フェラーズ盤のルーク配置と充填配置

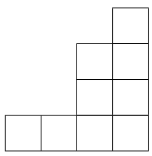
中時貴弘
京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

平成 21 年 1 月 26 日

1　はじめに

この論文で扱う話題は、視覚的でポピュラーな組合せ論の対象であるルーク数 (rook number) というものである。普通のチェス盤とチェスの駒のルークを考えよう。ルークは日本人に馴染みのあるものでいうと、将棋の飛車にあたる駒であり、縦方向、横方向にしか移動できない駒のことである。k 個のルークを盤上に配置するとき、任意の 2 つのルークがお互いに攻めあわないような配置は何通りあるだろうか？各々のルークが他のルークを攻めあわないように配置すると、最大いくつ置けるだろうか？といったように、このような問題はいくらでも考えることができる。

この論文では、盤の形を特にフェラーズ盤に限定し、任意の 2 つのルークがお互い攻めあわないように k 個のルークを配置する (ルーク配置) 仕方の総数を数えることが第一の目的である。フェラーズ盤とは、正方形のセルを並べたものであり、各列でセルの下端が揃っていて、左の列から右の列へセルの数が広義単調増加しているものをいう。

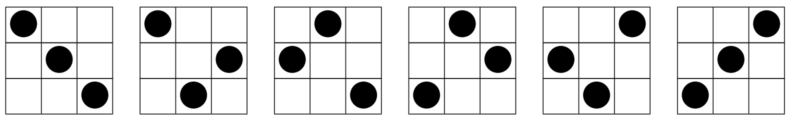


フェラーズ盤上のルーク配置については、Goldman, Joichi, White [3] らによって盤の階乗多項式が因数分解の形で書けるという分解定理が発表されており、Ch. A. Charalambides [1] では分解定理に差分法を用いて、任意のフェラーズ盤のルーク数 r_k を求める公式が紹介されている。

また、最も少ない数のルークによる充填配置 (ルークをさらに 1 個追加すると、ある 2 つのルークがお互い攻めあってしまうような配置) をつくることは興味深い問題であると考えた。このような配置をこの論文では最小充填配置と呼ぶ。充填

配置と最小充填配置はこの論文のテーマを研究しているうちに考えついたものである。というのも、1973 年に Victor Klee によって提案された魅力的な問題として、美術館定理というものがある [4]。これは美術館を監視するのに必要な警備員の人数は何人か？というものである。同じようにフェラーズ盤の領地を最も少ない個数のルークで警備すると解釈すれば、最小のルークの個数を考えることに意味が出てくると思ったのが考えるきっかけであった。

最も簡単な例として、正方形について考えてみると、正方形の 1 辺にあるセルの個数と同数のルークを用意すれば、最小充填配置を容易に構成することができる。しかし、正方形については最小充填配置と充填配置は常に一致している。このときの配置の仕方の総数は、1 辺のセルの個数を n としたとき、n 次の対称群 S_n と自然に一対一に対応するので、その総数は $n!$ となる。



長方形のときは、長方形の短辺にあるセルの個数と同数のルークを用意すれば、同じように最小充填配置を構成することができる。しかし、一般のフェラーズ盤では最小充填配置の問題はそれほど簡単ではない。このようにして、任意のフェラーズ盤について最小充填配置に必要なルークの個数とその配置の仕方の総数を考察することが第二の目的である。

任意のフェラーズ盤において最小充填配置に必要なルークの個数は、フェラーズ盤の中に作ることができる最大正方形の 1 辺の長さに等しいことがわかったが、配置の仕方の総数は思ったよりも複雑であった。そこで、特に階段状のフェラーズ盤に限って最小充填配置の総数について調べてみた。また、与えられたルークの個数に対して、それぞれ充填配置の総数を数えてみた。ルークの個数を決めたときに充填配置の総数がわかれば、フェラーズ盤における充填配置の総数を求めることができるわけだが、その総数を求めることは時間不足でできなかった。将来の課題にしたい。

最後にルークの配置と旗多様体との関係についていくつかの事柄を考察した結果を述べる。これも将来の課題である。

2　フェラーズ盤とルーク配置

はじめに、フェラーズ盤とルークに関する準備をする。

定義 2.1. 平面上に等間隔 1 で格子をひき、そこに 1×1 の**セル**(cell) を格子に沿って配置したものを**盤**(board) と呼ぶ。

図 1 のように、セルの連なった部分を “島”、それ以外の部分を “海” と見ると、盤はいくつかの島からできている可能性がある。

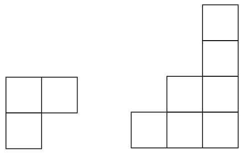


図 1: 盤

定義 2.2. **フェラーズ盤**(Ferrers board) とは、島が 1 つであり、各列でセルの下端が揃っていて、左の列から右の列へセルの数が広義単調増加しているものをいう。

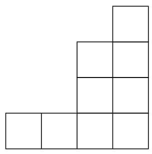


図 2: フェラーズ盤

注意 2.3. 一般に、自然数 n の**分割**(partition) λ とは、$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ で、$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$, $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_k \geqq 0$ を満たすものをいうが、この論文では分割 λ は小さい順に並べかえたものとし、列の箱の数と対応させることを考える。このとき、分割はフェラーズ盤と自然に一対一に対応する。そして、フェラーズ盤は分割を平面的に配置したものと見ることができる。

この論文では以下断らなければ、盤はフェラーズ盤を意味するものとする。

定義 2.4. 盤 B をチェスの盤の一部と見たてて、縦と横にしか動けない駒をセルに配置する。通常チェスではこのような駒をルーク (rook) と呼ぶので、この論文でも B に配置する駒を**ルーク**と呼ぶ。このとき、k 個のルークを互いに攻めあわないように B 上に配置する (どの 2 つも同じ列、行にはない) 仕方の総数を**ルーク数**(rook number) といい、r_k^B で表す。この配置を**ルーク配置**と呼ぶ。

