$$\gamma_{1,m}(n; |i; \lambda_i = m| = j) = \binom{n-j(m-1)}{j}$$

と表せる。よって、$\gamma_{1,m}(n)$ を求めるには、j が 0 から s までの場合を考えて総和をとれば良いので、$s = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ として、

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,m}(n) &= \binom{n}{0} + \binom{n-m+1}{1} + \binom{n-2(m-1)}{2} + \cdots + \binom{n-s(m-1)}{s} \\
&= \sum_{k=0}^{s} \binom{n-k(m-1)}{k}
\end{aligned}$$

となり、定理 4.2 が導けた。 □

5 まとめと将来の展望

本研究で結合に関する 2 つの主定理を示したが、どちらもまだかなり基礎的な部分である。オイラーの恒等式

$$p(n; \text{和因子は奇数}) = p(n; \text{和因子は相異なる}) \quad (n \geq 1)$$

のような、有名な分割恒等式が多数存在する分割と比較すると、結合には広く知られている恒等式がなく、(私が知らないだけかもしれませんが。) 本研究の結果でもまだ分割に追いつける状態ではない。当面の展望はある条件をつけた結合と、それとはまた別の条件をつけた結合の個数についての関連性を発見することにあると思う。オイラーの恒等式を参考にするならば、和因子の偶奇についてや、各和因子の重複度について調べてみると、何か興味深い発見があるのかもしれない。

参考文献

[1] George E.Andrews, Kimmo Eriksson「整数の分割」、佐藤文広訳、数学書房

[2] 中村滋「フィボナッチ数の小宇宙」、日本評論社