

BC 型 Weyl 群の表現と Domino Tableaux

小西勇樹

2009 年 2 月 5 日

目次

1	Young Tableaux	5
1.1	分割とヤング図形	5
1.2	マヤ図形	7
1.3	Fairy Sequence	8
1.4	ヤング束とヤング盤	8
1.5	Schützenberger のアルゴリズム	9
1.6	Rim Hook	18
2	Domino Tableaux	20
2.1	ドミノタイル張り問題	20
2.2	マヤ図形を用いた定理 2.2.1 の証明	25
2.3	Fairy Sequence を用いた定理 2.2.1 の証明	28
3	Domino Robinson-Schensted 対応	31
3.1	Standard Domino Tableaux	31
3.2	Semi-Standard Domino Tableaux	35
3.3	対応のまとめ	38
4	W の表現論	38

概説

本論文はドミノ盤を中心とした組合せ論的結果とそれを用いた C 型ワイル群 $W(C_n) = \mathbb{Z}_2 \wr \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$ の表現論についての考察である。

ヤング図形 (Young diagram) とは単位長さの正方形をした箱を, 左端をそろえて各行に箱を並べてできており, 各行の箱の個数は上から下に向かって広義単調減少するように並んだ図形をいう。たとえば, 下の図形

A 型ワイル群 $W(A_n) = \mathfrak{S}_n$ のときは、各既約表現はサイズが n のヤング図形 (分割) で分類され、その表現空間の基底として標準盤をとることができる。表現の作用によって標準版は数字盤に移るが、straightening law と呼ばれるアルゴリズムを用いて、これを標準盤の 1 次結合に書き表すことができる (たとえば [3] を参照)。C 型ワイル群 $W(C_n)$ については後で示すように、標準ドミノ盤を表現空間の基底にとることができるから、ドミノ数字盤に対して straightening law のようなアルゴリズムがあると期待される。

さて $W := W(C_n)$ の既約表現は

$$\text{Ind}_{(\mathbb{Z}_2^{\nu} \mathfrak{S}_p) \times (\mathbb{Z}_2^{\nu} \mathfrak{S}_q)}^W (\mathbb{C}_{\text{triv}} \wr S^\lambda \boxtimes \mathbb{C}_{\text{sgn}} \wr S^\mu) \quad (p+q=n, \lambda \vdash p, \mu \vdash q)$$

(ただし S^ν は分割 $\nu \vdash n$ に対応する Specht 加群) で与えられ、その各既約表現の次元は

$$\dim \text{Ind}_{(\mathbb{Z}_2^{\nu} \mathfrak{S}_p) \times (\mathbb{Z}_2^{\nu} \mathfrak{S}_q)}^W (\mathbb{C}_{\text{triv}} \wr S^\lambda \boxtimes \mathbb{C}_{\text{sgn}} \wr S^\mu) = \frac{n!}{p!q!} \dim S^\lambda \cdot \dim S^\mu = \frac{n!}{p!q!} \cdot f^\lambda \cdot f^\mu$$

(ただし $\dim S^\lambda = f^\lambda$) である。(たとえば岡田 [13] を参照。)

一方 Fomin-Stanton([2]) によれば、2 つの標準盤の組で要素が互い交わりのないものの全体と標準ドミノ盤の全体は全単射対応していることがわかる。

$$(\text{STab} \times \text{STab})^\circ \longleftrightarrow \text{SDT}$$

(ここで STab は標準盤の全体, SDT はドミノ標準盤の全体, $(\text{STab} \times \text{STab})^\circ = \{(S, T) \in \text{STab} \times \text{STab} \mid S \text{ と } T \text{ は共通の要素をもたない}\}$ を表す。) 従って表現空間の基底として自然に標準ドミノ盤の全体を取ることができると考えられる。

我々は $\mathfrak{S}_n \langle W \rangle$ の作用で標準ドミノ盤が一般のドミノ数字盤に移される (補題 4.0.2) ことをみて、これを標準盤で書き表すアルゴリズムを見つけることを研究した。

その方法としてまずドミノ数字盤を 2 つの数字盤に分解する。次にその分解されたそれぞれの数字盤を Specht 加群における関係式から、標準盤の 1 次結合に書き表す。その書き表す方法として straightening law があり、この部分は [3] を参照した。標準盤の 1 次結合で書き表されれば、それぞれの標準盤の組はただひとつの標準ドミノ盤を決め、従って標準ドミノ盤で書き表すことができる。

ヤング図形は、その対角線にある箱の個数を数え挙げることによって表示することもできる。例えば次のヤング図形 Y :

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 2 & \\ \hline -2 & -1 & 0 & 1 & \\ \hline -3 & & & & \\ \hline \end{array}$$

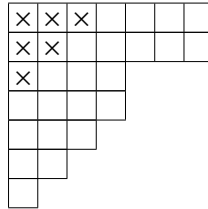
は $(112\boxed{3}3211)$ と表される。ここで \square はこのヤング図形の主対角線 (右の盤で 0 の入っている位置) の箱の個数である。このようにあらわされる列を fairy fequence と呼ぶ^{*1}。ヤング図形全体は自然な包含関係によって束を成す。その束をヤング束という。Fomin-Stanton[2] は fairy sequence を用いて、ヤング束の 2 つの直積と 2-分解可能な (2-decomposable^{*2}) ヤング図形 (ドミノタイル張りできるヤング図形) の全体が成す束との間に同型対応があることを証明した。^{*3}

^{*1} これは Fomin-Stanton([2]) による用語である。

^{*2} これも [2] による用語である。

^{*3} 実際はもっと一般的に k -分解可能な形で述べられている。

コア r の 2-分解可能なヤング図形とは次のようなヤング図形である：ヤング図形の左角には長さ r の階段の形をしたヤング図形があって、残りの部分はドミノタイル張りができるものとなっている。例えば次のヤング図形



はコア 3 の 2-分解可能なヤング図形である。x がコアの部分を示している。我々は [2] と同様の論法を用いることで、ヤング束の 2 つの直積と任意の $r \geq 0$ の r コアの 2-分解可能なヤング図形（ドミノタイル張りできるヤング図形）との間にも同様の対応があることを証明した (定理 2.2.1)。

また任意のヤング図形はある整数 $r \geq 0$ がただひとつ存在して、 r コアの 2-分解可能なヤング図形であることがわかる。fairly sequence による考察で証明を与えれば、直感的にも図形としての対応が理解しやすい。束としての同型性より r コアのドミノ数字盤の全体 DN_r から数字盤の全体 Num の 2 組で共通の要素を持たないものの全体への写像

$$\Pi_r : DN_r \longrightarrow (Num \times Num)^\circ$$

が得られる。ここで右辺の直積集合の \circ は意味は上に同じで、共通要素をもたない 2 組という条件を表す。この Π_r を特にコア r の標準ドミノ盤の全体 SDT_r に制限することで、標準盤の全体 $S\text{Tab}$ の 2 組で互いに共通の要素を持たないものの全体との間の全単射を導くことがわかる。

$$(S\text{Tab} \times S\text{Tab})^\circ \longleftrightarrow SDT_r$$

Π_r の $(S, T) \in (Num \times Num)^\circ$ におけるファイバー $\Pi_r^{-1}(D) = \{D \in DN_r \mid \pi_r(S, T) = D\}$ の範囲で、コア r のドミノ数字盤 $D \in DN_r$ の変換について考える。 S, T がどちらも標準盤であれば、 D に簡単な操作を繰り返すことで標準ドミノ盤が得られることがわかった (命題 4.0.4)。またこのことは、任意の 2 つの (コア r をもった) ドミノタイル張りはその変換を適切に何回か用いることで、互いに移り合えることをも意味している。

以下各節の内容を説明する。§1.1 – §1.4 で基本的概念を定義、解説したのち、§1.5 で Schützenberger によるアルゴリズムを述べ ([6])、それによって定義される自己双対盤とコアが 0 または 1 の標準ドミノ盤が対応していることを分割の表を用いて説明する。§1.6 ではドミノを拡張した概念として k 個の箱を持つ k -rim hook について述べ、Fomin-Stanton ([2]) による結果： k -分解可能なヤング図形の全体が成す束と k 個のヤング図形の全体が成す束との間に同型対応があることをみる。また k -分解可能であるかどうかの判定法をマヤ図形を用いて与える。これをそのままドミノの場合に考察するのが §2 であり、§2.1 でドミノタイル張り、コアの概念を述べたのち、§2.2 ではコア r のドミノタイル張り可能なヤング図形の全体とヤング束の直積が束としての同型であることをマヤ図形を用いて証明する。この結果は [6] に言及されているが、完全な証明は書かれていない。次に §2.3 で Fomin-Stanton ([2]) による fairly sequence を用いたコア r の場合の別証明を与える。その証明によって互に対応し合う図形がより直感的に理解される。それをもとにして、コア r のドミノ盤を 2 つの盤に分解する写像を詳細に考察する。§3 でドミノ挿入 (domino insertion) を用いたドミノ盤に関する Robinson-Schensted 対応を述べる。これは主に [8, 5, 7] を参考にした。§3.1 で標準ドミノ盤を、§3.2 で半標準ドミノ盤に対する Robinson-Schensted 対応を説明する。§3.3 で今までの重要な対応を結果だけまとめた。最後に §4 でドミノ盤を用いてワイル群 $W = \mathbb{Z}_2 \wr \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$ の表現論について考察する。

1 Young Tableaux

1.1 分割とヤング図形

定義 1.1.1. 非負整数 n に対して λ が n の分割であるとは、いくつかの非負整数の列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ で

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$$

となるものをいう。ただし最後の項に 0 がいくつか並んだものはそれらを取り去ったものと同一視することにし、0 の分割はただ一つの項から成る (0) のみとする。このとき、

$$|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = n$$

とおき、 λ が n の分割であることを $\lambda \vdash n$ と表す。分割の全体を \mathcal{P} で表し、特に整数 $n \geq 0$ の分割の全体を \mathcal{P}_n で表す。

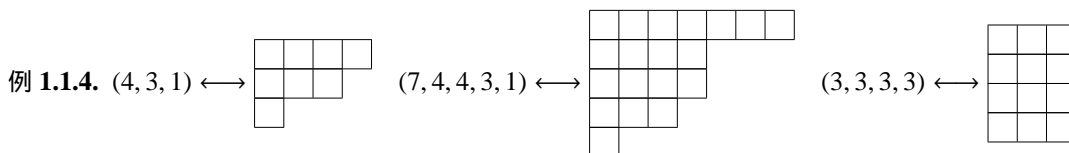
定義 1.1.2. 平面上にいくつかの単位正方形（箱と呼ぶことにする）を左端をそろえて、上から下に向かって各行（つまり横の並び）の箱の個数が広義単調減少するように隙間なく並べてできる箱の集まりからなる図形を、ヤング図形（Young diagram）という。特にまったく箱がないものもヤング図形と考えて記号 \emptyset で表す。ヤング図形の全体を \mathbb{Y} で表す^{*4}。またヤング図形の i 行目とは、上から i 番目にある、横方向にひとつに連なった箱の集合であり、 j 列目とは、左から j 番目にある、縦方向にひとつに連なった箱の集合を指す。 i 行目にあつてかつ j 列目にもある箱を i 行 j 列目の箱、またはその箱自身を (i, j) で表す。この座標表示によって \mathbb{Y} の元を \mathbb{N}^2 へ自然に埋め込んだとき、ヤング図形を \mathbb{N}^2 の部分集合とみて、集合の包含関係 \subset やその他諸々の集合の演算等を定義する。例えば 2 つのヤング図形 Y_1, Y_2 について

$$Y_1 \subset Y_2 \iff s \in Y_1 \text{ ならば } s \in Y_2$$

などである。

命題 1.1.3. 分割の全体 \mathcal{P} とヤング図形の全体 \mathbb{Y} の間には全単射が存在する。その対応は：

$$\mathcal{P} \ni \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \mapsto Y(\lambda) = (\text{第 } i \text{ 行目に } \lambda_i \text{ 個の箱を並べたもの } (1 \leq i \leq k)) \in \mathbb{Y}$$



この命題による全単射 Y を通じて、 $Y(\lambda)$ を shape λ のヤング図形という言い方で表す。また $\lambda \subset \mu$ であるとは $Y(\lambda) \subset Y(\mu)$ であること、すなわち $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ と 0 が現れること許して同じ長さだけの成分で表示したときに $\lambda_i \geq \mu_i$ ($\forall i = 1, 2, \dots, k$) であることを意味する。

定義 1.1.5. \bullet shape λ のヤング図形に対して、 $Y(\lambda)$ の凸角 s とは、 s の右および下に λ の箱は存在しないような箱 s のことをいう。

^{*4} ここでは単なる集合としての記号であるが、後にある順序による束としての空間を指し示すことになる。

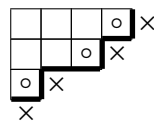
- これに対して $Y(\lambda)$ の凹角 s とは, λ の箱ではなく, s が 1 行目にあるときは s に隣接する左の箱が s が 1 列目にあるときは s に隣接する上の箱が, s がそのどちらでもないときは s に隣接する上および左の箱が, λ の箱であるときにいう.
- 2 つの箱 s, t について,

$$s \triangleleft t \iff s = (i, j) \text{ ならば } t = (i, j + 1) \text{ または } t = (i + 1, j)$$

と定義する.

- $Y(\lambda)$ の外縁線とはヤング図形 $Y(\lambda)$ の外の折れ線部分を指す.

例 1.1.6. 下の shape $(4, 3, 1)$ のヤング図形について \circ が凸角, \times が凹角, 太線がその外縁線を表す.

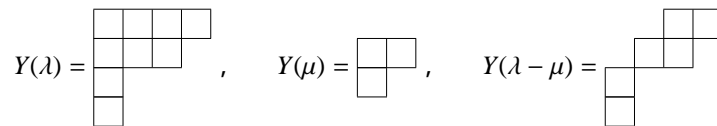


定義 1.1.7. λ と μ で $\lambda \supset \mu$ であるような 2 つのヤング図形 $Y(\lambda), Y(\mu)$ に対して, 箱の集まり $Y(\lambda) - Y(\mu)$ を shape が $\lambda - \mu$ の (skew Young diagram) といい, これを

$$Y(\lambda - \mu) = Y(\lambda) - Y(\mu)$$

で表す. また単に $\lambda - \mu$ の skew shape ということもある. $|\lambda - \mu| = (\lambda - \mu \text{ の箱の個数})$ とおく.

例 1.1.8. $\lambda = (4, 3, 1, 1), \mu = (2, 1)$ のとき



であって, $|\lambda - \mu| = 6$ となる.

以下は整数の分割に対する母関数表示である. また [1] には整数の分割に関するさまざまな母関数が紹介されていて面白い.

命題 1.1.9. $p(n) = \#\mathcal{P}_n$ においてこれを分割関数と呼ぶ. 分割関数 $\{p(n) \mid n \geq 0\}$ の母関数を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ とおく. このとき $f(x)$ は,

$$f(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i}$$

と表される.