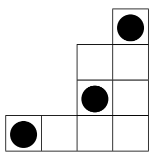


図 3: ルーク配置の例

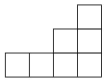
B を省略して、r_k と書くこともあり、$r_0 = 1$ と定義する。さらに、ルーク数を並べた $r(B) = (r_0, r_1, r_2, \cdots)$ を B の**ルークベクトル**(rook vector) と呼ぶ。定義から $i > |B|$ のときは $r_i = 0$ であることに注意する。

この論文では以下断らなければ、● はルークの駒を表すものとする。

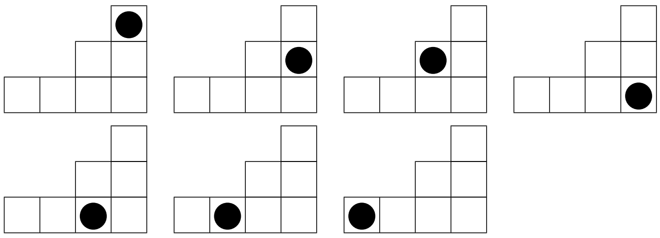
定義 2.5. 盤 B の**ルーク多項式**(rook polynomial) $R(x,B)$ を

$$R(x,B)=\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

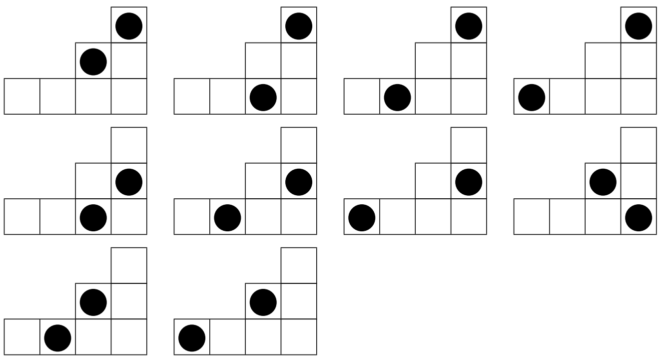
で定義する。これはルーク数の母関数である。

例 2.6. k 個のルークを配置したものを k-ルーク配置と呼ぼう。盤 $B=$  の k-ルーク配置をすべて書き出してみると次のようになる。

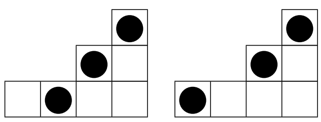
(1) 1-ルーク配置　$r_1=7$



(2) 2-ルーク配置　$r_2=10$



(3) 3-ルーク配置　$r_3=2$



これから、盤 B のルークベクトルは $r(B)=(1,7,10,2)$ であり、盤 B のルーク多項式は $R(x,B)=1+7x+10x^2+2x^3$ となる。

3　分解定理

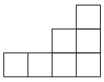
ここでは、任意の盤に k 個のルークをお互い攻めあわないように配置する方法の総数を求めるために、まず Goldman, Joichi, White [3, § I.2] によって得られた分解定理 (factorization theorem) を紹介する。

定義 3.1. c 個の列を持つ盤 B と列の高さ $0 \leqq h_1 \leqq h_2 \leqq \cdots \leqq h_c$ に対して、**高さベクトル**(height vector) を $h(B) = (h_1, h_2, \cdots, h_c)$ とする。また、$n \geqq c$ のとき、n-**高さベクトル**(n-height vector) を $h_n(B) = \left(h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, \cdots, h_n^{(n)}\right)$ とする。ただし

$$\begin{cases} h_i^{(n)} = 0 & (i = 1, 2, \cdots, n-c) \\ h_i^{(n)} = h_{i-(n-c)} & (i = n-c+1, \cdots, n) \end{cases}$$

と定義する。

注意 3.2. 視覚的には、n-高さベクトルは c 個の列をもつ盤を、n 個の列をもつように右に平行移動して、左の $(n-c)$ 列の高さを 0 とすることにあたる。

例 3.3. 盤 $B =$  において、

$$h(B) = (1, 1, 2, 3)$$
$$h_6(B) = (0, 0, 1, 1, 2, 3)$$

となる。

定義 3.4. 盤 B の**階乗多項式**(factorial polynomioal) $p_n(x, B)$ を $n \geqq c$ に対して

$$p_n(x, B) = \sum_{k=0}^{n} r_k\,(x)_{n-k}$$

で定義する。ただし $(x)_i = x(x-1)(x-2)\cdots(x-i+1)$ は i 次下降階乗べきである。

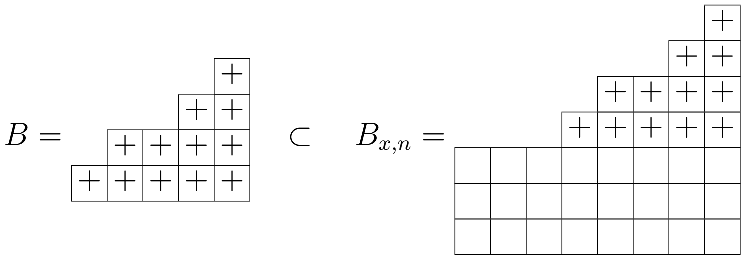
以上の準備の下に、分解定理を証明しよう。

定理 3.5 (分解定理)**.** 盤 B を c 個の列をもつ盤とし、$n \geqq c$ に対して、B の n-高さベクトルを $h_n(B) = \left(h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, \cdots, h_n^{(n)}\right)$ とする。このとき、B の階乗多項式 $p_n(x, B)$ は

$$p_n(x, B) = \prod_{i=1}^{n} \left(x + h_i^{(n)} - i + 1\right) \tag{3.1}$$

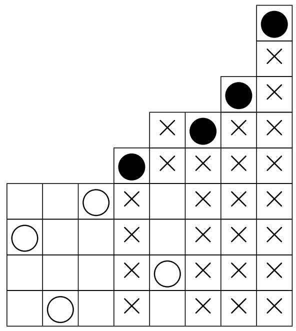
と一次式に因数分解される。

証明. 盤 B が n-高さベクトル $h_n(B) = \left(h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, \cdots, h_n^{(n)}\right)$ をもつとする。正整数 x に対して、盤 $B_{x,n}$ を高さベクトル $h(B_{x,n}) = \left(x + h_1^{(n)}, x + h_2^{(n)}, \cdots, x + h_n^{(n)}\right)$ で決まる盤とする。自然に B は $B_{x,n}$ の一部と考えられる。



盤 $B_{x,n}$ 上の n 個のルーク配置の総数を 2 通りの方法で求める。

(1)　盤 B に置かれるルークの数によって場合分けして数える。



盤 B に k 個のルークが配置されているとき、その総数は r_k 通り。残り $(n-k)$ 個のルークは $x \times n$ の長方形から k 列を除いた $x \times (n-k)$ の長方形に攻めあわないように配置すればよく、$x(x-1)\cdots(x-(n-k)+1) = (x)_{n-k}$ 通りである (上図参照)。よって、求める総数は

$$\sum_{k=0}^{n} r_k (x)_{n-k} = p_n(x, B)$$

通りである。

(2)　盤 $B_{x,n}$ 上に n 個のルークを攻めあわないように置くためには、どの 2 つのルークも同じ列にはないから、n 列すべてにルークを置かなければならない。よって、第 1 列、第 2 列と順に 1 つずつルークを配置すればよい。1 列目にルークを置く総数は $x + {h_1}^{(n)}$ 通り。以下同様に、k 列目にルークを置く総数は $\bigl(x + {h_k}^{(n)} - k + 1\bigr)$ 通り。これを n 列目まで繰り返して、求める総数は

$$\prod_{k=1}^{n} \bigl(x + {h_k}^{(n)} - k + 1\bigr)$$

通りである。 $\square$

ルーク数 r_k の明示式は、$x = 0$ における (3.1) 式の右辺の $(n-k)$ 階差分から求めることができる。たとえば、広田良吾 [8, 1.5 章] を参照のこと。よって、次の系を得る。ここでは、包除の原理による証明も紹介する。

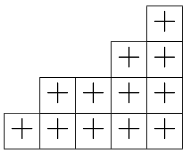
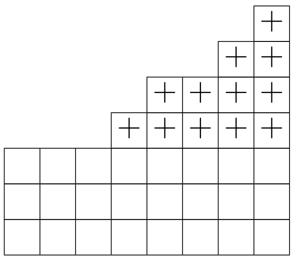
系 3.6 (Ch. A. Charalambides [1, Cor. 2.1])**.** 盤 B が n-高さベクトル $h_n(B) = \left(h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, \cdots, h_n^{(n)}\right)$ をもつとき、ルーク数 r_k は

$$r_k = \frac{1}{(n-k)!}\left[\Delta^{n-k}\prod_{i=1}^{n}\left(x + h_i{}^{(n)} - i + 1\right)\right]_{x=0} \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{(n-k)!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{n-k-j}\binom{n-k}{j}\prod_{i=1}^{n}\left(h_i{}^{(n)} + j - i + 1\right) \tag{3.3}$$

で与えられる。ただし、Δ は**差分作用素**(difference operator) とする。

証明. 高さベクトル $h(A) = \left(h_1{}^{(n)} + n - k, h_2{}^{(n)} + n - k, \cdots, h_n{}^{(n)} + n - k\right)$ をもつ盤 A を考える。

$B =$  $A =$ 

視覚的には、盤 A は n-高さベクトル $h_n(B) = \left(h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, \cdots, h_n^{(n)}\right)$ をもつ盤 B を $(n-k)\times n$ の長方形の盤 C の上に右端が揃うように置いたものである。

$Q_{n,k}$ を、盤 A に n 個のルークが配置されていて、かつ盤 B に k 個のルークが配置されているものの総数とするとき、関係式

$$Q_{n,k} = (n-k)\,!\,r_k\,(B)$$

が成り立つ。

ここで、Ω を A の n-ルーク配置がなす集合、$W_r \subseteq \Omega$ $(r = 1, 2, \cdots, n-k)$ を C の第 r 行に 1 つもルークが置かれていないような配置の集合とすると、

$$Q_{n,k} = N\left(\overline{W_1}, \overline{W_2}, \cdots, \overline{W_{n-k}}\right)$$

となる。ここで $N(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ は集合 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ の要素の個数を表し、$\overline{B}$ は集合 B の補集合を表すものとする。

すると $Q_{n,k}$ は包除の原理を用いて、具体的に計算することができる。

$$Q_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j S_{n-k,j} \;\;,\;\; S_{n-k,j} = \sum N\left(W_{r_1}, W_{r_2}, \cdots, W_{r_j}\right)$$

ただし、2 つ目の総和は $\{1, 2, \cdots, n-k\}$ から j 個選んだ組合せ $\{r_1, r_2, \cdots, r_j\}$ すべてについてとる。このとき

$$N\left(W_{r_1}, W_{r_2}, \cdots, W_{r_j}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(h_i{}^{(n)} + n - k - j - i + 1\right)$$

が成り立つ。

実際、j 個の指定された行を取り除くと、ルークの置き方は第 i 列では $\left(h_i{}^{(n)} + n - k - j - i + 1\right)$ 通りあり、これを第 1 列から第 n 列まで続けて、合計で n 個のルークを配置すればよい。

また、$\{1, 2, \cdots, n-k\}$ から j 個選ぶ組合せ $\{r_1, r_2, \cdots, r_j\}$ は $\binom{n-k}{j}$ 通りあるから、

$$S_{n-k,j} = \binom{n-k}{j} \prod_{i=1}^{n} \left(h_i{}^{(n)} + n - k - j - i + 1\right)$$

となる。よって、

$$Q_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \prod_{i=1}^{n} \left(h_i{}^{(n)} + n - k - j - i + 1\right)$$

従って

$$r_k = \frac{1}{(n-k)\,!} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \prod_{i=1}^{n} \left(h_i{}^{(n)} + n - k - j - i + 1\right)$$

を得る。あとは、j を $n-k-j$ に置き換えて目的の式を得る。 □

4 最小充填配置

§ 1 で紹介したようにフェラーズ盤をルークによって監視すると考えたとき、すべてのセルがルークによって監視できる状態は興味深いと思われる。我々はこれを充填配置と呼ぶ。