Proof. $\frac{1}{1 - x^i} = 1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \dots$ であるから,

$$(\text{右辺}) = (1 + x + x^{1+1} + \dots)(1 + x^2 + x^{2+2} + \dots)(1 + x^3 + x^{3+3} + \dots) \dots$$

を展開すると x^n の係数は n の分割の全体の個数 $p(n)$ に等しい. 例えば 4 の分割は

$$(1, 1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2), (3, 1), (4)$$

で、それぞれ次のような展開と対応している。

$$x^{1+1+1+1}, x^2x^{1+1}, x^{2+2}, x^3x^1, x^4$$

□

1.2 マヤ図形

定義 1.2.1. $(x_1x_2\cdots)$ および $(y_1y_2\cdots)$ を 0, 1 から成る数列とし, i が十分大ならば $x_i = 0, y_i = 1$ と仮定する. このとき数列

$$[\cdots 111\cdots y_3y_2y_1x_1x_2x_3\cdots 000\cdots]$$

をマヤ図形という^{*5}. マヤ図形全体を M で表す.

命題 1.2.2. 任意のマヤ図形 $m \in M$ に対して

$$m = [\cdots y_3y_2y_1x_1x_2x_3\cdots]$$

で y_1 と x_1 の間を境に, 左側の列 $(\cdots y_3y_2y_1)$ の 0 の個数と右側の列 $(x_1x_2x_3\cdots)$ の 1 の個数が等しくなるような番号付がただひとつ存在する. y_1 と x_1 の間の位置を m の中央線といい, 中央線を明示するときは記号 \parallel を用いて

$$m = [\cdots y_3y_2y_1 \parallel x_1x_2x_3\cdots]$$

で表記する.

Proof. マヤ図形 $m \in M$ を考える. m に現れる連続する 2 つの文字の間を境に左側にある 0 の個数と右側にある 1 の個数の差は, その境目をひとつ左にずらしたところでのそれより 1 だけ増える. 従って境目を十分左側を取ればこの値は負数 $-k$ ($k > 0$) になり, m は無限列であるからその境目より右に k だけずらした境目は丁度 0 となる. また中央線の一意性はこの考察から明らかである. □

命題 1.2.3. マヤ図形全体 M とヤング図形の全体 \mathbb{Y} の間に全単射が存在する. その対応 $M \ni m \mapsto Y(m) \in \mathbb{Y}$ は次の通りである:

$$0 \mapsto \text{縦線}, 1 \mapsto \text{横線}, \text{として } 0, 1 \text{ をヤング図形の外縁線に対応させる.}$$

さらにマヤ図形の中央線はこの対応においてヤング図形の主対角線とその外縁線の共通部分 (一頂点) に対応する.

例 1.2.4.

$$M \ni [\dots 11101001 \parallel 01101000 \dots] \longleftrightarrow \begin{array}{cccc} \times & & & \\ & \times & & \\ & & \times & \\ & & & \times \end{array} \in \mathbb{Y}$$

(\times は主対角線を表す) 特に,

$$M \ni [\dots 1111 \parallel 0000 \dots] \longleftrightarrow \emptyset \in \mathbb{Y}$$

であるからこのマヤ図形 $[\dots 1111 \parallel 0000 \dots]$ を自明なマヤ図形という.

^{*5} マヤ図形 (Maya diagram) は佐藤幹夫氏による用語で, たとえば [14] には数列ではなく (本当に) 図形で出てくる

1.3 Fairy Sequence

定義 1.3.1. 写像 $F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ で次の性質を満たすものを fairy sequence という：

1. $F(i) \geq F(j)$ ($0 \leq i \leq j$ のとき)
2. $F(i) \leq F(j)$ ($i \leq j \leq 0$ のとき)
3. $|F(i) - F(i-1)| \leq 1$ ($\forall i \in \mathbb{Z}$)
4. $F(i) = 0$ ($|i|$ が十分大きいとき)

fairy sequence の全体を \mathcal{F} で表す。

例 1.3.2.

$$F = (\dots, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, \boxed{5}, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 0, 0, \dots)$$

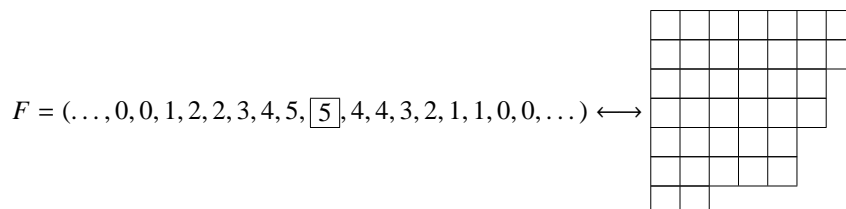
ここで \square は 0 の位置を示す。以後このようにして表すことがある。

命題 1.3.3. $F \in \mathcal{F}$ に対して $Y \in \mathbb{Y}$ を、(Y の第 x 対角線は $F(x)$ 個の箱からできる) と定義する。この対応

$$\mathcal{F} \ni F \mapsto Y \in \mathbb{Y}$$

は fairy sequence の全体 \mathcal{F} とヤング図形全体 \mathbb{Y} の間の全単射である。ここで Y の第 x 対角線とは集合 $\{(i, j) \in Y \mid j - i = x\}$ を指す。

例 1.3.4.



1.4 ヤング束とヤング盤

命題 1.4.1. (\mathbb{Y}, \subset) は束となる。これをヤング束 (Young lattice) といい、以後単に \mathbb{Y} で表記する。

Proof. poset であることは \mathbb{N}^2 の部分順序集合であるから。また $\lambda, \mu \in \mathbb{Y}$ とすると、その 2 つの上限は $\lambda \cup \mu$ 、下限は $\lambda \cap \mu$ で与えられる。実際それぞれの分配法則が満たすことは集合の演算として従う。□

定義 1.4.2. $\lambda \in \mathbb{P}$ に対して

$$\begin{aligned} \lambda^- &= \{\mu \in \mathbb{Y} \mid \mu \subset \lambda, |\mu| = |\lambda| - 1\} \\ \lambda^+ &= \{\mu \in \mathbb{Y} \mid \mu \supset \lambda, |\mu| = |\lambda| + 1\} \end{aligned}$$

とおく。

$\mu \in \lambda^-$ のとき μ は λ のある凸角をひとつ取り去ってできるヤング図形である。また $\mu \in \lambda^+$ のとき μ は λ のある凹角をひとつ付け加えてできるヤング図形である。

定義 1.4.3. • ヤング図形 Y の各箱に整数値を割り当てた図形 T をヤング盤 (Young tableau) または単に盤 (tableau) という. 盤の全体を Tab で表す. また整数値を割り当てる前のヤング図形 Y を T の shape といい, 記号で $\text{sh}T$ と表す. shape $Y(\lambda)$ の盤の全体を $\text{Tab}(\lambda)$ で, 箱の個数が n のヤング図形を shape にする盤の全体を $\text{Tab}(n)$ と表す. (小文字のギリシャ文字を使うときは shape を, 小文字の英文字を用いるときは箱の個数を表す.)

- 盤であって使われる数値がすべて互いに相異なるとき, 数字盤という. その全体を Num で表す.
- 盤であって各箱割り当てられた整数値が各行左から右に向かって広義単調増加, 各列上から下に向かって狭義短調増加となるものを半標準盤という. その全体を SST で表す.
- 数字盤でかつ半標準盤であるものを標準盤という. 標準盤の全体を STab で表す.
- 盤 $T \in \text{Tab}(n)$ に対して,

$\text{cont}(T) = T$ の要素すべての重複を含めた多重集合

$$\text{seq}(T) = (t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (\{t_1, \dots, t_n\} = \text{cont}(T) \quad T \text{ の要素を重複を含めて単調増加に並べたもの})$$

と定める. A が整数を元とする多重集合のとき, $\text{Tab}(n; A)$ を n 個の箱から成る $\text{cont}(T) = A$ となる盤 T の全体を表す.

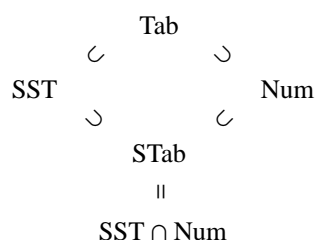
$$\text{cont}(T) = \{T \in \text{Tab}(n) \mid \text{cont}(T) = A\}$$

- 標準盤 $T \in \text{STab}$ のとき,

$$T^b = (T \text{ から } T \text{ の最大の要素 } h \text{ をもつ箱を取り去ってできるもの})$$

とおく. 明らかに T^b は標準盤でその箱の個数は T の箱の個数よりひとつ少ない.

- $T \in \text{STab}$ とする. $\text{chain}T = (\text{sh}T, \text{sh}T^b, \text{sh}T^{bb}, \dots, \emptyset)$ とおき, これを T の鎖という. また k 個の連続した $b; T^{b^k}$ を T^{kb} で表すことにする.



$T \in \text{STab}(n)$ に対してその鎖と要素が定義されたが, 逆に T はこれら 2 つの情報で決定されることはすぐに分かる. T の鎖を固定して要素を $\{1, 2, \dots, n\}$ に取り替えたものを T は正規化された (normalized) という.

例 1.4.4. $\begin{array}{|c|c|c|} \hline -4 & -2 & 0 \\ \hline -1 & 2 & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline \end{array} \in \text{STab}(\lambda), \lambda = (3, 2, 2)$ に対して T を正規化したものは $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline \end{array}$ となる

1.5 Schützenberger のアルゴリズム

ここでは Schützenberger による shape を固定した標準盤の間の変換 S のアルゴリズムを与える ([6]). そのアルゴリズムは deflation の手続きを基礎にしている.

定義 1.5.1 (deflation). $P \in \text{STab}(n)$ とする. m を P の最小の要素とする. まず P の最小の要素 m を含む箱 $((1, 1)$ の箱) に対して, その要素 m を取り去って空箱にする. そして下の操作に従ってその空箱を $\text{sh}P$ の凸角に来るまで動かし, その空箱 s を取り去ってできる盤を T とおく.

操作 空箱に隣接する右の箱と下の箱の要素を比べ, 小さい方の箱と空箱を入れ替える. (従ってもとの空箱にはその小さい方の要素が入る.) ただし右または下の箱のいずれか一方がない場合は箱のある方を選択する.

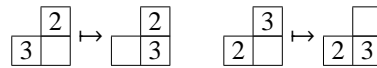


このとき T とその最小の要素 m , 取り去った凸角 s^{*6} の 3 組を $D(P) = (T, s, m)$ と書いて P の deflation と呼ぶ. また $P^\downarrow = T$ と書く.

D の各操作で空箱を除いた残りの部分は, 要素の各行各列の単調増加性が保存される. 従って T は標準盤である. また D は可逆な操作である. つまり (T, s, m) を与えれば, このアルゴリズムを逆にたどることで標準盤 P を復元することができる.

定義 1.5.2 (inflation). T を標準盤, s を T の凹角, m を T の最小の要素よりも小なる整数とする. T に s を付け加えて, 次の操作を空箱が $(1, 1)$ に来るまで行い, 最後にその空箱に要素 m を入れてできる盤を P とおく.

操作 空箱に隣接する上の箱と左の箱の要素を比べ, 要素の大きい方に空箱を動かし, もとの空箱にはその大きい方の要素を入れる. (従ってもとの空箱にはその大きい方の要素が入る.) ただし上または左の箱のいずれか一方がない場合は箱のある方を選択する.

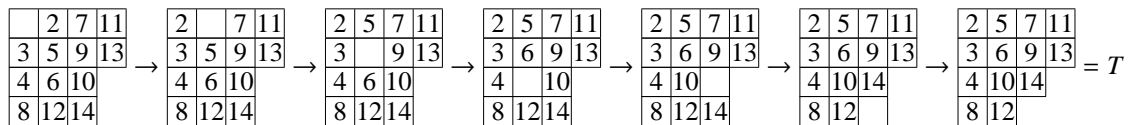


このとき $I(T, s, m) = P$ とおく.

定義より, それぞれの操作が互いに逆写像であるから, I, D は互いにそれぞれの逆写像である:

$$I(D(P)) = P, \quad D(I(T, s, m)) = (T, s, m)$$

例 1.5.3. $P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 & 11 \\ \hline 3 & 5 & 9 & 13 \\ \hline 4 & 6 & 10 & \\ \hline 8 & 12 & 14 & \\ \hline \end{array}$ のとき, P の deflation は次のようになる.



よって $D(P) = (T, (4, 3), 1)$ である.

命題 1.5.4. $P \in \text{STab}$, s を P の最大の要素をもつ箱とする.

$$1. (P^\downarrow)^\downarrow = (P^\downarrow)^\downarrow$$

^{*6} 箱 s は位置 (座標) で示す.

$$2. \text{sh}P^\downarrow = \text{sh}P^b \iff (\text{sh}P^b - \text{sh}(P^b)^\downarrow) \triangleleft s$$

Proof. (1) P の最大の要素 h のある箱 s は $\text{sh}P$ の凸角にあるため, deflation の操作で箱 s に空箱が来るとしたら最後のステップである. 従って, (a) P の deflation で空箱が t から s ($t \triangleleft s$) に移動するとき, P^\downarrow は箱 t に要素 h がありこれが最大の要素である. よって $(P^\downarrow)^b$ はさらにその要素 h の箱 s を取り去ることを意味する. 一方 P^b は P の箱 s を取り去ってできており, h が P の最大の要素であったから, $(P^b)^\downarrow$ は P の deflation において空箱が s に移動する直前 (1 ステップ前) までの操作で得られる. 従って $(P^\downarrow)^b = (P^b)^\downarrow$ が成り立つ.

また (b) P の deflation で s に移動することがないとき, 各ステップで箱 s の要素は変化せず P^\downarrow の最大の要素は h でその箱は s である. よって, $(P^\downarrow)^b = (P^b)^\downarrow$ が成り立つ.

(2) (\Rightarrow) の証明は (a) と同様の議論である. (\Leftarrow) の証明をする. 仮定により, P の deflation では箱 s に移動することになる. 従って h が最大の要素であったから P^b は P から s を取り去ることであるので, P^\downarrow と P^b の shape は等しい. \square

次に Schützenberger のアルゴリズムを説明する. $P \in \text{STab}(n)$ とする. P を出発点とした deflation を連続して行えば列

$$(P, P^\downarrow, P^{\downarrow\downarrow}, \dots, \emptyset)$$

が得られる. この列を shape にしてみればヤング束の鎖が得られる. この鎖と, P の要素をすべて (-1) 倍した要素として得られる盤を $S(P)$ と定義する. deflation のはじめの過程で取り去る要素を m とおくと, 最後に到達する空箱はその盤の凸角に来ている. 一方要素 m がその盤の最小値であるから, $-m$ は $\text{cont}(S(P))$ の中で最大である. 従って, $S(P)$ の最大の要素が $\text{sh}S(P)$ の凸角に存在する. 従って箱の個数に関する帰納法を用いて $S(P)$ は標準盤であることがわかる.

定義 1.5.5. $P \in \text{STab}(n)$, $\text{seq}(P) = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ とする. このとき $S(P)$ を

$$\begin{aligned} \text{chain}S(P) &= (\text{sh}P, \text{sh}P^\downarrow, \text{sh}P^{\downarrow\downarrow}, \dots, \text{sh}P^{\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow}) \\ \text{seq}(S(P)) &= (-p_m, -p_{m-1}, \dots, -p_1) \end{aligned}$$

で定義する. このとき $S(P)$ は標準盤である.