定義 4.1. あるルーク配置が、さらにもう 1 つのルークを追加するとルーク配置でなくなるとき、**充填配置**という。また、k 個のルークで充填配置が作れるとき、それを k-**充填配置**といい、そのような k が最小となるときを**最小充填配置**という。k-充填配置の個数を $F_k(B)$ と書く。文脈によって B が明らかなときは、単に F_k と書く。

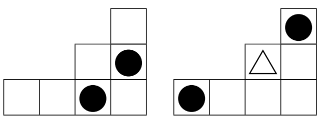


図 4: (左) は 2-充填配置の例で最小充填配置でもある。(右) は 2-充填配置でない例で △ にルークを置くことで 3-充填配置にできる。

ここでは、最も少ないルークの個数の配置で充填配置をつくる。そのときのルークの個数 k と充填配置の総数を求める問題を考える。まず、一般のフェラーズ盤に対して必要なルークの個数 k を求めよう。

定理 4.2. フェラーズ盤 B について、最小充填配置を与える k は、盤 B に納まる最大正方形の 1 辺のセルの数に等しい。

この定理については最初に小西勇樹君に注意してもらった。彼に感謝する。

証明. m を盤 B に納まる最大正方形の 1 辺のセルの数、k を盤 B にルーク配置可能なルークの個数として、セルの個数 C に関する帰納法で示す。

(1) $C=1$ のとき、最小充填配置を与える k の値は盤 B に納まる最大正方形の 1 辺のセルの数 1 に等しい。

(2) $C \leqq \ell-1$ のとき成り立つと仮定して、$C=\ell$ のときも成立することを示す。盤 B の一番右の列に 1 つルークを配置する。配置されたルークが移動できるセルをすべて取り除き、それらの "島" を平行移動することで新しい盤を作る。

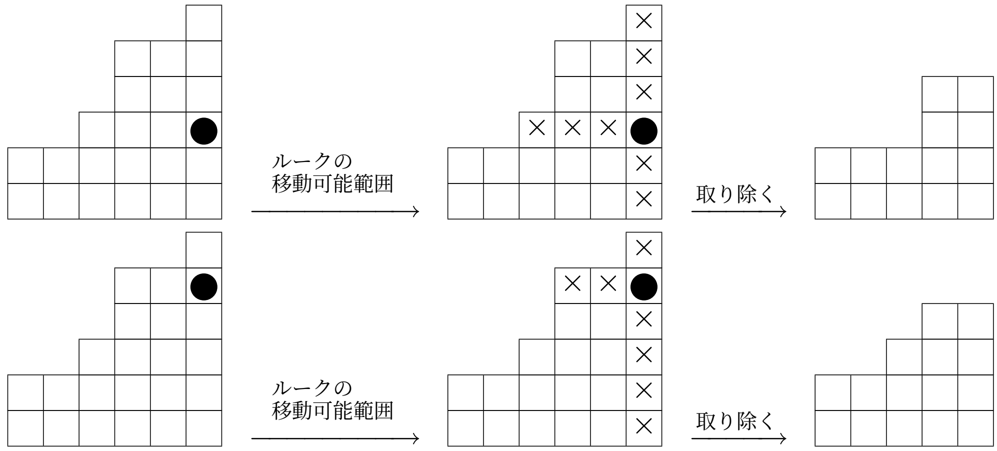


図 5: 操作例

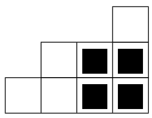
この操作によって

$$\begin{cases} \cdot \text{ 最大正方形の 1 辺のセルが 1 個減り、ルークの個数も 1 個減る} \\ \cdot \text{ 最大正方形の 1 辺のセルはそのままで、ルークの個数が 1 個減る} \end{cases}$$

の 2 通りの場合が起こる。帰納法の仮定から、それぞれの場合に応じて $m-1 \leqq k-1$ または $m \leqq k-1$ が成り立ち、いずれの場合においても $m \leqq k$ である。よって、$C=\ell$ のときも成立する。

以上より、フェラーズ盤 B について定理は成り立つ。 $\square$

補題 4.3. 盤 B の最大正方形の 1 辺のセルの数は右下の頂点を含むように取った最大正方形の 1 辺のセルの数に等しい。



証明. 盤 B に含まれる正方形を任意にとり、1 辺のセルの数を m とする。また、盤 B の右下の頂点を含むような 1 辺の長さが最長の正方形の 1 辺のセルの数を p とする。

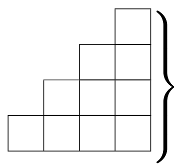
盤 B はフェラーズ盤であるから、盤 B に含まれる $m \times m$ の正方形を盤 B の中で右に平行移動し、盤 B の右端とこの正方形の右端を揃えることができる。さらにこの正方形を盤 B の中で下に平行移動し、盤 B の下端とこの正方形の下端を揃えることができる。このように平行移動によって $m \times m$ の正方形の右下の頂点と盤 B の右下の頂点を一致させることができる。このとき、$p \times p$ の正方形に盤 B の任意の $m \times m$ の正方形が含まれるから、$m \leqq p$ である。

一方で、$p \times p$ の正方形の 1 辺は盤 B に含まれる正方形の 1 辺を超えないので、$p \leqq m$ である。

以上より $m = p$ が導かれ、補題は成立する。 □

5 階段状の盤における最小充填配置

充填配置の総数を求める問題を考えよう。問題そのものは任意のフェラーズ盤で考えられるが、その充填配置の総数を求めることは簡単ではない。この論文では一般のフェラーズ盤ではなく、以下、高さベクトル $h(B_n) = (1, 2, \cdots, n)$ をもつ階段状の盤 B_n について、最小充填配置を与える k の値とその配置の総数について考える。

$B_n =$  n

定理 4.2 より、盤 B_n の最小充填配置に必要な k は B_n に含まれる最大正方形の 1 辺の長さであり、

$$k = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & (n \text{ が偶数}) \\ \dfrac{n+1}{2} & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \tag{5.1}$$

であることがわかる。

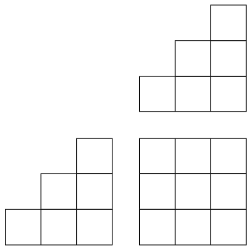
定理 5.1. 高さベクトル $h(B_n) = (1, 2, \cdots, n)$ をもつ階段状の盤 B_n において、最小充填配置の総数 F_k は、

$$F_k = \begin{cases} k\,! & (n \text{ が偶数}) \\ k\,! + (n-k)(n-k+1)(k-1)\,! & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \tag{5.2}$$

で与えられる。ただし、k は B_n に含まれる最大正方形の 1 辺の長さであって (5.1) 式で与えられる。

以下、k は (5.1) 式を表すものとする。

証明. n が偶数のときと奇数のときで場合分けして考える。いずれの場合においても、最大正方形の部分を (ア)、最大正方形の上にある部分を (イ)、最大正方形の左にある部分を (ウ) とする。

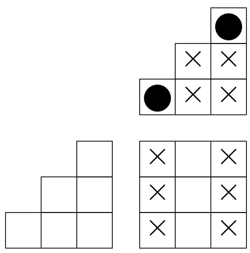


(イ)

(ウ) (ア)

(1) n が偶数のとき、最大正方形の外にルークが配置されたと仮定する。(イ) と (ウ) に置かれているルークの個数を比べて多いほうに $i\,(i \geqq 1)$ 個のルークが置かれているとしよう。必要ならば B_n を対角線で折り返して、(イ) に i 個のルークが置かれているとしても一般性を失わない。(ア) の部分からこれらのルークが移動可能なセルをすべて取り除くと $(k-i) \times k$ の長方形が残る。この長方形と (ウ) の部分の階段状の盤 B_k とを合わせて新たに盤を作る。新たにできた盤は、階段状の盤 B_{k-1} と $(k-i+1) \times k$ の長方形からできていると見ることもできる。この盤に実現できる最大正方形の 1 辺のセルの個数を求める。

$B_6 =$



補題 4.3 より、このときの最大正方形は右下の頂点を含むように取ることができるから、その 1 辺は簡単な計算で

$$\begin{cases} k-i+1+\dfrac{i-2}{2} & (i\text{ が偶数}) \\ k-i+1+\dfrac{i-1}{2} & (i\text{ が奇数}) \end{cases}$$

となる。この盤に $(k-i)$ 個のルークを配置できるのは

$$\begin{cases} k-i+1+\dfrac{i-2}{2} \leqq k-i & (i\text{ が偶数}) \\ k-i+1+\dfrac{i-1}{2} \leqq k-i & (i\text{ が奇数}) \end{cases}$$

のときであり、

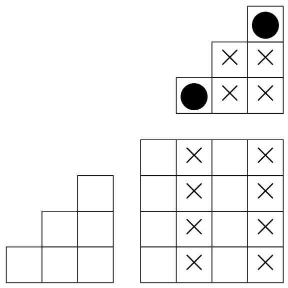
$$\begin{cases} \dfrac{i}{2} \leqq 0 & (i\text{ が偶数}) \\ \dfrac{i+1}{2} \leqq 0 & (i\text{ が奇数}) \end{cases}$$

であるから、$i = 0$ が従う。これは、すべてのルークが最大正方形の中になければ充填配置を構成できないことを意味している。

以上より、n が偶数のときには盤 B_n における最小充填配置の個数は、最大正方形の (最小) 充填配置の個数 $k!$ に一致することがわかった。

(2) n が奇数のとき、(1) のときと同様に状況を設定して (イ) の部分に i 個のルークがあり、(ウ) には i 個以下しかないとする。

$B_7 =$



このとき (イ) のルークの移動できるセルを除いた部分からなるフェラーズ盤の最大正方形の 1 辺は簡単な計算で

$$\begin{cases} k - i + \dfrac{i-1}{2} & (i\text{ が奇数}) \\ k - i + \dfrac{i}{2} & (i\text{ が偶数}) \end{cases}$$

となる。この盤に $(k-i)$ 個のルークを配置できるのは

$$\begin{cases} k - i + \dfrac{i-1}{2} \leqq k - i & (i\text{ が奇数}) \\ k - i + \dfrac{i}{2} \leqq k - i & (i\text{ が偶数}) \end{cases}$$

のときであり、

$$\begin{cases} \dfrac{i-1}{2} \leqq 0 & (i\text{ が奇数}) \\ \dfrac{i}{2} \leqq 0 & (i\text{ が偶数}) \end{cases}$$

であるから、$i = 0, 1$ でなければならない。従って、盤 B_n の最小充填配置には、次の 2 通り考えられる。

$$\begin{cases} \text{最大正方形において (最小) 充填配置である場合} \\ \text{(イ) にルークが 1 個置かれる場合} \end{cases}$$

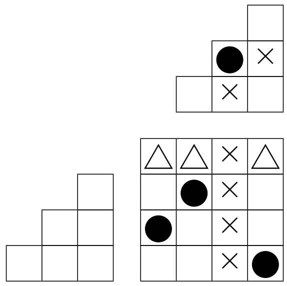
最大正方形において (最小) 充填配置である場合は $k!$ 通りだから、(イ) にルークが 1 個置かれる場合を以下考えよう。

$$\begin{cases} \text{(a) ルークは (ア) に } (k-1) \text{ 個、(イ) に 1 個置かれる} \\ \text{(b) ルークは (ア) に } (k-2) \text{ 個、(イ) に 1 個、(ウ) に 1 個置かれる} \end{cases}$$

の 2 通りが考えられる。

(a) ルークが (ア) に $(k-1)$ 個、(イ) に 1 個置かれる場合を考えると図形の対称性から、(ア) と (ウ) にルークがある場合も同数あることが容易にわかる。

$B_7 =$



(イ) の部分にルークを 1 個配置する方法は (イ) のセルの数、すなわち

$$1 + 2 + \cdots + (n-k) = \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