例 1.5.6. まず deflation による列を考えると,

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 4 & 9 & \\ \hline 6 & 7 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 7 & 9 & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 & 8 \\ \hline 6 & 7 & 9 & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 8 \\ \hline 6 & 7 & 9 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 7 & 8 \\ \hline 6 & 9 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 \\ \hline 9 & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline 9 \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \emptyset$$

となっている. このとき $\text{seq}(S(P)) = (-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9)$ であるから,

$$\begin{array}{cccccccc} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & -1 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & -2 \ -1 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & -3 \\ \hline & & & \\ \hline & & & -2 \ -1 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & -3 \\ \hline & & & \\ \hline & & & -2 \ -1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & -3 \\ \hline & & & \\ \hline & & & -5 \ -4 \\ \hline & & & -2 \ -1 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & -6 \ -3 \\ \hline & & & \\ \hline & & & -5 \ -4 \\ \hline & & & -2 \ -1 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & -7 \ -6 \ -3 \\ \hline & & & \\ \hline & & & -5 \ -4 \\ \hline & & & -2 \ -1 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & -7 \ -6 \ -3 \\ \hline & & & \\ \hline & & & -8 \ -5 \ -4 \\ \hline & & & -2 \ -1 \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -9 & -7 & -6 & -3 \\ \hline -8 & -5 & -4 & \\ \hline & & & -2 \ -1 \\ \hline \end{array} = S(P) \end{array}$$

このアルゴリズムは可逆的である. S の逆写像 S' は次のように定義される.

定義 1.5.7. $T \in \text{STab}(n)$, $\text{seq}(T) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, s_i を T の要素が t_i である箱とする. $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ を次のようにして帰納的に定義する.

$$P_0 = \emptyset$$

$$P_i = I(P_{i-1}, s_i, -t_i) \quad 1 \leq \forall i \leq n$$

そして $S'(T) = P_n$ とおく.

S の定義からそれほど自明ではないこととして, 次の定理が成り立つ.

定理 1.5.8. S は対合 (involution) である. つまり

$$S(P) = S'(P), \quad \forall P \in \text{STab}$$

ここで定理の証明のために少し定義を行う.

定義 1.5.9. $P \in \text{STab}$ とする.

$$P^{[0,0]} = P, \quad P^{[i,j+1]} = P^{[i,j]b}, \quad P^{[i+1,j]} = P^{[i,j]d}$$

で定義する. この定義の妥当性は命題 1.5.4 により保障される.

Proof. $P \in \text{STab}(n)$ とする. 定義から明らかに $\text{seq}(S(P)) = \text{seq}(S'(P))$ であるから, $\text{chain}S(P) = \text{chain}S'(P)$ を示せばよい. $\lambda^{[i,j]} = \text{sh}P^{[i,j]}$ とおく. このとき

$$\text{chain}P = (\lambda^{[0,0]}, \lambda^{[0,1]}, \dots, \lambda^{[0,n]}) \quad (1)$$

$$\text{chain}S(P) = (\lambda^{[0,0]}, \lambda^{[1,0]}, \dots, \lambda^{[n,0]}) \quad (2)$$

である. このとき S' の定義で定めた $\{P_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ は

$$\text{chain}P_i = (\lambda^{[0,n-i]}, \lambda^{[1,n-i]}, \dots, \lambda^{[i,n-i]}) \quad (\forall i = 1, 2, \dots, n)$$

となるのが次の補題 1.5.10 よりわかる. よって特に $i = n$ とおけば $\text{chain}S'(P) = \text{chain}S(P)$. □

補題 1.5.10. $P \in \text{STab}(n)$ とし $\lambda^{[i,j]} = \text{sh}P^{[i,j]}$ とおく. また $\{P_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ を P に対する S' の定義で与えたものとする. このとき,

$$\text{chain}P_i = (\lambda^{[0,n-i]}, \lambda^{[1,n-i]}, \dots, \lambda^{[i,n-i]}) \quad (\forall i = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ.

Proof. i に関する帰納法で示す. $i = 0$ ならば $P_0 = \emptyset$ より, $\text{chain}P_0 = (\emptyset) = (\lambda^{[0,n]})$ で主張が成立する. $i - 1 \geq 0$ とし $i - 1$ のときは主張が成立すると仮定する.

このとき, $\text{sh}P_i^{kb} = \lambda^{[k,n-i]}$ が成り立つことを k に関する帰納法で示す.

$k = 0$ のとき,

$$P_i = I(P_{i-1}, s, -m) \iff D(P_i) = (P_{i-1}, s, m)$$

$$\implies P_i^d = P_{i-1}$$

よって

$$\text{sh}P_i = \text{sh}P_{i-1} + s = \lambda^{[0,n-i]}$$

となり，主張が成立する．

次に $k \geq 0$ のときに主張は成立すると仮定して， $k+1$ のときを示す．

4つの分割の配列

$$\begin{pmatrix} \lambda^{[k,n-i]} & \lambda^{[k,n-i+1]} \\ \lambda^{[k+1,n-i]} & \lambda^{[k+1,n-i+1]} \end{pmatrix} \quad (3)$$

を観察する．上三角の3つが定めれば，残った1つの分割は決定されることを示す．



$P_i^{kb} = T$ とおく．従って $P_i^{(k+1)b} = T^b$ であるから $\text{sh}T^b$ を調べればよい．

$$\text{sh}T - \text{sh}(T^\downarrow)^b = \{a, b\}$$

とおく．従って

$$\lambda^{[k,n-i]} - \lambda^{[k+1,n-i+1]} = \{a, b\} \quad (4)$$

である．このとき a, b の少なくとも一方は T の最大の要素を含む箱であるから， b をその箱と仮定しても一般性を失わない．

(I) $a < b$ である (従って $\{a, b\}$ はドミノの形 ,  を成す) とき．

$$\begin{aligned} \text{sh}T^b &= \text{sh}T^\downarrow && (\text{命題 1.5.4 (2) } (\Leftarrow)) \\ &= \lambda^{[k,n-i+1]} && (i \text{ に関する帰納法の仮定}) \\ &= \lambda^{[k+1,n-i+1]} && (\text{再び } P \text{ に対する命題 1.5.4 (2) } (\Leftarrow)) \end{aligned}$$

(II) $a \not< b$ である (従って $\{a, b\}$ はドミノの形を成さない) とき． $\text{sh}T = \text{sh}T^b + b$ と $\text{sh}T = \text{sh}(T^b)^\downarrow + (a+b)$ より

$$\text{sh}T^b = \text{sh}(T^b)^\downarrow + a \quad (5)$$

である．

$$\text{sh}T^\downarrow = \text{sh}(T^b)^\downarrow + x, \quad \text{sh}T = \text{sh}T^\downarrow + y \quad (6)$$

とおく． $\text{sh}T = \text{sh}T^\downarrow + y = (\text{sh}(T^b)^\downarrow + x) + y$ よって等式 (5) より $x + y = a + b$ ．また命題 1.5.4 (2) (\Rightarrow) より $\text{sh}T^b \neq \text{sh}T^\downarrow$ であるから $x \neq a$ ．ゆえに $x = b, y = a$ を得る．よって

$$\text{sh}T^b = \text{sh}(T^b)^\downarrow + b$$

つまり

$$\lambda^{[k+1,n-i]} = \lambda^{[k+1,n-i+1]} + b \quad (7)$$

以上より，

$$\begin{aligned} \text{sh}T^b &= \text{sh}T - b && (b \text{ の定義}) \\ &= \lambda^{[k,n-i]} - b && (k \text{ に関する帰納法の仮定}) \\ &= \lambda^{[k,n-i]} - b - a + a \\ &= \lambda^{[k+1,n-i+1]} + a && (\text{等式 (4)}) \\ &= \lambda^{[k+1,n-i]} && (\text{等式 (7)}) \end{aligned}$$

□

例 1.5.11. $P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$ のとき, 証明で与えた $\lambda^{[i,j]} = \text{sh}P^{[i,j]}$ の表は下のようになる. $S(P) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -6 & -3 & -1 \\ \hline -5 & -2 & \\ \hline -4 & & \\ \hline \end{array}$

	0	1	2	3	4	5	6
0							0
1						0	
2					0		
3				0			
4			0				
5		0					
6	0						

上の定理の証明中の式 (3) に現れる 4 つの分割の配列の状況をまとめると, 次の定義のタイプ (S1) またはタイプ (S2) のいずれかに分類される.

定義 1.5.12. $\lambda, \mu \in \kappa^- \cap \nu^+$ である 4 つの分割の配列 $\begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ は

1. $\lambda = \mu$ かつ $(\lambda - \nu) \triangleleft (\kappa - \lambda)$ であるとき, $\kappa - \mu$ はドミノになる. このときこの配列はタイプ (S1) である
2. $\lambda \neq \mu$ かつ $\kappa = \lambda \cup \mu, \nu = \lambda \cap \mu$ であるとき, $\kappa - \mu$ はドミノになっていない. このときこの配列はタイプ (S2) である

と定義する. これはすべてを尽くしている.

定義 1.5.13. $P \in \text{STab}$ に対して $S(P) = P$ のとき, P を自己双対盤という.

特に P の要素が整数内の区間 $[-n, n]$ または $[-n, n] - \{0\}$ を丁度 1 回ずつ使われるとき, 正規化された自己双対盤という.

例 1.5.14. shape が 4 以下の分割であるものの (正規化された) 自己双対盤

$$\begin{array}{|c|}, \begin{array}{|c|c|}, \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}, \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}, \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|}, \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & -1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline -2 & 1 \\ \hline -1 & 2 \\ \hline \end{array}\end{array}$$

自己双対盤 P を与えれば $(\lambda^{[i,j]})_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j \leq n}}$ は対称になる. すなわち $\lambda^{[i,j]} = \lambda^{[j,i]} (\forall i, j)$. 実際定義より $\lambda^{[i,0]} = \lambda^{[0,i]}$

であり, 4つの分割の配列の規則により, 残りの $\lambda^{[i,j]}$ が対称性をもつことがわかる. 特に $\lambda^{[i,i+1]} = \lambda^{[i+1,i]}$ であるから, 次の4つの分割の配列

$$\begin{pmatrix} \lambda^{[i,i]} & \lambda^{[i,i+1]} \\ \lambda^{[i+1,i]} & \lambda^{[i+1,i+1]} \end{pmatrix}$$

はタイプ (S1) である. よって $\lambda^{[i,i]} - \lambda^{[i+1,i+1]} = \{a, b\}$ は $a < b$ である. この隣り合った2箱 $\{a, b\}$ をドミノと呼ぶ. ドミノの2箱 a, b が横方向に並んでいる ($\square \square$) とき横ドミノ, 縦方向に並んでいる ($\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}$) とき縦ドミノと呼ぶ.

定義 1.5.15. $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対して,

$$\lambda^{(-)} = \{\nu \in \mathcal{P}_{n-2} \mid \exists! \mu \in \mathcal{P}_{n-1} : \nu < \mu < \lambda\}$$

$$\lambda^{(+)} = \{\nu \in \mathcal{P}_{n+2} \mid \exists! \mu \in \mathcal{P}_{n-1} : \lambda < \mu < \nu\}$$

と定義する. また $Y(\lambda)$ の凸角のドミノ δ とは, δ はドミノで, $Y(\lambda) - \delta \in \lambda^{(-)}$ であるときにいう. 同様に, $Y(\lambda)$ の凹角のドミノ δ とは, δ はドミノで, $Y(\lambda) + \delta \in \lambda^{(+)}$ であるときにいう. ここで $+$ は図形としての離散和 (2つの disjoint な図形の合併) を表す.

命題 1.5.16. $\lambda^{(-)} = \emptyset$ のとき, 階段 $Y(\lambda) = (r, r-1, \dots, 2, 1)$ ($\exists r \geq 0$) の形になる. ただし $r = 0$ のときは $\lambda = \emptyset$ である. 逆にこのような階段の形をした分割 λ に対して $\lambda^{(-)} = \emptyset$ が成り立つ.

$$\{\lambda \in \mathcal{P} \mid \lambda^{(-)} = \emptyset\} = \{(r, r-1, \dots, 2, 1) \in \mathcal{P} \mid r \geq 0\}$$

Proof. (c) 明らかであるから (c) を示す. $\lambda^{(-)} = \emptyset$ とする. $Y(\lambda)$ が階段の形でなければ

$$\lambda_i = \lambda_{i+1} > \lambda_{i+2} \quad \text{または} \quad \mu_i = \mu_{i+1} > \mu_{i+2}$$

ただし $\mu = {}^t\lambda (= \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid (j, i) \in \lambda\})$ となる i が存在する. $\lambda_i = \lambda_{i+1} > \lambda_{i+2}$ なら $(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1} - 1, \lambda_{i+2}, \dots)$ は $|\lambda| - 2$ の分割で, $\lambda^{(-)}$ の元であり, $\lambda^{(-)} = \emptyset$ に反する. $\mu_i = \mu_{i+1} > \mu_{i+2}$ も同様である. \square

この高さ r の階段状の分割 $(r, r-1, \dots, 2, 1)$ を r のコアという.

自己双対盤に対して, 対角線

$$\{\lambda^{[0,0]}, \lambda^{[1,1]}, \dots, \lambda^{[k,k]}\} \quad \left(k = \left\lfloor \frac{|\lambda|}{2} \right\rfloor\right)$$

について考える. ここで $\lfloor \cdot \rfloor$ は Gauss 記号である: $\lfloor x \rfloor = \min\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq x\}$, $x \in \mathbb{R}$

1. $\lambda^{[0,0]}$ はコアで $(0) = \emptyset$ または $(1) = \square$ である.
2. 隣り合った組 $(\lambda^{[i,i]}, \lambda^{[i+1,i+1]})$ は1つのドミノの差がある.

逆にこの2つの性質を満たす分割の列が与えられたとき, タイプ (S1), (S2) を用いて対称な分割の配列 $(\lambda^{[i,j]})$ が得られる. 従って正規化された自己双対盤の chain $(\lambda^{[0,0]}, \lambda^{[0,1]}, \dots, \lambda^{[0,n]})$ が構成される.

定義 1.5.17. D が shape λ , コア r の標準ドミノ盤であるとは, D は $\text{sh}D = \lambda$ の盤で, $\text{seq}(D) = (0, 0, \dots, 0, d_1, d_1, \dots, d_n, d_n)$ (0 が $\frac{r(r-1)}{2}$ 個, d_i が丁度2回ずつ現れる (ただし $d_i \neq d_j$ ($i \neq j$), $2n = |\lambda| - \frac{r(r-1)}{2}$)). 0 は箱 (i, j) ($i + j \leq r + 1$) にあり, D の各行は左から右に向かって, 各列は上から下に向かってそれぞれ広義短調増加であるときにいう.

特に要素が $\{0, 1, \dots, n\}$ からできるとき正規化された標準ドミノ盤という.

さらにコアが 0 または 1 である標準ドミノ盤を全標準ドミノ盤 (total standard domino tableau) という.

標準ドミノ盤を図で表示するときは各要素は 2 回ずつ現れ, 同じ要素がドミノを成すことから, ドミノ内に 1 つずつ要素を書き下すことにする.

0	0	1		
0	2		7	
3	4			
	6			
5				

shape $(5,5,4,2,1)$, コア 2 の標準ドミノ盤の例

以上をまとめて, 次の定理を得る.

定理 1.5.18. shape λ の正規化された自己双対盤の全体と同じ shape λ の正規化された全標準ドミノ盤の全体は全単射を与える.

例 1.5.19.

-3	-1	2
-2	1	3

 \longleftrightarrow

1	2
	3

分割の表は次のようになる.

	0	1	2	3	4	5	6
0							0
1							0
2					0		
3				0			
4			0				
5		0					
6	0						

-7	-5	-4	1	3
-6	-2	0	2	
-3	4	5	6	
-1	7			

 \longleftrightarrow

0	1	3
2	5	6
4		
7		

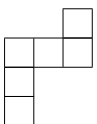


分割の表は 17 ページのようになる.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0																
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8																
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																

1.6 Rim Hook

前節で標準ドミノ盤の概念を導入したが、これを別の捕らえ方から定義することもできる。その立場から眺めることで一般のドミノでない対象をも包括する性質が理解される。そのためにこの節では rim hook の概念を導入し、いくつかの用語の整理とドミノに関係する必要な事実を証明することにする。

定義 1.6.1. skew shape α が k -rim hook であるとは、 $|\alpha| = k$ で、 α は箱が辺を通して一繋がりにできており、各対角線と高々 1 個の箱で交わるものをいう。また rim hook とはある k が存在して k -rim hook であるときにいう。

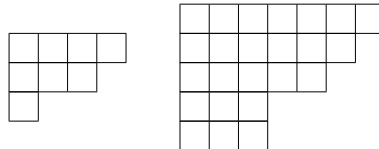
例 1.6.2.  は 6-rim hook。特に 2-rim hook はドミノ ,  である。

定義 1.6.3. $k \geq 1$ を固定する。 $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ で $\lambda - \mu$ が k -rim hook であるとする。このとき $\lambda >_k \mu$ で表す。

またある分割の列 $(\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^s)$ が存在して、 $\lambda >_k \nu^1 >_k \dots >_k \nu^s >_k \mu$ であるとき $\lambda \triangleright_k \mu$ または $\mu \subset_k \lambda$ で表す。

集合 $\{\lambda \in \mathcal{P} \mid \lambda \triangleright_k \emptyset\}$ を RH_k で表し、その元を k -分解可能な (k -decomposable^{*7}) ヤング図形という。特に \triangleright_1 は \mathbb{Y} 上の 2 項関係 \triangleright と同じ 2 項関係である： $(\text{RH}_1, \triangleright_1) = (\mathbb{Y}, \triangleright)$ である。また $(\text{RH}_k, >_k)$ は束である。これを k -rim hook 束 (k -rim hook lattice) という。

例 1.6.4. 分割 $(4, 3, 1) \vdash 8$ に対応するヤング図形は、4-分解可能な(従って 2-分解可能な)ヤング図形であるが、8-分解不能である。また分割 $(7, 6, 5, 3, 3) \vdash 24$ に対応するヤング図形は、3-分解可能であるが、2, 4, 6, 8, 12, 24-分解不能である。



補題 1.6.5 ([2]). $\lambda \in \mathcal{P}$ 、それに対応する fairy sequence を $F = F_\lambda$ とおく。

$$Y(\lambda) \text{ は } k\text{-分解可能なヤング図形である} \iff \sum_{i \equiv a \pmod{k}} F(i) = \sum_{j \equiv b \pmod{k}} F(j) \quad \forall a, b \in \{0, 1, \dots, r-1\}$$

次の定理は、[2] の中心的な定理であり、また本論文においても重要な役割を果たす。

定理 1.6.6 (Fomin-Stanton[2]). k -rim hook 束 RH_k とヤング束 \mathbb{Y} の k 個の直積との間は束として同型である。

$$\mathbb{Y}^k \cong \text{RH}_k$$

以下は与えられたヤング図形 (マヤ図形) が k -分解可能であるための判定法を示す。


定義 1.6.7. 正整数 k を固定する。マヤ図形全体 M の上に次の 2 項関係 \sim_k を定義する。

shape が k -rim hook の skew shape で、外縁線を左下から右上に向かって 0, 1 で読み上げてできる数列 A と、内縁線 (外縁線とは反対側の折れ線部分) を左下から右上に向かって 0, 1 で読み上げてできる数列 B について、マヤ図形の部分列に A を B に、または B を A にする変換：

^{*7} [2] の用語である。

I $[vAw] \mapsto [vBw]$

II $[vBw] \mapsto [vAw]$

(たとえば $k = 4$ での 4-rim hook  なら $A = 11010, B = 01011$) と, 連続する k 個の同じ数字を消去または挿入する変換:

III $[vii \cdots iw] \mapsto [vw]$ (k 個の連続する $i \in \{0, 1\}$ を消去)

IV $[vw] \mapsto [vii \cdots iw]$ (k 個の連続する $i \in \{0, 1\}$ を挿入)



(ただし, v, w はマヤ図形の部分列) を有限回数用いて 2 つのマヤ図形 m_1, m_2 が移りあうとき, $m_1 \sim_r m_2$ で表す. これはマヤ図形全体の上の同値関係である.

これらの各操作は, もとのマヤ図形 (ヤング図形) と変換したあとのマヤ図形 (ヤング図形) をそれぞれ対角線番号を $(\text{mod } k)$ で箱に記入したときに, そこに現れるすべての数字は同数ずつ減るか, または増えるので, 補題 1.6.5 より k -分解可能の可能性は保存される. したがって,

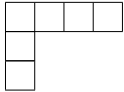
補題 1.6.8. 2 つのマヤ図形 $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ について, $m_1 \sim_k m_2$ のとき,

$$Y(m_1) \text{ は } k\text{-分解可能なヤング図形である} \iff Y(m_2) \text{ は } k\text{-分解可能なヤング図形である}$$

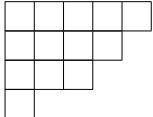
系 1.6.9. マヤ図形 m に対して対応するヤング図形 $Y(m)$ が k -分解可能 $\iff m \sim_k \emptyset$.

特に $k = 2$ においては 2-rim hook はドミノ ,  を意味し, 2-分解可能であることは, ヤング図形のドミノタイル張りできることに同義である. またマヤ図形 m の対応するヤング図形がドミノタイル張り可能である必要十分条件は, 連続して現れる 2 つの同じ数字 (00 または 11) を消去していくと, やがて数列が自明なマヤ図形 $[\cdots 111000 \cdots]$ となることである.

例 1.6.10. $[\cdots 11101\underline{1000}1000 \cdots] \mapsto [\cdots 11100\underline{1000} \cdots] \mapsto [\cdots 111000 \cdots]$

ただし下線は消去するところを指す. よってこれは 2-分解可能. またもとのマヤ図形に対応するヤング図形は  である.

$[\cdots 11101\underline{010101000} \cdots] \mapsto [\cdots 11101\underline{10101000} \cdots] \mapsto [\cdots 11100\underline{10100} \cdots] \mapsto [\cdots 11101000 \cdots]$

よってこれは 2-分解可能ではなく, コアが 1 のものを含む (§2 でコアを定義する). またもとのマヤ図形に対応するヤング図形は  である.

k -rim hook の個数に関する母関数は次のようになる.

命題 1.6.11. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ (分割関数 $p(n)$ の母関数) とする.

$$q_k(n) = \#\{\rho \in \mathcal{P} \mid Y(\rho) \text{ は } n \text{ 個の } k\text{-rim hook から成る } k\text{-分解可能なヤング図形}\}$$

に対して, その母関数 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_k(n)x^n$ は

$$g(x) = f(x)^k = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^i)^k}$$

で与えられる .

Proof. $f(x)^k$ の x^n の係数は命題 1.1.9 によって

$$\sum_{n_1+\dots+n_k=n} p(n_1)p(n_2)\cdots p(n_k)$$

で与えられる . これは定理 1.6.6 よりこれは $q_k(n)$ に等しい . □

2 Domino Tableaux

2.1 ドミノタイル張り問題

与えられたヤング図形がドミノタイル張り可能であるかどうかを判定するには , 前節で述べた k -rim hook の判定法を $k=2$ の場合に適用すればよい . $k=2$ の場合は基本関係が III だけで十分で , より単純で素早く判定することができる . つまり ,

系 2.1.1. λ がドミノタイル張り可能である必要十分条件は , 対応するマヤ図形 m_λ に 2 個連続して現れる同じ数字 (00 または 11) を消去することを有限回施して自明なマヤ図形 $[\cdots 111000 \cdots]$ に変換できることである .

一般には III だけを用いれば , $m_\lambda \sim_2 [\cdots 1110101 \cdots 01000 \cdots]$ (01 が r 個連続して並んでいるもの) の形に変換され , この右側のマヤ図形はこれ以上このような変換を施しても変わらない . このマヤ図形に対応する分割は , $(r, r-1, r-2, \cdots, 2, 1)$ で , また対応するヤング図形は長さ r の階段である . この分割を θ_r で表す . このとき $Y(\lambda)$ のコアは r であるという . さて任意に $\lambda \in \mathcal{P}$ を取り , $Y(\lambda)$ のコアが r であるとする . このとき skew shape $\lambda - \theta_r$ のドミノによるタイル張りの方法は何通りあるかを考えたい . ここではドミノタイル張りするもとの図形は , ヤング図形や skew shape から成るものでなくても , もっと一般的な任意の箱の図形から成るものでよい . 各 $\lambda - \theta_r$ の箱を頂点 , 隣接する箱はその 2 頂点間の辺として対応させてできるグラフ $G = (V, E)$ を考える . ここで V は G の頂点の集合で $\#V = |\lambda - \theta_r|$ を満たし , E は辺の集合である . $\lambda - \theta_r$ の (i, j) の位置にある箱に対応する G の頂点を $v_{ij} \in V$ とおき ,

$$V_0 = \{v_{ij} \in V \mid i+j \equiv 0 \pmod{2}\}, \quad V_1 = \{v_{ij} \in V \mid i+j \equiv 1 \pmod{2}\}$$

とおけば , $V = V_0 \sqcup V_1$ (disjoint union) で G のすべての辺は V_0 の頂点と V_1 の頂点を組にして得られる . つまり G は 2 部グラフである . さて与えられた図形をドミノタイル張りすることを , グラフ G を用いて表せば , E の部分集合 D であって , $\#D = \#V_0 = \#V_1 = \frac{1}{2}\#V$ かつ

任意の $e \in D$ に対して , $e = \{v_0, v_1\}$ となる $v_i \in V_i$ ($i=0,1$) が取れて , v_0, v_1 を含む D の辺は e だけである ,

となる G の部分グラフ $G' = (V, D)$ を定めることと同値である . したがってこのような G の部分グラフ G' の個数を求めればよい . グラフ理論ではこのような部分グラフは完全マッチング (perfect matching) とよばれている . 以後 [4, 12] を参考にして完全マッチングの個数を求める*8 .

*8 物理の世界では 2 つの頂点を 1 つの辺で結ばれた図形のことをダイマー (dimer (二量体 : 同種の分子が 2 分子結合して生じたもの)) と呼ばれており , 完全マッチングの個数を求める問題をダイマー問題という . また [4] では Pfaffian (Pfaffian) を用いて与えているが , ここではドミノタイル張り問題を解くことを優先して , 行列のサイズが半分になるように行列式で考察を与えた .

与えられた図形から上記のようにして 2 部グラフ $G = (V_0 \sqcup V_1, E)$ を作る .

$$V_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}, \quad V_1 = \{v_{1'}, v_{2'}, \dots, v_{k'}\}$$

とおく . つまり V_0, V_1 の頂点にそれぞれ任意に番号をつける . V_1 には ' をつけて番号付けをしたことに注意 . 次に k 次正方行列 $D = (d(i, j))_{1 \leq i, j \leq k}$ を次のようにして定義する .

$$d(i, j) = \begin{cases} 0 & (\{v_i, v_{j'}\} \notin E \text{ のとき}) \\ \pm z_1 & (\{v_i, v_{j'}\} \in E, \{v_i, v_{j'}\} \text{ は横向き の辺}) \\ \pm z_2 & (\{v_i, v_{j'}\} \in E, \{v_i, v_{j'}\} \text{ は縦向き の辺}) \end{cases} \quad (8)$$

ここで \pm の指定は後で行う . このとき ,

$$\det D = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) d(1, \sigma(1)) d(2, \sigma(2)) \cdots d(k, \sigma(k))$$

(ただし \mathfrak{S}_k は k 次対称群) について \sum の展開で現れる 0 でない単項式

$$\text{sgn}(\sigma) d(1, \sigma(1)) d(2, \sigma(2)) \cdots d(k, \sigma(k))$$

に対してグラフ

$$G' = (V, E'), \quad E' = \{\{v_1, v_{\sigma(1)'}\}, \{v_2, v_{\sigma(2)'}\}, \dots, \{v_k, v_{\sigma(k)'}\}\}$$

を対応させる . 式 (8) より , このグラフは G の完全マッチングを与える . 逆に G の完全マッチング $G' = (V, E')$ を与えると , $E' = \{\{v_1, v_{j_1'}\}, \{v_2, v_{j_2'}\}, \dots, \{v_k, v_{j_k'}\}\}$ に対して置換 σ を

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_k$$

と定義し , 単項式

$$\text{sgn}(\sigma) d(1, \sigma(1)) d(2, \sigma(2)) \cdots d(k, \sigma(k))$$

に対応させれば , これは 0 ではない . 従って 0 でない単項式の全体と G の完全マッチングの全体は 1 : 1 に対応している . ゆえに形式的には , 各項の符号を考えないように絶対値をつけたもの :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} |\text{sgn}(\sigma) d(1, \sigma(1)) d(2, \sigma(2)) \cdots d(k, \sigma(k))| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} |d(1, \sigma(1)) d(2, \sigma(2)) \cdots d(k, \sigma(k))|$$

に $z_1 = z_2 = 1$ を代入すれば , 求める完全マッチングの総数が計算される . これを行行列式 $\det D$ 自身で書き表すために , 式 (8) の $\pm z_1$ および $\pm z_2$ の符号をうまく選択して , $\det D$ の単項式がすべて同符号となるようにすれば , $|\det D|$ で求められる .

グラフ G の辺 E にそれぞれ向きをつけて有向グラフを定めたとする . 図で表示するときは有向辺の向きは矢印で表し , 矢印の向きと有向辺の向きは一致するようにとる .

各有向辺 $(v_i, v_{j'})$ に対して対応する D の要素 $d(i, j)$ の符号を正と定める . 逆に $d(i, j)$ に符号を与えれば , $d(i, j)$ の符号が正であるときに , 辺 $\{v_i, v_{j'}\}$ を有向辺 $(v_i, v_{j'})$ と定め , 符号が負であれば , 辺 $\{v_i, v_{j'}\}$ を有向辺 $(v_{j'}, v_i)$ と定めれば , 有向グラフが得られる . つまり符号を与えることは有向グラフの構造を与えることに等しい .