通りある。続いて、残り $k-1$ 個のルークを (ア) の部分の最上段の 1 行と (イ) で置いたルークが移動できる部分をすべて取り除いたときの "島" を平行移動して、新たにできる $(k-1) \times (k-1)$ の盤に配置すればよい。この方法の総数は $(k-1)!$ 通りある。

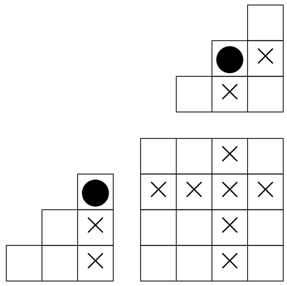
よって求める総数は、(ア) と (イ) にルークがある場合を 2 倍して、

$$2 \times \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)(k-1)! = (n-k)(n-k+1)(k-1)!$$

通りある。

(b) ルークが (ア) に $(k-2)$ 個、(イ) に 1 個、(ウ) に 1 個置かれる場合は、(ア) の盤から (イ) と (ウ) のルークが移動できるセルを除いた部分からなるフェラーズ盤は、常に 1 辺が $(k-1)$ の正方形となる。

$B_7 =$



一方で、配置できる残りのルークの個数は $(k-2)$ 個であるから、充填配置を構成することはできない。 □

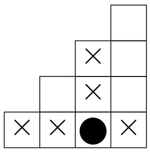
6　充填配置の総数

前章では階段状の盤 B_n の最小充填配置について考えたが、この章では階段状の盤 B_n に ℓ 個のルークを配置して充填配置を作るとき、その配置の仕方の総数 F_ℓ について考える。k 個、$k+1$ 個、$\cdots$、n 個のルークでそれぞれ充填配置の総数を求めることができれば、盤 B_n の充填配置の総数を求めることができたわけだが容易ではなかった。n 個の場合と $(n-1)$ 個の場合について考えてみたので、その結果を紹介する。

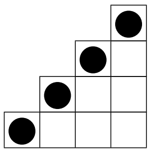
6.1　n 個のルークで作る充填配置

定理 6.1. 盤 B_n に対して、$F_n = 1$ である。

証明. 列の最下段から順に 1 つずつルークを配置していく。



もし、最下段の一番左のセルでないところにルークを置いたとすると (上図参照)、その上の段には一番下の段に置いたルークが移動できる部分にはルークを置くことができないので、$(n-2)$ 列にしかルークを置くことができない。残りの $(n-1)$ 個のルークをすべて置ききらなくてはならないから、n 個のルークを配置することはできない。以下同様に、n 個のルークを配置するためには、各列の一番左のセルに 1 個ずつルークを置くしかない。



よって、得られる充填配置は 1 つしかない。 □

6.2　$(n-1)$ 個のルークで作る充填配置

n 個の充填配置からある 1 箇所ルークを取り除くと、もはや充填配置ではない。そこで、ある何らかの操作を施すことで、すべての $(n-1)$-充填配置を作り出すことができないかと考えた。その方法について述べる。

方法

まず、B_n の $(n-1)$-ルーク配置において対角線上に $(n-2)$ 個以下のルークしかないようなルーク配置は、すべて B_n の $(n-1)$-充填配置になることを示す。このことは次の 2 つの事実からわかる。

(I) B_n の $(n-1)$-ルーク配置は各ルークを「ルーク配置になるように左に動かす」という操作を有限回行えばすべてのルークを対角線上に移動できる。(その逆をたどれば、任意のルーク配置は対角線上のルーク配置から各ルークを「ルーク配置になるように右に動かす」という操作を有限回行って得られる)
(II) B_n の対角線上の $(n-1)$-ルーク配置から始めて「ルーク配置になるように右に動かす」ことを繰り返しても充填配置は保たれる。(ただし、始めの $(n-1)$-ルーク配置は除く。)

すると、$(n-1)$-充填配置の総数は

「$\#$(B_nの $(n-1)$-ルーク配置) $-$ $\#$(B_nの対角線上の $(n-1)$-ルーク配置)」

により求めることができる。

定理 6.2. $n \geqq 2$ とする。n 個の充填配置からある 1 箇所ルークを取り除いて $(n-1)$-ルーク配置を作る。このとき

右基本操作：あるルークを 1 つ右に移動させてルーク配置となるようにする

を有限回行ってルーク配置を構成するとき、すべての $(n-1)$-充填配置が得られる。

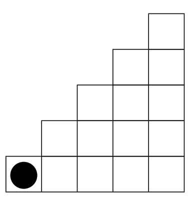
まず、次の定理を証明する。

定理 6.3. 盤 B_n の任意のルーク配置は各ルークを

左基本操作：あるルークを 1 つ左に移動させてルーク配置となるようにする

という操作を有限回行えばすべてのルークが対角線上にあるようなルーク配置に変形できる。

証明. n に関する帰納法で示す。
(1) $n=1$ のときは成り立つ。
(2) $n-1$ のとき定理の主張が成り立つと仮定する。
まず、最下段にルークが置かれているとき
(a) B_k の最下段の行の左端にルークがある場合は、その行の上にある B_{k-1} のルーク配置に帰納法の仮定が使えて、定理の主張を満たす。



(b) B_k の最下段の行の左端にルークがない場合は、左端の列にルークが 1 つも置かれないことから、左基本操作によって必ず最下段の行の左端にルークを移動できる。あとは、(a) と同様に帰納法の仮定が使えて、定理の主張を満たす。

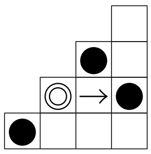
また、最下段にルークが置かれていないときも、その行の上にある B_{k-1} のルーク配置に帰納法の仮定が使えて、定理の主張を満たす。 □