さて G の各辺を有向辺にすることで有向グラフ \tilde{G} を与えたとする . G の 2 つの完全マッチング $G_1 = (V_0 \sqcup V_1, E_1), G_2 = (V_0 \sqcup V_1, E_2)$ に対して対応する単項式をそれぞれ

$$m_1(z_1, z_2) = \text{sgn}(\sigma_1) d(1, \sigma_1(1)) d(2, \sigma_1(2)) \cdots d(k, \sigma_1(k))$$

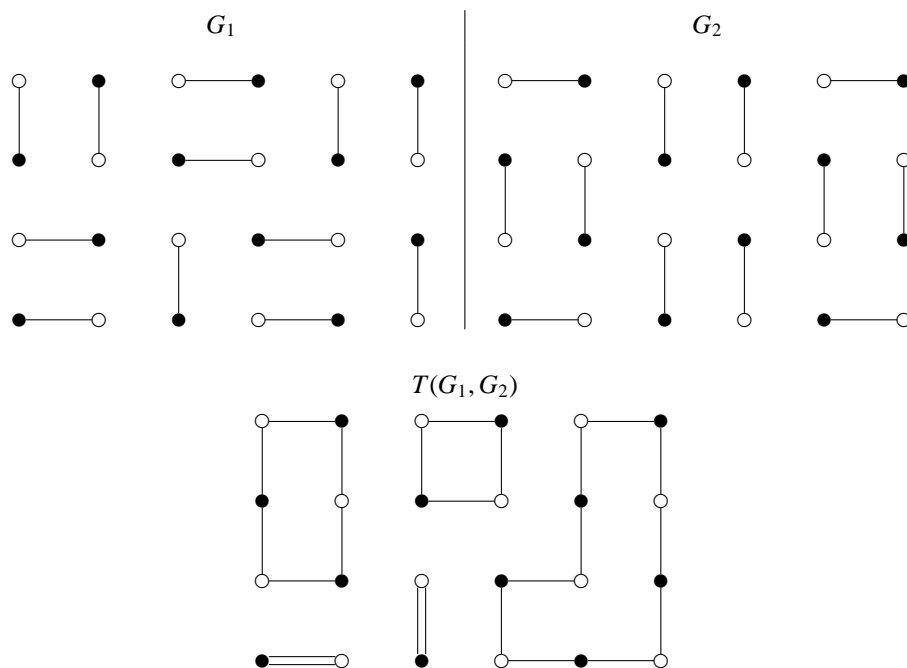
$$m_2(z_1, z_2) = \text{sgn}(\sigma_2) d(1, \sigma_2(1)) d(2, \sigma_2(2)) \cdots d(k, \sigma_2(k))$$

とおく. $\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2$ をそれぞれ \widetilde{G} の部分有向グラフで, それぞれ有向辺を無向辺としたときに G_1, G_2 になるものとおく. (以後同様にチルダは \widetilde{G} の部分有向グラフとし, G の部分グラフはチルダを取り去って表すことにする.) この2つの単項式の符号が互いに等しいとすると, \widetilde{G}_1 の V_1 から V_0 に向かう有向辺の個数を c_1 , \widetilde{G}_2 の V_1 から V_0 に向かう有向辺の個数を c_2 とおくと

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma_1) = -\operatorname{sgn}(\sigma_2) &\implies c_1 \not\equiv c_2 \\ \operatorname{sgn}(\sigma_1) = \operatorname{sgn}(\sigma_2) &\implies c_1 \equiv c_2 \end{aligned}$$

である. ただし \equiv は 2 を法として考えており, 以後この意味で使うことにする. G_1 と G_2 を合わせてできるグラフ $T(G_1, G_2) = (V_0 \sqcup V_1, E_1 \cup E_2)$ を G_1, G_2 の遷移グラフ (transition graph) という.

例 2.1.2.



補題 2.1.3. 上の G_1, G_2 の遷移グラフ $T(G_1, G_2)$ がただひとつの閉路 (ただしここでは単純閉路: つまり自己交差しない閉路) からできているとする. このとき,

$$\begin{cases} k \equiv 0 \implies \operatorname{sgn}(\sigma_1) = -\operatorname{sgn}(\sigma_2) \\ k \equiv 1 \implies \operatorname{sgn}(\sigma_1) = \operatorname{sgn}(\sigma_2) \end{cases}$$

である. ここで $k = \frac{1}{2}\#V = \frac{1}{2}(\#V_0 + \#V_1) = \#E_1 = \#E_2$ である.

Proof. 頂点の番号の付け方は本質的ではないので, 特に G_1 の辺を $\{\{v_1, v_{1'}\}, \{v_2, v_{2'}\}, \dots, \{v_k, v_{k'}\}\}$, G_2 の辺を $\{\{v_1, v_k\}, \{v_2, v_{k-1}\}, \dots, \{v_k, v_{(k-1)'}\}\}$ とおくことができる. このとき G_1 の対応する置換は恒等置換であるからその符号は正である. 一方 G_2 に対応する置換は

$$\begin{pmatrix} 123 \dots k \\ k 12 \dots k-1 \end{pmatrix} = (k, 1)(k, 2) \dots (k, k-1)$$

である. ただし (i, j) は i と j の互換を表す. $k-1$ 個の互換の積であらわされるから, これで補題が成り立つことがわかる. \square

さて G から G の閉路 C を取り除いた G の部分グラフ $(V - v(C), E - e(C))$ に、完全マッチングが存在するような閉路 C の全体を C_G とおく。

$$C_G = \{C : G \text{ の閉路} \mid (V - v(C), E - e(C)) \text{ に完全マッチングが存在する}\}$$

G の任意の 2 つの完全マッチング G_1, G_2 について、それらの遷移グラフを考えることにより次の定理が成り立つ。

定理 2.1.4. 次の (1), (2) は互いに同値である：

- (1) \widetilde{G} の任意の 2 つの完全マッチング G_1, G_2 について、対応するそれぞれの単項式の符号は一致している。
 (2) \widetilde{G} の任意の $C \in C$ に対して C の任意の頂点から任意の向きに出発して一巡して戻ってくる道 (path) について、この向きを順向きと呼ぶとき、

$$(\widetilde{G} \text{ の順向きの矢印の個数}) \equiv (\text{逆向きの矢印の個数}) \equiv 1$$

である。

Proof. (1) \implies (2)

$C \in C$ とする。 C の頂点 $v(C)$ を $\{w_1, w_2, \dots, w_{2s}\}$, 辺 $e(C)$ を $\{\{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \dots, \{w_{2s-1}, w_{2s}\}\}$ とおく。 C は G の閉路であるから頂点の個数 (= 辺の個数) は偶数であることに注意。 $G_1 = (V_0 \sqcup V_1, F \sqcup E_1), G_2 = (V_0 \sqcup V_1, F \sqcup E_2)$ を $T(G_1, G_2)$ の閉路が $C = E_1 \sqcup E_2$ となるようにとり、 $F \subset E - C$ をグラフ $(V - v(C), E - C)$ の perfect matching となるようにとる。たとえばここでは $E_1 = \{\{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\}, \dots, \{w_{2s-1}, w_{2s}\}\}, E_2 = \{\{w_2, w_3\}, \{w_4, w_5\}, \dots, \{w_{2s}, w_1\}\}$, また C の定義から C の外側に perfect matching が存在し、それを一つ選んで、そのグラフから成る辺の集合を F とおけばよい。仮定より $\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2$ に対応する単項式の符号がそれぞれ等しい。共通辺以外の部分の矢印の向き (\widetilde{C} 内の有向辺) の個数を調べることで、それぞれの符号の寄与をみる。 $\widetilde{H}_1 = \widetilde{G}_1 \cap \widetilde{C}, \widetilde{H}_2 = \widetilde{G}_2 \cap \widetilde{C}$ とおく。

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1 \text{ の } V_0 \text{ から } V_1 \text{ に向かう有向辺の個数を } a_1, \quad \widetilde{H}_2 \text{ の } V_0 \text{ から } V_1 \text{ に向かう有向辺の個数を } a_2 \\ \widetilde{H}_1 \text{ の } V_1 \text{ から } V_0 \text{ に向かう有向辺の個数を } b_1, \quad \widetilde{H}_2 \text{ の } V_1 \text{ から } V_0 \text{ に向かう有向辺の個数を } b_2 \end{aligned}$$

とおく。 C の任意の頂点 v を選び、 v から出発し、 C を一周して v に戻ってくる道の向きを固定する。 $v \in V_0$ と仮定しても一般性を失わない。またこの道で出発点 v から次に通る辺が G_1 の辺と仮定しても一般性を失わない。この道の向きを順向きと呼ぶ。

\widetilde{H}_1 における順向きの矢印は V_0 から V_1 に向かう有向辺であり、 \widetilde{H}_2 における順向きの矢印は V_1 から V_0 に向かう有向辺である。従って C における順向きの矢印の個数は $a_1 + b_2$ となり、逆向きの矢印の個数は $a_2 + b_1$ となる。よって $s \equiv 0$ [または 1] ならば

$$\begin{aligned} a_1 \equiv b_1 \quad (\because s \equiv 0) & & [a_1 \neq b_1 \quad (\because s \equiv 1)] \\ b_1 \neq b_2 \quad (\because \text{補題 2.1.3}) & & [b_1 \equiv b_2 \quad (\because \text{補題 2.1.3})] \end{aligned}$$

ゆえに

$$a_1 + b_2 \equiv b_1 + b_2 \equiv 1 \quad [a_1 + b_2 \equiv (b_1 + 1) + b_2 \equiv 1]$$

また順向きと逆向きの全体は閉路の長さ $2s$ であるから、 $a_1 + b_2 \equiv a_2 + b_1$ は明らかである。

(2) \implies (1)

G の 2 つの完全マッチング G_1, G_2 を取り, それぞれの対応する単項式を $m_1 = m_1(z_1, z_2), m_2 = m_2(z_1, z_2)$ とおく. G_1, G_2 の遷移グラフ $T = T(G_1, G_2)$ の 2 重辺に対応する m_1, m_2 の因子は同じだから, それ以外の部分, つまり T の閉路について考える. T の閉路は一般には複数ある. どの T の閉路についても m_1, m_2 の因子となる項の符号は一致することを示せば証明が終わる. そこでまず T の任意の閉路を C とおく. 定義より明らかに $C \in C$ であり, 従って仮定を満たす閉路である. この C について前半の証明のようにして 2 つの完全マッチング (前半における G_1, G_2 に相当するもの) を作る. ここではそれらを I_1, I_2 とおく. I_1, I_2 について定理の主張を証明すればよいことになる. C の長さを $2s$ とおく. $s \equiv 0$ [または 1] のとき, 補題 2.1.3 より $b_1 \neq b_2$ [$b_1 = b_2$] を示せばよい.

$$a_1 \equiv [\neq]b_1 \quad (\because s \equiv 0[1])$$

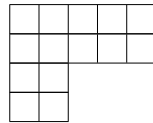
$$a_1 + b_2 \equiv 1 \quad (\because \text{もとの仮定 (2)})$$

より次式が従う.

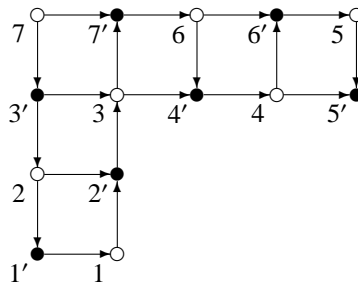
$$b_1 + b_2 \equiv a_1 + b_2 \equiv 1 \quad [b_1 + b_2 \equiv (a_1 + 1) + b_2 \equiv 0]$$

□

例 2.1.5. shape が $(5, 5, 2, 2)$ のヤング図形について, ドミノタイル張りの総数を求める.



図のように頂点に番号と有向辺をつける. この矢印の置き方は定理 2.1.4 により, どの閉路 (ただしその閉路を除いたところが完全マッチングなもの) を選んでも, その閉路の任意の頂点から出発して閉路上を一周すると, 順向きの矢印の個数と逆向きの矢印の個数はどちらも奇数個ずつあるようにつけている^{*9}.



これについて行列 D を求めると,

$$\begin{pmatrix} -z_1 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_2 & z_1 & -z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_2 & -z_1 & z_1 & 0 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & -z_1 & z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_2 & -z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & z_1 & -z_1 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & z_1 \end{pmatrix}$$

タイル張りの総数を求めるので, $z_1 = z_2 = 1$ において, 行列式の絶対値を計算すると 24 通りとわかる.

^{*9} [4] には長方形の場合の矢印の決め方が提示されている. ここではその部分有効グラフとみて矢印を定めている.

2.2 マヤ図形を用いた定理 2.2.1 の証明

コア r の 2-分解可能なヤング図形の全体を DP_r とおく .

$$DP_r = \{\lambda \in \mathcal{P} \mid \lambda \supset_2 \theta_r\}$$

特に $DP_0 = RH_2$ である . DP_r は \supset_2 を順序に束となる .

次の定理は van Leewen の [6] にあるが , 完全な証明は書かれていないが , その定理の証明の概要はマヤ図形を用いて述べられている . そこで本節ではその証明を , [6] の方針に従って行う .

定理 2.2.1 ([6]). 任意の非負整数 $r \geq 0$ に対して , コア r のヤング図形の全体が成す束 DP_r と 2 つのヤング束の直積に束として同型である .

$$DP_r \cong \mathbb{Y} \times \mathbb{Y}$$

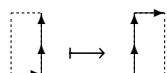
Proof. $\rho \in DP_r$, そのマヤ図形を $m_\rho = [\cdots y_3 y_2 y_1 \parallel x_1 x_2 x_3 \cdots]$ とする . (\parallel は中央線の意味 .) この m_ρ に対して次のようなマヤ図形の組を対応させる :

$$m_1 = [\cdots y_5 y_3 y_1 x_2 x_4 x_6 \cdots], \quad m_2 = [\cdots y_6 y_4 y_2 x_1 x_3 x_5 \cdots]$$

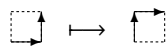
つまりもとのマヤ図形 m_ρ の中央線 \parallel のすぐ左手にある文字 y_1 を基準に , ひとつおきに連続して読み上げたものが m_1 で , 残ったものが m_2 である . これらがマヤ図形であることはすぐにわかる . m_1, m_2 に対応する分割をそれぞれ λ, μ とおく . この写像 $\Gamma_r : \rho \mapsto (\lambda, \mu)$ が束としての同型であることを示す . m_ρ に基本変形 I のみを施すことはすなわち ,

$$0x1 \mapsto 1x0 \quad (x = 0, 1)$$

となると置き換えることであり , これは $Y(\rho)$ の凸角のドミノを 1 つ消し去ることを意味する . たとえば $001 \mapsto 100$ は縦ドミノを取り除くことに相当する .



一方この置き換えは , $Y(\lambda)$ または $Y(\mu)$ のいずれか一方では $01 \mapsto 10$ であるから , これは凸角を一つ消し去る変換である .



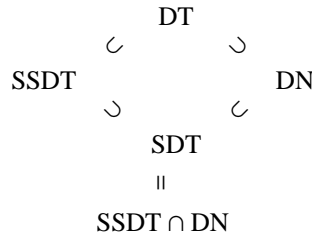
よって Γ_r は準同型である .

次に逆写像を持つことを見るために m_λ および m_μ の中央線がどこにあるか調べる . この基本変形 I はそれぞれの中央線の位置は保存する . 従って $m_\rho \sim_2 [\cdots 11101010 \cdots 01000 \cdots]$ (01 が r 個) であるとき , この右辺のマヤ図形を見て m_λ および m_μ の中央線を計算すると , m_λ の中央線はその y_1 と x_2 の間の位置から左に $(-1)^{r-1} \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$ だけずれた位置にある . 同様に m_μ の中央線はその y_2 と x_1 の間の位置から右に $(-1)^{r-1} \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$ だけずれた位置にある . 従って逆写像は , $Y(\lambda)$ および $Y(\mu)$ が与えられたとき , 対応するマヤ図形をそれぞれ

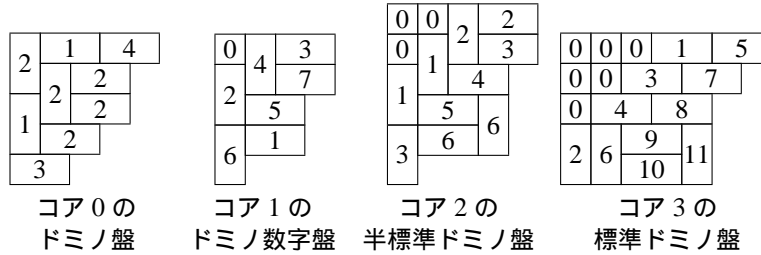
$$m_\lambda = [\cdots b_3 b_2 b_1 \parallel a_1 a_2 a_3 \cdots], \quad m_\mu = [\cdots d_3 d_2 d_1 \parallel c_1 c_2 c_3 \cdots]$$

とおいて , 以下のようにして m_ρ を構成すればよい :

$$m_\rho = [\cdots \bigcirc \triangle \bigcirc \triangle \bigcirc \triangle \bigcirc \parallel \triangle \bigcirc \triangle \bigcirc \triangle \bigcirc \triangle \cdots]$$



例 2.2.5.