系 6.4. 任意のルーク配置は対角線上のルーク配置から右基本操作を有限回行って得られる。

これは定理 6.3 の逆の操作をたどればすぐに従う。あとは下の補題を示せばよい。

補題 6.5. B_n の対角線上の $(n-1)$-ルーク配置から始めて、各ルークに対して右基本操作を繰り返しても充填配置は保たれる。

証明. いま、盤 B_n の n-充填配置から一番上のルークを 1 つ取り除く。ここで、残



り $(n-1)$ 個のルークから 1 つ選んで (◎が選んだルーク) 右に移動することでルーク配置を構成するためには、はじめに取り除いたルークの位置の下まで移動すればよい。この仕方はただ 1 通りである。また、このときにできる $(n-1)$-ルーク配置は、はじめに取り除いたルークの位置のセルを移動範囲に含み、操作前と後でのルークの移動範囲は行に関して一致していて、列の部分については、他のルークの移動範囲に含まれている。よって、この $(n-1)$-ルーク配置は $(n-1)$-充填配置となる。対角線上のどのルークを 1 つ取り除いても同様のことが言える。

よって、各ルークに対して右基本操作を繰り返しても充填配置は保たれる。 □

系 6.4 と補題 6.5 から、定理 6.2 は従う。

盤 B_n の $(n-1)$-ルーク配置の総数を T_n と置く。B_n の最下段にルークがあるときを考える。もし最下段の一番左にルークが置かれれば、上の B_{n-1} の部分のルーク配置の総数である T_{n-1} 通りある。最下段の一番左にルークが置かれなければ、2 列目、$\cdots$、n 列目と順にルークを 1 つずつ配置すればよい。また、B_n の最下段にルークがないときを考えると、盤 B_{n-1} に $(n-1)$ 個のルークを配置しなければならない。ところが、この配置の仕方は 1 通りであり、すでに数えられている。よって、関係式

$$T_n = T_{n-1} + 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = T_{n-1} + 2^{n-1}$$

を満たす。よって、$T_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1$ である。また、B_n の対角線上に $(n-1)$ 個のルークが配置される仕方の総数は n であるから、$(n-1)$-

充填配置の総数 F_{n-1} は

$$F_{n-1} = 2^n - n - 1$$

である。

7　充填配置と旗多様体

7.1　旗多様体と Schubert 多様体

まず、旗多様体 (Flag Variety) を定義しよう。

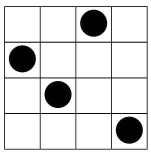
定義 7.1. ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ を考える。旗多様体 $Flag(\mathbb{C}^n)$ を

$$Flag(\mathbb{C}^n) = \left\{(V_1, V_2, \cdots, V_n) \;\middle|\; V_{i-1} \subset V_i : \text{部分線形空間}, \dim V_i = i \,(1 \leqq i \leqq n)\right\}$$

で定義する。ただし $V_0 = (0)$ とする。

$n \times n$ の正方形の盤の充填配置を 1 つとる。この充填配置を T とする。下の図は $n = 4$ の例である。

ルークが置かれているセルに数字の 1 が、それ以外のセルに数字の 0 が書かれていると思うと 4×4 の置換行列が得られ、T には置換 $\sigma = \binom{1234}{2314}$ が対応する。$T = T_\sigma$ と表すことにする。

$T =$  $\longleftrightarrow \sigma$

さて、ルークが置かれているセルに数字の 1 を、各ルークにおいてルークの右にあるセルと下にあるセルをすべて数字の 0 にしたものを考える。このとき、何も書かれないセルにはどんな数を入れてもいいものとし、$*$ を入れる。

$*$	$*$	1	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	1

この表から、行列

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}$$

を得る。いま、$u_i\,(i=1,2,3,4)$ を 1 つずつ順に追加して生成される部分空間の列

$$(0) \subset V_1 = \langle u_1 \rangle \subset V_2 = \langle u_1, u_2 \rangle \subset V_3 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subset V_4 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle = \mathbb{C}^n$$

は V_i の次元が狭義単調増加しているから (V_i) は旗多様体となる。

また、充填配置 T を 1 つ決めると $*$ の場所と個数が決まり、$*$ を変数と思うことにより、Schubert **胞体** (Schuvert cell) $X^\circ(T) \subset Flag(\mathbb{C}^n)$ が定まる。この Schubert 胞体の閉包 $\overline{X^\circ(T)}$ を $X(T)$ と書き、これを Schubert **多様体**(Schubert manifold) とよぶ。

7.2 盤の充填配置におけるエネルギー

盤 B_n を $n \times n$ の正方形の盤の一部分だと思う。

$$B_n = \begin{array}{cccc} & & & + \\ & & + & + \\ & + & + & + \\ + & + & + & + \end{array} \subset \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & + \\ \hline & & + & + \\ \hline & + & + & + \\ \hline + & + & + & + \\ \hline \end{array}$$

盤 B_n 上の ℓ-充填配置に対して、それを拡張して正方形の充填配置を考える。正方形の充填配置に必要なルークの個数は n であるから、B_n に属さないルークの個数は $(n-\ell)$ である。

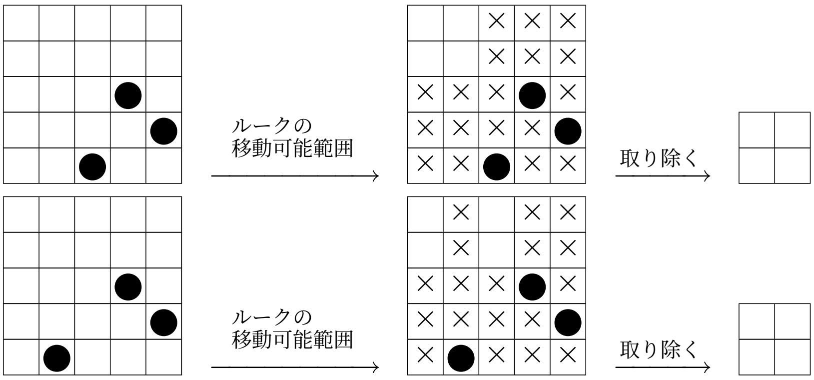
ここで、盤 B_n の充填配置におけるエネルギーを定義しよう。

定義 7.2. 盤 B_n の充填配置に対して、それを拡張して $n \times n$ の正方形の盤が充填配置となるようにルーク配置を作る。$n \times n$ の正方形の各ルークにおいてルークの右にあるセルと下にあるセルすべてに数字の 0 を書く。そして、ルークが置かれているセルに数字の 1 を書く。最後に、左下から右上への対角線のセルには $\times$ を書く。同じセルに $\times$ と 1 が書かれるときは $\times$ を書きこむことにする。さらに、この時点で何も書き込まれないセルがあればそこに $*$ を書き込む。このとき、盤 B_n の充填配置におけるエネルギー (energy) を盤 B_n に属する $*$ の個数で定義する。もし $*$ が 1 つもなければ、エネルギーは 0 とする。