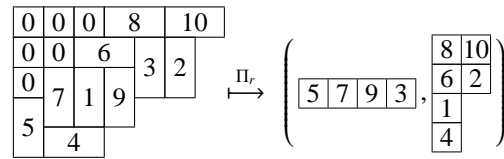
$D \in \text{DT}_r$ とする. D の各ドミノを構成している 2 つの箱には同じ要素を入れ, D のコアの部分はそのままその箱に 0 を入れることで盤が得られる. この自然な写像を $\psi : \text{DT}_r \rightarrow \text{Tab}$ とおくと, 明らかにこれを DN_r に制限した写像;

$$\psi|_{\text{DN}_r} : \text{DN}_r \rightarrow \text{Tab}$$

は単射であり, 従って定義 1.5.17 で与えた標準ドミノ盤と再定義した定義 2.2.4 の標準ドミノ盤は全単射で対応している. (だからこそドミノタイル張りの図形を使って標準ドミノ盤を表していた.)

$D \in \text{DT}_r$, $\Gamma_r : \text{sh}D \mapsto (\lambda, \mu)$ とすると, D のドミノのうち, D の凸角のドミノ δ を D からひとつ取り去れば, やはりドミノ盤で, 定理 2.2.1 より δ に対応する箱が決定する. 従って D の各ドミノは, shape が λ または μ のいずれか一方のただひとつの箱に対応しており, それゆえ D のドミノの要素 x を対応する 1 箱に x を対応させることができる. このような写像を $\Pi_r : \text{DT}_r \rightarrow \text{Tab} \times \text{Tab}$ で表す.

例 2.2.6.



この写像を考えれば, 次のいくつかの系を得る.

系 2.2.7. $\Gamma_r(\rho) = (\lambda, \mu)$ であって, $|\rho| = 2n + |\theta_r|$ のとき, shape ρ の標準ドミノ盤の全体 $\text{SDT}_r(\rho)$ と, shape λ と shape μ の標準盤の組でそれぞれの要素が共通部分を持たないものの全体 $(\text{STab}(\lambda) \times \text{STab}(\mu))^\circ$ の間に全単射がある.

$$\text{SDT}_r(\rho) \longleftrightarrow (\text{STab}(\lambda) \times \text{STab}(\mu))^\circ$$

さて $Y(\lambda), Y(\mu)$ を 2 つのヤング図形とし, $F = \langle F_\lambda, F_\mu \rangle_r$ とおく. $r \in 2\mathbb{Z}$ の場合, F が fairy sequence であることは

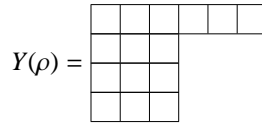
$$F(i) - F(i-1) = F_{\theta_r}(i) - F_{\theta_r}(i-1) + F_\lambda\left(\left\lfloor \frac{i-2k}{2} \right\rfloor\right) - F_\lambda\left(\left\lfloor \frac{i-2k-1}{2} \right\rfloor\right) + F_\mu\left(\left\lfloor \frac{i+2k+1}{2} \right\rfloor\right) - F_\mu\left(\left\lfloor \frac{i+2k}{2} \right\rfloor\right)$$

$$= \begin{cases} F_{\theta_r}(i) - F_{\theta_r}(i-1) + F_\lambda\left(\left\lfloor \frac{i-2k}{2} \right\rfloor\right) - F_\lambda\left(\left\lfloor \frac{i-2k-1}{2} \right\rfloor\right) & i \equiv 0 \pmod{2} \text{ のとき} \\ F_{\theta_r}(i) - F_{\theta_r}(i-1) + F_\mu\left(\left\lfloor \frac{i+2k+1}{2} \right\rfloor\right) - F_\mu\left(\left\lfloor \frac{i+2k}{2} \right\rfloor\right) & i \equiv 1 \pmod{2} \text{ のとき} \end{cases}$$

より従う. $r \in 2\mathbb{Z} + 1$ の場合も同様である. そして F の定義より, $F - F_{\theta_r}$ は 2-分解可能であるから, F に対応するヤング図形 $Y(\rho)$ はコアは r である.

逆に F をコア r のヤング図形 $Y(\rho)$ に対応する fairy sequence とすると, $F = \langle F_\lambda, F_\mu \rangle_r$ となる F_λ および F_μ は, $G = F - F_{\theta_r}$ の $i \ll 0$ から F_λ, F_μ について方程式を解くことで一意的に得られる. 従ってこの対応により $Y(\rho)$ から $(Y(\lambda), Y(\mu))$ への全単射が定まる. さらに, $Y(\lambda)$ または $Y(\mu)$ の凸角を 1 つ取り去ることは F の fairy sequence では連続する 2 つの整数がともに 1 だけ減ることを意味し, つまり $Y(\rho)$ の凸角ドミノをひとつ取り去ることを意味する. DP_r における束の構造の定義から, この対応は束としての同型であることがわかる. こうして得られた同型写像はマヤ図形を用いた同型写像に等しいことがわかる.

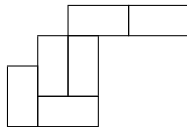
例えば, $\rho = (6, 3, 3, 3)$ に対応するヤング図形 $Y(\rho)$ について考える.



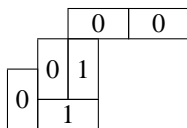
まずコアを見るために, 系 2.1.1 を用いて調べる^{*10}. ρ に対応するマヤ図形 m_ρ は $[\dots 1110001110001000\dots]$ であるから

$$[\dots 1110001110001000\dots] \mapsto [\dots 1110101000\dots]$$

となり, よってコアは 2 である. 次に $Y(\rho)$ からコアの部分 θ_2 を除いた部分にドミノタイル張りを任意に与える.



このドミノ張りされた図形を 2 つのヤング図形に分割することを考える. そのために, 各ドミノをそれぞれ次のように分類する. 縦ドミノについてはその下側の箱の, 横ドミノについてはその左側の箱の対角線番号 x をみて, 2 を法として 0 であるものと, 1 であるものに分類する.



^{*10} もちろんヤング図形から直接ドミノタイル張りを考えても得られる.

このようにして得られた分類で、同じ類に属する各ドミノは、1つのヤング図形の1つの箱に1:1に対応している。0の類は $Y(\lambda)$ に対応し、1の類は $Y(\mu)$ に対応する。より詳しくドミノと箱の対応をみるためには、ドミノの対角線 x を見て、次の対角線上の箱に対応する。

$x \equiv 0 \pmod{2}$ のとき

$$\begin{cases} \frac{x-r}{2} & (r \in 2\mathbb{Z} \text{ のとき}) \\ \frac{x+(r+1)}{2} & (r \in 2\mathbb{Z}+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$x \equiv 1 \pmod{2}$ のとき

$$\begin{cases} \frac{x+(r+1)}{2} & (r \in 2\mathbb{Z} \text{ のとき}) \\ \frac{x-r}{2} & (r \in 2\mathbb{Z}+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

以上まとめて

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + (-1)^{x+r-1} \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$$

となる。ここで $\lceil x \rceil = \min\{y \in \mathbb{Z} \mid y \geq x\}$ である。よって各ドミノに対して、対応する対角線番号を調べれば次の2つのヤング図形に分解できる。

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)$$

例 2.3.4. ドミノに要素を入れることでその対応の様子をみるとわかりやすい。

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 5 & 2 \\ \hline 0 & 3 & 6 & \\ \hline 4 & 1 & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\Pi_r} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 2 \\ \hline 6 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} \right)$$

$D \in \text{DT}_r$ を固定し、 $\Pi_r(D) = (S, T)$ とする。 D の要素を付随したドミノの全体を $\Delta(D)$ とおく。また S の箱とその箱の要素を付随したものの全体を $B(S)$ とおく。 $\delta \in \Delta(D)$ に対して、 Π_r で δ と対応する、要素を込めた箱に対応させる写像 π_r^D を考える^{*11}：

$$\pi_r^D : \Delta D \longrightarrow (B(S) \times \{S\}) \sqcup (B(T) \times \{T\})$$

例えば、例 2.3.4 のドミノ盤 D について、上記の定義は次のようになる^{*12}。

$$\begin{aligned} \Delta(D) &= \left\{ \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right\} \\ B(S) &= \left\{ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right\} \\ B(T) &= \left\{ \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \right\} \\ \pi_r^D \left(\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}, T \right), \quad \pi_r^D \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}, S \right), \quad \text{など.} \end{aligned}$$

このとき写像 π_r^D の性質をいくつかまとめておく。

^{*11} disjoint union (離散和) を強調してシンボル S, T を用いて無理やり区別している。

^{*12} 実際は各ドミノの座標とそのドミノの要素を組にしたものを元にする集合であるが、ここでは簡単に表してある。

補題 2.3.5. D のドミノ δ が縦ドミノなら下の箱を s , 横ドミノなら左の箱を s とおき , s の対角線の番号を i とおく . このとき

$$i \equiv 0 \pmod{2} \implies \delta \text{ は } S \text{ の箱に対応する .}$$

$$i \equiv 1 \pmod{2} \implies \delta \text{ は } T \text{ の箱に対応する .}$$

補題 2.3.6. ドミノの対角線番号が 2 を法として合同である互いに隣接し合う 2 つドミノについて , それぞれの π_r^D で対応する 2 つの箱の位置関係は次のようになる .

2 つのドミノの位置関係	盤中の位置関係

補題 2.3.7. $D \in \text{DT}_r$ とし D の 2 つのドミノ $\delta_1 = \{(i, j), (i, j+1)\}$, $\delta_2 = \{(i+1, j), (i+1, j+1)\}$ がともに横ドミノで正方形を成しているとする . D' を D のその 2 つのドミノを縦に向けたもので , 右側に δ_1 左側に δ_2 が来るように並べたものとする . つまり $\text{cont}(\delta_1) = x$, $\text{cont}(\delta_2) = y$, $\delta_1' = \{(i, j+1), (i+1, j+1)\}$, $\delta_2' = \{(i, j), (i+1, j)\}$ とおき ,

$$D' = (D - \delta_1 - \delta_2) + \delta_1'[x] + \delta_2'[y]$$

とおく . このとき , $\Pi_r(D) = \Pi_r(D')$ である .

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array} \mapsto \begin{array}{|c|c|} \hline y & x \\ \hline \end{array}$$

3 Domino Robinson-Schensted 対応

3.1 Standard Domino Tableaux

ここでは $W = \mathbb{Z}_2 \wr \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}_2)^n$ と , 2 つの shape の等しい n 個のドミノを持ったコアが r の標準ドミノ盤の組の全体

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_r &= \bigcup_{\rho \vdash n} \text{SDT}_r(\rho; [n]) \times \text{SDT}_r(\rho; [n]) \\ &= \{(P, Q) \mid P, Q \in \text{SDT}_r(n; [n]), \text{sh}P = \text{sh}Q, P \text{ および } Q \text{ のコアは } r\} \end{aligned}$$

の間の全単射対応のアルゴリズムを述べる . このアルゴリズムではドミノ挿入 (domino insertion) のアルゴリズムが基本的であり , [8], [5] にあるように color-to-spin の性質をもつが , ここでは述べないことにする .^{*13}

^{*13} 一般の k -rim hook に対する挿入のアルゴリズムが , [11], [10] で定義されているが , ここで紹介する挿入のアルゴリズムとは別のアルゴリズムであり , そして color-to-spin の性質をもたない . 一方 [9] は color-to-spin の性質をもつ . また [11] には逆写像のアルゴリズムも書かれている .

我々は W の元

$$\sigma \cdot \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \cdot (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n, \epsilon_i \in \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\})$$

を

$$(x_1 x_2 \cdots x_n) \quad \text{ただし } x_i = \begin{cases} \overline{\sigma(i)}, & (\epsilon_i = -1 \text{ のとき}) \\ \sigma(i), & (\epsilon_i = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で表し, $(x_1 x_2 \cdots x_n)$ を色つき置換 (colored permutation) と呼ぶ. また各 x_i を色つき文字 (colord letter) と呼び, 色つき文字の全体を CL で表す. また $|x_i| = \sigma(i)$ とおき, バーがあればそのバーを取り除いたものを表すことにする.

例 3.1.1.

$$\begin{pmatrix} 123456 \\ 364152 \end{pmatrix} \cdot (-1, 1, 1, -1, 1, -1) \longleftrightarrow (\bar{3}64\bar{1}5\bar{2})$$

$D \in \text{SDT}_r$ に対して $\text{supp}(m, D)$ で D の要素が m となるドミノを表す. 以上を準備に基礎となるドミノ挿入^{*14}を定義する.

$T \in \text{SDT}_r$, $\text{seq}(T) = (l_1, l_2, \dots, l_k)$, x を色つき文字とし, $|x| \notin \text{cont}(T)$ とする. $U = T \stackrel{d}{\leftarrow} x$ を以下のようにして定義し, Δ を最後に付け加えられたドミノとおく.

1. $l_k < |x|$ のとき

- (a) x にバーがなければ T の第 1 行目に要素が $|x| = x$ の横ドミノを付け加える.
- (b) x にバーがあれば T の第 1 列目に要素が $|x|$ の縦ドミノを付け加える.

2. そうでないとき, $l_{m-1} < |x| < l_m$ となる m をとる. まず $\{B_m, B_{m+1}, \dots, B_{k+1}\}$ を

$$B_m = T_{>|x|} = (T \text{ の要素で } |x| \text{ より大きいところだけから成るドミノの全体}), \\ B_{p+1} = B_p - \text{supp}(l_p, B_p) \quad (m \leq p \leq k)$$

と帰納的に定義する. 次に $\{A_{m-1}, A_m, \dots, A_{k+1}\}$ を次のようにして帰納的に定義する.

(a) $A_{m-1} = T_{<|x|}$

(b) $A_m = A_{m-1} \stackrel{d}{\leftarrow} x$

(c) $p \geq m$ について, A_p が定義されたら A_{p+1} は次のようにして得られるドミノ δ に要素 l_p を付したものの $\delta[l_p]$ を A_p に付け加えてできるものと定義する.

i. $\text{supp}(l_p, B_p) \cap \text{sh}A_p = \emptyset$ のとき, $\delta = \text{supp}(l_p, B_p)$

ii. $\text{supp}(l_p, B_p) \cap \text{sh}A_p = \{(i, j)\}$ のとき

(ア) $\text{supp}(l_p, B_p)$ が横ドミノならば, 縦ドミノ $\delta = \{(i, j+1), (i+1, j+1)\}$

(イ) $\text{supp}(l_p, B_p)$ が縦ドミノならば, 横ドミノ $\delta = \{(i+1, j), (i+1, j+1)\}$

iii. $\text{supp}(l_p, B_p) \cap A_p = \text{supp}(l_p, B_p)$ のとき

(ア) $\text{supp}(l_p, B_p)$ が横ドミノで i 行目にあるならば, δ は A_p の $i+1$ 行目の凹角の位置の横ドミノ

(イ) $\text{supp}(l_p, B_p)$ が縦ドミノで j 列目にあるならば, δ は A_p の $j+1$ 列目の凹角の位置の縦ドミノ

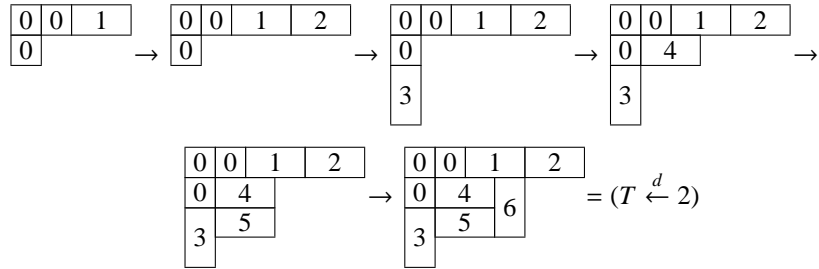
^{*14} 主に記述のスタイルは [7] を参考にした. 同じアルゴリズムは [8, 5] などにもある.

このとき $U = A_{k+1}$, $\text{ins}(T, x) = (U, \Delta)$ とおく .

例 3.1.2. ドミノ挿入の例 .

$$x = 2, \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 5 & 6 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$$

このとき , $\{A_i\}_{i=1,2,\dots,6}$ は次のようになる .



さて任意の整数 $r \geq 0$ を固定する . まず

$$G_r : W \rightarrow \mathcal{D}_r, \quad G_r(x) = (P_d^r(x), Q_d^r(x))$$

を構成する . 色つき置換 $x = (x_1 x_2 \dots x_n) \in W$ に対してその色つき文字を前から順に連続して挿入を行い , その結果得られる標準ドミノ盤を $P_d^r(x)$ とおく . たゞしはじめに挿入を行うとき , 土台となる盤 $\theta_r[0]$ を $\text{sh}\theta_r[0] = \theta_r$, $\theta_r[0]$ の要素は 0 のみからなるものとおく . つまり $\theta_r[0]$ はコア r のヤング図形のすべての箱に 0 を入れてできる盤である .

$$P_d^r(x) = (\dots((\theta_r[0] \stackrel{d}{\leftarrow} x_1) \stackrel{d}{\leftarrow} x_2) \dots) \stackrel{d}{\leftarrow} x_n$$

各挿入の過程で新しく付け加わるドミノに要素 $1, 2, \dots, n$ を順に振ることで得られる標準ドミノ盤を $Q_d^r(x)$ とおく .

$$\text{supp}(i, Q_d^r(x)) = \text{sh}P_i(x) - \text{sh}P_{i-1}(x) \quad \text{ただし } P_i(x) = P_d^r(x_1 \dots x_i), \quad P_0 = \theta_r[0]$$

このとき $\text{sh}P_d^r(x) = \text{sh}Q_d^r(x)$ であって , いずれもコア r の標準ドミノ盤となる . 逆に $(P, Q) \in \mathcal{D}_r$ が与えられたとき , 上の構成を逆にたどることによって $x \in W$ が復元されることを示す .

$U \in \text{SDT}_r(n)$, Δ を $\text{sh}U$ の凸角のドミノ , $\text{seq}(U) = (l_1, l_2, \dots, l_{k+1})$ とする . $\{A_{k+1}, A_k, \dots, A_1\}$ を次のようにして帰納的に定義する .

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= U, \\ A_p &= A_{p+1} - \text{supp}(l_{p+1}, A_{p+1}) \quad (k \geq p \geq 0) \end{aligned}$$

次に $\{B_{k+1}, B_k, \dots, B_1\}$ を次のように帰納的に定義する . まず $B_{k+1} = \Delta[\infty]$ とおく^{*15} . 次に B_{p+1} が定義されたら B_p は次のようにして得られるドミノ δ に , 要素 l_p を入れたもの $\delta[l_p]$ を B_{p+1} に付け加えて得られるものと定義する .

^{*15} ここでは要素として ∞ を取ることを許し , ∞ は任意の整数よりも大きい要素として取り扱う .

1. $\text{supp}(l_{p+1}, A_{p+1}) \cap \text{sh}B_{p+1} = \emptyset$ のとき, $\delta = \text{supp}(l_{p+1}, A_{p+1})$
2. $\text{supp}(l_{p+1}, A_{p+1}) \cap \text{sh}B_{p+1} = \{(i+1, j+1)\}$ のとき
 - (a) $\text{supp}(l_{p+1}, A_{p+1})$ が縦ドミノならば, 横ドミノ $\delta = \{(i, j), (i, j+1)\}$
 - (b) $\text{supp}(l_{p+1}, A_{p+1})$ が横ドミノならば, 縦ドミノ $\delta = \{(i, j), (i+1, j)\}$
3. $\text{supp}(l_{p+1}, A_{p+1}) \cap \text{sh}B_{p+1} = \text{supp}(l_{p+1}, A_{p+1})$ のとき
 - (a) $\text{supp}(l_{p+1}, A_{p+1})$ が横ドミノで
 - i. 1 行目にあるならば, $x = l_{p+1}, T = A_p \cup B_{p+1}$ とおいて終了.
 - ii. $i+1 (\neq 1)$ 行目にあるならば, δ は B_{p+1} の i 行目の内側の凹角の横ドミノ
 - (b) $\text{supp}(l_{p+1}, A_{p+1})$ が縦ドミノで
 - i. 1 列目にあるならば, $x = l_{p+1}, T = A_p \cup B_{p+1}$ とおいて終了.
 - ii. $j+1 (\neq 1)$ 列目にあるならば, δ は B_{p+1} の j 列目の内側の凹角の縦ドミノ

このとき $\text{del}(U, \Delta) = (T, x)$ とおく.

これら 2 つのアルゴリズムはそれぞれ互いに逆対応である. つまり,

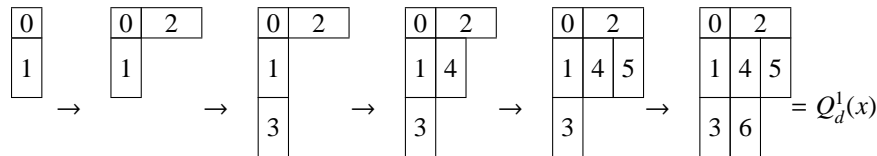
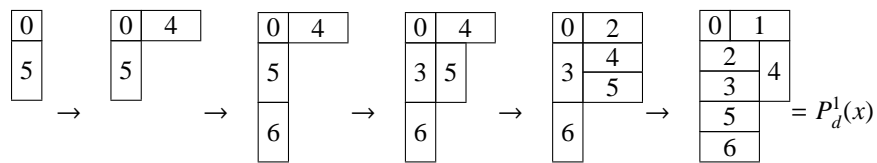
$$\text{del}(\text{ins}(T, x)) = (T, x), \quad \text{ins}(\text{del}(U, \Delta)) = (U, \Delta)$$

をみたく. これより $(P, Q) \in \mathcal{D}_r$ が与えられたとき, $\text{seq}(Q) = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ に対して

$$\begin{cases} Q_n = Q, & P_n = P \\ Q_{i-1} = Q_i - \text{supp}(q_i, Q_i), & (P_{i-1}, x_i) = \text{del}(P_i, \text{supp}(q_i, Q_i)) \quad (i \leq n \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定めると $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in W$ を得, このアルゴリズムが G_r の逆写像である. この G_r による全単射をドミノに関する Robinson-Schensted 対応と呼ばれる.

例 3.1.3. 色つき置換 $x = (\bar{5}4\bar{6}\bar{3}21)$ に対応する $(P_d^1(x), Q_d^1(x))$ を求める.



Robinson-Schensted 対応より, 対応する 2 つの集合の要素の個数について考える.

$$\#W = \#\mathcal{S}_n \times (\mathbb{Z}_2)^n = 2^n n!$$

であり,

$$\begin{aligned} \#\mathcal{D}_r &= \# \bigcup_{\rho \vdash n} \text{SDT}_r(\rho; [n]) \times \text{SDT}_r(\rho; [n]) \\ &= \sum_{\rho \vdash n} \#(\text{SDT}_r(\rho; [n]))^2 \\ &= \sum_{\lambda \vdash p, \mu \vdash q} \left(\binom{n}{p} f^\lambda f^\mu \right)^2 \quad (\because \text{系 2.2.8}) \end{aligned}$$

である. よって次の等式を得る.

$$\text{系 3.1.4. } \sum_{p+q=n} \sum_{\lambda \vdash p, \mu \vdash q} \left(\binom{n}{p} f^\lambda f^\mu \right)^2 = 2^n n!$$

ただし, $f^\lambda = \#\text{STab}(\lambda; [|\lambda|])$ は shape λ の正規化された標準盤の個数である.

次の定理はここでは証明しないが, たとえば [8, 6, 5, 7] を参照のこと.

定理 3.1.5. $G_r(x) = (P, Q) \iff G_r(x^{-1}) = (Q, P)$

特に $\{x \in W \mid x^2 = e\}$ と $\bigcup_{\rho \in \text{DP}_r(2n+|\theta_r|)} \text{SDT}_r(\rho; [n])$ は全単射対応である. (ただし $e \in W$ は単位元とする.)

例 3.1.6. 前例における色つき置換 $x = (\bar{5}4\bar{6}\bar{3}21)$ について $x^{-1} = (65\bar{4}2\bar{1}\bar{3})$ であり,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 5 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 5 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 2 \\ \hline 4 & \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 2 \\ \hline 1 & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 2 \\ \hline 1 & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} = P_d^1(x^{-1}) = Q_d^1(x)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 3 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 3 & \\ \hline 5 & \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} = Q_d^1(x^{-1}) = P_d^1(x)$$

3.2 Semi-Standard Domino Tableaux

本節では半標準盤の 2 組の全体 $\text{SST} \times \text{SST}$ を Π_r による引き戻しを考察する. その結果, $\Pi_r^{-1}(\text{SST} \times \text{SST}) = \text{SSDT}_r$ であること, つまり SSDT_r と $\text{SST} \times \text{SST}$ は全単射であることを示す. 半標準ドミノ盤の定義から同じ要素から成るドミノの全体は次の定義のリボンと呼ばれる性質を持っている.

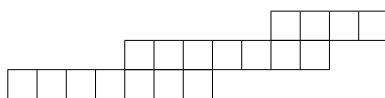
定義 3.2.1. α がリボン (ribbon) であるとは, 箱の総数が $2k$ 個 ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の skew shape であって, 次のようなドミノタイル張りを可能にするものである:

横ドミノ $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$ ならそのドミノの右側の箱を s , 縦ドミノ $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$ ならそのドミノの上側の箱を s とおくと
き, s の上に隣接する箱はそのリボンの中にはない.

なおこのようなドミノタイル張りが可能ならば, それはただ 1 通りである. またリボンはずしも連結したものでなくてもよいことに注意.

逆に各行各列が広義単調増加で、同じ要素をもつドミノの全体がリボンとなっていれば、それは半標準ドミノ盤である。

例 3.2.2. 次の skew shape はリボンである。



ドミノタイル張りは次で与えられる。



定理 3.2.3. $\Gamma_r(\rho) = (\lambda, \mu)$ とする。写像

$$\begin{aligned} \Pi_r^{SS} : \text{SSDT}_r(\rho) &\longrightarrow \text{SST}(\lambda) \times \text{SST}(\mu) \\ \Pi_r^{SS}(D) &= \Pi_r(D) \quad (D \in \text{SSDT}_r(\rho)) \end{aligned}$$

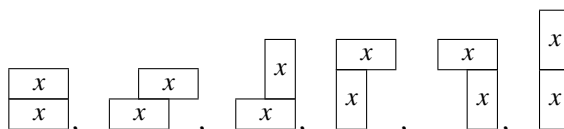
は全単射である。

Proof. $R \in \text{SSDT}_r$ が与えられたとき、 Π_r によって分解された 2 つの盤の組を $(S, T) \in \text{Tab}(\lambda) \times \text{Tab}(\mu)$ とおく。

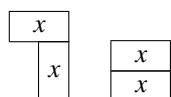
$$\Pi_0(R) = (S, T)$$

このとき R の要素の大きいものから順に対応を与えていくことを考えれば、 S, T はそれぞれ少なくとも各行各列が広義単調増加となっていることがわかる。ところが R のリボンの性質より、 S, T では同じ数字が縦に並び合うことがない (\because 補題 2.3.6)。従って $(S, T) \in \text{SST}(\lambda) \times \text{SST}(\mu)$ である。

逆に $(S, T) \in \text{SST}(\lambda) \times \text{SST}(\mu)$ とする。 S, T の要素のうち最大のものから順次ドミノを決定させる。ただしいくつかの等しい整数に対しては任意の順序でよい。その順序を固定して以後同様にこのアルゴリズムを実行すれば、少なくとも各行各列が広義単調増加となるドミノ盤 R' が得られる。これが半標準ドミノ盤ならばそれでよい。そうでなければ、まず R' のある要素から成るドミノの全体がリボンでないことから次の状況のいずれかが起こっている。

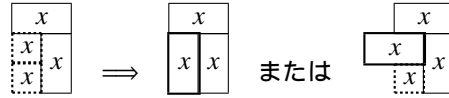


これらのうち $\pi_r^{R'}$ で移した後のことを考えると S, T が半標準盤であることから、次のいずれかしかありえない (\because 補題 2.3.6)



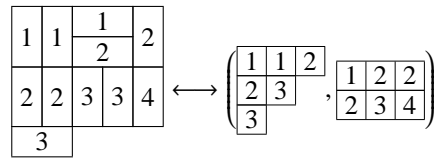
さらにこの 2 つのうちの 1 つ目は R' が各行各列単調増加であるから、それらのドミノと同じ整数の値が下の図のような位置の箱の中に割り当てられるゆえ、従って上で挙げた形を含むことになり、結局この図形も現れ

得ないことがわかる．



さらに最後に残ったパターンは補題 2.3.7 が示すように 2 つのドミノを共に縦ドミノに変更したものに置き換えても Π_r で移した先は同じものである．またこの変換によって新しく上記のパターンが生成されることもありえない．従ってすべてのこのパターンに対してこのような縦向きにする変換を施せば，求める半標準ドミノ盤 R が一意的に得られる． \square

例 3.2.4.