この定義は B_n の充填配置の拡張の仕方に依存しているが、次の定理が成り立つ。

定理 7.3. 盤 B_n の充填配置に対して、そのエネルギーは充填配置の正方形への拡張の仕方に依らない。

証明. 盤 B_n 上の ℓ 個のルークが移動できるセルをすべて取り除くと、残るセルはすべて盤 B_n に属さない。



この "島" を平行移動することで新たに盤を作れば、それは 1 辺のセルの個数が $(n-\ell)$ 個である正方形になる。ここに $(n-\ell)$ 個のルークを配置することができて、これらのルークの右と下を 1 にすると、配置の仕方によらず、B_n の同じ場所に 1 が書かれる。

よって、定理は成り立つ。 □

定義 7.2 とは反対に、$n \times n$ の正方形の各ルークにおいてルークの左にあるセルと上にあるセルすべてに数字の 0 を書くことで得られる Schubert 胞体を考えることもできる。(数字の 1 や $\times, *$ の書き方は定義 7.2 と同様にする。) これを**相補的**(opposite) **な**Schubert **胞体**と呼ぶ。

このとき盤 B_n において、拡張した $n \times n$ の正方形の置換 $w_0 = (n, n-1, \cdots, 1)$ に対応する充填配置 T_{w_0} から得られる Schubert 多様体を $Z(T_{w_0})$ で表すと、定義 7.2 の自由変数である $*$ の個数は $Z(T_{w_0}) \cap X(T)$ の次元を与えている。

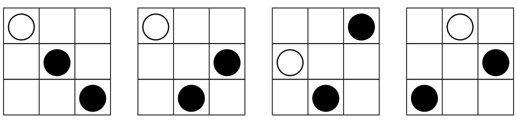
さて、盤 B_n の充填配置がなす集合を Ω_ℓ、その充填配置 ω におけるエネルギーを $\sigma(\omega)$ で表す。盤 B_n の充填配置のエネルギーの母関数

$$E_{n,\ell}(t) = \sum_{\omega \in \Omega_\ell} t^{\sigma(\omega)}$$

を考えよう。ここでは、最小充填配置のとき (必要なルークの個数は前章では k で (5.1) 式で与えられた) に計算した結果を紹介する。

以下、○ は盤 B_n に属さないルークを表すものとする。

(1) $n = 3, k = 2 \quad E_{3,2}(t) = 4$



↓ ↓ ↓ ↓

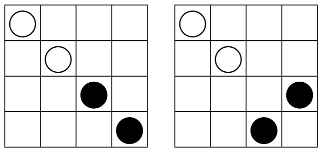
1	0	$\times$
0	$\times$	0
$\times$	0	1

1	0	$\times$
0	$\times$	1
$\times$	1	0

$*$	$*$	$\times$
1	$\times$	0
$\times$	1	0

$*$	1	$\times$
$*$	$\times$	1
$\times$	0	0

(2) $n=4, k=2 \quad E_{4,2}(t)=t+1$



↓ ↓

1	0	0	×
0	1	×	0
0	×	1	0
×	0	0	1

1	0	0	×
0	1	×	0
0	×	∗	1
×	0	1	0

以下、いくつか調べてみると次のような結果を得た。

n	k	$E_{n,k}(t)$
3	2	4
4	2	$t+1$
5	3	$(t+1)(t+8)$
6	3	$(t+1)(t^2+t+1)$

n が偶数のときは

$$E_{n,k}(t)=\prod_{j=1}^{n}\frac{t^j-1}{t-1}$$

であることがわかっている。n が奇数のときを考えるのが面白い問題である。

母関数 $E_{n,\ell}(t)=\sum_{\omega\in\Omega_\ell} t^{\sigma(\omega)}$ において $t=1$ とすると、

$$E_{n,\ell}(1)=\sum_{\omega\in\Omega_\ell} 1^{\sigma(\omega)}=1+1+\cdots+1=\#\Omega_\ell$$

であることもわかる。

また、$E_n(t)=\sum_{\ell=0}^{n} E_{n,\ell}(t)$ を考えてみるのも興味深い。というのも、すべてのエネルギーを集めた母関数の和を考えることで、すべての充填配置の個数を求めることができるからである。この母関数を用いた考察も時間不足でこれ以上のことは考えていない。将来の課題である。

謝辞 多数の有益な助言を頂き、またセミナーや論文作成においても厚きご指導頂いた西山 享先生に感謝の意を表したい。また、色々と助言をくれた原田 剛君、小西勇樹君にも大変感謝している。

参考文献

[1] Ch. A. Charalambides. *The rook numbers of Ferrers boards and the related restricted permutation numbers.* Journal of Statistical Planning and Inference **101**(2002), 33-48.

[2] Mike Develin. *Rook Poset Equivalence of Ferrers Boards.* Order **23**, 179-195, 2006.

[3] Jay R. Goldman, J. T. Joichi and Dennis E. White. *Rook Theory1.* Proceedings of the American Mathematical Society Volume **52**, October 1975.

[4] Martin Aigner, Gunter M. Ziegler (蟹江幸博 訳). 天書の証明. シュプリンガー・フェアラーク東京, 2002.

[5] William Fulton. *Young Tableaux.* Cambridge University Press, 1997.

[6] K. P. Kohas. ルーク数とルーク多項式, モスクワ数学ひろば3 代数篇　対称性・数え上げ. (武部尚志 訳). 海鳴社, 2006 所収.

[7] 寺田至. ヤング図形のはなし. 日本評論社, 2002.

[8] 広田良吾. 差分学入門ー情報化時代の微積分学 (情報数理シリーズ). 培風館, 1998.