定義 3.2.5. $\binom{q}{p}$ ($q \in \mathbb{N}, p \in \text{CL}$) を色つき二重文字 (colored billetter) という．色つき二重文字の全体を CBL で表す．CBL 上に次の順序を定義する．

$$\binom{q_1}{p_1} \leq \binom{q_2}{p_2} \iff q_1 < q_2 \quad \text{または} \quad q_1 = q_2, p_1^{\text{neg}} \leq p_2^{\text{neg}}$$

ここで $x \in \text{CL}$ に対して $x^{\text{neg}} = \begin{cases} x & (x \text{ にバーがないとき}) \\ -|x| & (x \text{ にバーがあるとき}) \end{cases}$ とおいた．次にいくつかの色つき二重文字をこの順序の意味で，広義単調増加に 1 列に並べたもの

$$\binom{q_1 q_2 \cdots q_n}{p_1 p_2 \cdots p_n}, \quad \binom{q_i}{p_i} \leq \binom{q_{i+1}}{p_{i+1}} \quad (\forall i = 1, 2, \dots, n-1)$$

を色つき二重語 (colord biword) といい，その全体を CBW で表す．また $w = \binom{q_1 q_2 \cdots q_m}{p_1 p_2 \cdots p_m} \in \text{CBW}$ のとき， $q_1 q_2 \cdots q_m$ を w の上語 (upper word)， $p_1 p_2 \cdots p_m$ を w の下語 (lower word) という． w^{inv} で w の下語に現れるバーをそのまま残して上語と下語を入れ替えてできる色つき二重文字の列を単調増加列に並べなおしたものと定義する．従って $w^{\text{inv}} \in \text{CBW}$ である．また色つき置換 $x = (x_1 x_2 \cdots x_n)$ に対して $w = \binom{1 \ 2 \cdots n}{x_1 x_2 \cdots x_n}$ は色つき二重語となって，この意味での自然な埋め込みを通して，

$$w = \binom{1 \ 2 \cdots n}{x_1 x_2 \cdots x_n} \in \text{CBL}, \quad |x_i| \neq |x_j| \quad (i \neq j \text{ のとき}), \quad |x_i| \in [n]$$

を色つき置換とみなす． w が色つき置換のとき $w^{\text{inv}} = w^{-1}$ である．

例 3.2.6. $w = \binom{1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4}{4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2} \in \text{CBW}$ について，

$$w \xrightarrow{\text{turn}} \binom{4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2}{1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4} \xrightarrow{\text{sort}} \binom{1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4}{4 \ 2 \ 2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 4 \ 2 \ 1} = w^{\text{inv}}$$

半標準ドミノ盤に関する Robinson-Schensted 対応^{*16}を扱った文献 [8] ではコア 0 の場合での color-to-spin の性質を伴った , アルゴリズムであるが , 直接的なドミノ挿入は言及されていない . 一方 [5] では一般のコア $r \geq 0$ に対して color-to-spin の性質を伴った , ドミノ挿入の定義を使って記述されている .

§3.1 のドミノ挿入のアルゴリズムで SDT_r を SSDT_r に , $l_{m-1} < x < l_m$ を $l_{m-1} < |x| \leq l_m$ と修正すればよい . そのとき ,

定理 3.2.7. 色つき二重語の全体と , shape の等しいコア r の半標準ドミノ盤の組の全体の間に全単射対応がある .

$$\text{CBW} \ni w \xrightarrow{G_r^{SS}} (P_d^r(w), Q_d^r(w)) \in \{(P, Q) \mid P, Q \in \text{SSDT}_r, \text{sh}P = \text{sh}Q\}$$

さらに $\text{CBW} \ni w \mapsto (P_d^r(w), Q_d^r(w)) \in \{(P, Q) \mid P, Q \in \text{SSDT}_r, \text{sh}P = \text{sh}Q\}$ のとき , w の上語は $\text{cont}(Q_d^r(w))$ に , w の下語は $\text{cont}(P_d^r(w))$ に一致する . また

$$(P_d^r(w^{\text{inv}}), Q_d^r(w^{\text{inv}})) = (Q_d^r(w), P_d^r(w))$$

を満たす .

この定理は標準ドミノ盤の Robinson-Schensted 対応の拡張になっている .

3.3 対応のまとめ

本節はこれまでの対応をまとめたものである . ここで $D \in \text{DN}_r$ ならば $\Pi_r(D) \in (\text{Num} \times \text{Num})^\circ$ であり , 写像この対応を用いて $\Pi_r^N : \text{DN}_r \rightarrow (\text{Num} \times \text{Num})^\circ$ を定義している .

$$\{\text{自己双対盤}\} \longleftrightarrow \bigcup_{\rho \in \text{DP}_0} \text{SDT}_0(\rho; \left\lfloor \frac{|\rho|}{2} \right\rfloor) \cup \bigcup_{\rho \in \text{DP}_1} \text{SDT}_1(\rho; \left\lfloor \frac{|\rho|-1}{2} \right\rfloor) \quad (\text{全単射})$$

$$\Gamma_r : \text{DP}_r \xrightarrow{\sim} \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \quad (\text{束同型})$$

$$\Pi_r : \text{DT}_r \twoheadrightarrow \text{Tab} \times \text{Tab} \quad (\text{全射})$$

$$N = \#\Pi_r^{-1}(S, T) \quad (N = (\rho - \theta_r \text{ のドミノタイル張りの総数}), \forall (S, T) \in \text{Tab} \times \text{Tab})$$

$$\Pi_r^N : \text{DN}_r \twoheadrightarrow (\text{Num} \times \text{Num})^\circ \quad (\text{全射})$$

$$N = \#(\Pi_r^N)^{-1}(S, T) \quad (N = (\rho - \theta_r \text{ のドミノタイル張りの総数}), \forall (S, T) \in (\text{Num} \times \text{Num})^\circ)$$

$$\Pi_r^S : \text{SDT}_r \xrightarrow{\sim} (\text{STab} \times \text{STab})^\circ \quad (\text{全単射})$$

$$\Pi_r^{SS} : \text{SSDT}_r \xrightarrow{\sim} \text{SST} \times \text{SST} \quad (\text{全単射})$$

$$G_r : W \xrightarrow{\sim} \bigcup_{\rho \in \text{DP}_r(2n+|\theta_r|)} \text{SDT}(\rho; [n]) \times \text{SDT}(\rho; [n]) \quad (\text{全単射})$$

$$G_r^{SS} : \text{CBW} \xrightarrow{\sim} \bigcup_{\rho \in \text{DP}_r(2n+|\theta_r|)} \text{SSDT}(\rho; [n]) \times \text{SSDT}(\rho; [n]) \quad (\text{全単射})$$

4 W の表現論

\mathfrak{S}_n を n 次対称群とする . n 文字の置換であって , 最初の p 文字の置換と最後の $q = n - p$ 文字の置換がそれぞれの文字の間の置換となるものの全体

$$\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) \in \{1, 2, \dots, p\} (1 \leq i \leq p), \sigma(j) \in \{p+1, \dots, n\} (p+1 \leq j \leq n)\}$$

^{*16} Robinson-Schensted-Knuth 対応と呼ばれることもしばしばある .

は $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ に同型な, \mathfrak{S}_n の部分群である. このことからこの部分群を $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ と書くことにする. また 2 個以上の分解についても同様に表す.

$\lambda \vdash n$ を n の分割とする. $T \in \text{Num}(\lambda; [n])$ に対して T の各列の要素を変えない置換の全体を $C(T)$ で表す. これは \mathfrak{S}_n の部分群であり, T の column group という. また $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して σT を T の各要素 i を $\sigma(i)$ に置換して得られる数字盤とおく.

$\text{Num}(\lambda; [n])$ を生成系とする \mathbb{C} 上のベクトル空間 $\mathbb{C}\text{Num}(\lambda; [n]) = \langle v_T \mid T \in \text{Num}(\lambda; [n]) \rangle$ を考える. その部分空間 A^λ, Q^λ を次のように定義する.

$$A^\lambda = \langle v_T - \text{sgn}(\sigma)v_{\sigma T} \mid T \in \text{Num}(\lambda; [n]), \sigma \in C(T) \rangle$$

$$Q^\lambda = \langle v_T - \sum_S v_S \mid T \in \text{Num}(\lambda; [n]) \rangle$$

ただし Q^λ の式に現れる和 \sum は T のある 2 列について, その右側の列の上から k 個の要素と左側の列の任意の k 個の要素を, 縦の順序を保って交換して得られる $S \in \text{Num}(\lambda; [n])$ すべてを渡る. (ただし k は選んだ 2 列のうち右側の列の長さ以下とする.) このとき S^λ を A^λ および Q^λ を関係式とするベクトル空間と定義する. つまり,

$$S^\lambda = \mathbb{C}\text{Num}(\lambda; [n]) / (A^\lambda + Q^\lambda)$$

と定める. このとき S^λ は $\{v_T \in S^\lambda \mid T \in \text{STab}(\lambda; [n])\}$ を基底にすることがわかり, 従って $\dim S^\lambda = f^\lambda (= \#\text{STab}(\lambda; [n]))$ である. 任意の数字盤 $T \in \text{Num}(\lambda; [n])$ について $v_T \in S^\lambda$ を標準盤の一次結合で書き表すアルゴリズムもわかっている. これを straightening law^{*17} という. S^λ 上に \mathfrak{S}_n の線形な左作用を次で定義する.

$$\sigma \cdot v_T = v_{\sigma T} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n, T \in \text{Num}(\lambda; [n]))$$

これは well-defined であって, この作用により \mathfrak{S}_n の表現が得られる. これは \mathfrak{S}_n の既約表現で \mathfrak{S}_n の既約表現の完全代表系は $\{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ で与えられる. S^λ は Specht 加群と呼ばれる.

G を有限群, M を G の表現, U を \mathfrak{S}_n の表現とする. このとき環積 $G \wr \mathfrak{S}_n = G \ltimes G^n$ の表現 $U \otimes M^{\otimes n}$ を次で定義する.

$$(\sigma \cdot g) \cdot (u \otimes m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = \sigma \cdot u \otimes g \cdot m_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes g \cdot m_{\sigma^{-1}(n)} \quad (u \in U, m_i \in M, \sigma \in \mathfrak{S}_n, g = (g_1, \dots, g_n) \in G^n)$$

この表現を $M \wr U$ と書く. M, U がともに既約ならば $M \wr U$ も既約である.

補題 4.0.1 ([13]). $\{M_1, \dots, M_k\}$ を G の既約表現の同値類の完全代表系とする. k 個の分割 $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}$ が $\sum_{i=1}^k |\lambda^{(i)}| = n$ を満たすとし, $|\lambda^{(i)}| = n_i$ とおく. このとき

$$S^{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}} = \text{Ind}_{G(\mathfrak{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{n_k})}^{G \wr \mathfrak{S}_n} ((M_1 \wr S^{\lambda^{(1)}}) \boxtimes \cdots \boxtimes (M_k \wr S^{\lambda^{(k)}}))$$

は $G \wr \mathfrak{S}_n$ の既約表現であり, $\{S^{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}} \mid \lambda^{(i)} \in \mathcal{P}, \sum_{i=1}^k |\lambda^{(i)}| = n\}$ が $G \wr \mathfrak{S}_n$ の既約表現の完全代表系を与える.

$\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ の自明な表現を \mathbb{C}_{triv} , また \mathbb{C}_{sgn} を符号表現とする. その既約表現の完全代表系 $\{\mathbb{C}_{\text{triv}}, \mathbb{C}_{\text{sgn}}\}$ に対して補題 4.0.1 を適用する ($G = \mathbb{Z}_2, M_1 = \mathbb{C}_{\text{triv}}, M_2 = \mathbb{C}_{\text{sgn}}$) と, 環積 $W = \mathbb{Z}_2 \wr \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$ の既約表現の完全代表系は, その部分群を

$$H_{p,q} = (\mathbb{Z}_2 \wr \mathfrak{S}_p) \times (\mathbb{Z}_2 \wr \mathfrak{S}_q) = (\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q) \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n \quad (p + q = n)$$

^{*17} [3]p.98, Lemma 6 の証明にある.

とおくと

$$\left\{ \text{Ind}_{H_{p,q}}^W (\mathbb{C}_{\text{triv}} \wr S^\lambda \boxtimes \mathbb{C}_{\text{sgn}} \wr S^\mu) \mid \lambda \vdash p, \mu \vdash q, p+q=n \right\}$$

で与えられる . $[n]$ の中から p 個の互いに相異なる元 $i_1 < i_2 < \dots < i_p \in [n]$ を選んで , 残りの q 個の元 $j_1 < j_2 < \dots < j_q \in [n] - \{i_1, \dots, i_p\}$ を取り ,

$$[i_1, i_2, \dots, i_p] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & p+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p & j_1 & \dots & j_q \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$$

と書く . このとき $\mathfrak{S}_n / (\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q)$ の完全代表系として

$$\{[i_1, i_2, \dots, i_p] \in \mathfrak{S}_n \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n\}$$

取る . 従って $S^{\lambda, \mu} = \text{Ind}_{H_{p,q}}^W (\mathbb{C}_{\text{triv}} \wr S^\lambda \boxtimes \mathbb{C}_{\text{sgn}} \wr S^\mu)$ の基底を次のように与えることができる .

$$\{[i_1, i_2, \dots, i_p] \otimes v_S \otimes v_T \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n, (S, T) \in \text{STab}(\lambda; [p]) \times \text{STab}(\mu; [n] - [p])\}$$

ここで $[i_1, i_2, \dots, i_p] \otimes v_S \otimes v_T$ は正しくは $[i_1, i_2, \dots, i_p] \otimes ((v_S \otimes 1^{\otimes p}) \boxtimes (v_T \otimes 1^{\otimes q}))$ の意味であるが , 長くなるので $1 \in \mathbb{C}$ を省略して書いてある .

$$\sigma \cdot \varepsilon \in W \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in (\mathbb{Z})^n)$$

に対して ,

$$(\sigma \cdot \varepsilon) \cdot [i_1, i_2, \dots, i_p] \otimes v_S \otimes v_T = (\varepsilon_{j_1} \varepsilon_{j_2} \dots \varepsilon_{j_q}) \sigma [i_1, \dots, i_p] \otimes v_S \otimes v_T$$

となることに注意 . そこで \mathfrak{S}_n の作用を調べる .

$\rho = \Gamma_0^{-1}(\lambda, \mu)$ とする . $\Pi_0(D) = (S', T')$ で $\text{seq}(S') = (i_1, i_2, \dots, i_p), \text{seq}(T') = (j_1, j_2, \dots, j_q)$ とする .

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p & j_1 & j_2 & \dots & j_q \\ 1 & 2 & \dots & p & p+1 & p+2 & \dots & n \end{pmatrix} S'$$

$$T = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p & j_1 & j_2 & \dots & j_q \\ 1 & 2 & \dots & p & p+1 & p+2 & \dots & n \end{pmatrix} T'$$

とおく . このとき

$$v_D = [i_1, i_2, \dots, i_p] \otimes v_S \otimes v_T \in S^{\lambda, \mu}$$

と定義する . $\sigma \in \mathfrak{S}_n, D \in \text{DN}(n)$ に対して , $\sigma \cdot D$ を D の各要素 i を $\sigma(i)$ に置換してできるドミノ数字盤とおく . このとき ,

補題 4.0.2. $\sigma \cdot v_D = v_{\sigma \cdot D} \quad (\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \subset W)$

Proof.

$$\sigma [i_1, i_2, \dots, i_p] = [k_1, k_2, \dots, k_p] \tau_1 \tau_2 \quad (k_1 < k_2 < \dots < k_p, (\tau_1, \tau_2) \in \mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q)$$

とおく .

$$\begin{aligned} \Pi_0(\sigma D) &= (\sigma S', \sigma T') \\ &= (\sigma [i_1, \dots, i_p] S, \sigma [i_1, \dots, i_p] T) \\ &= ([k_1, \dots, k_p] \tau_1 \tau_2 S, [k_1, \dots, k_p] \tau_1 \tau_2 T) \\ &= ([k_1, \dots, k_p] \tau_1 S, [k_1, \dots, k_p] \tau_2 T) \end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned}
 v_{\sigma D} &= [k_1, \dots, k_p] \otimes v_{\tau_1 S} \otimes v_{\tau_2 T} \\
 &= [k_1, \dots, k_p] \otimes \tau_1 \cdot v_S \otimes \tau_2 \cdot v_T \\
 &= [k_1, \dots, k_p] \tau_1 \tau_2 \otimes v_S \otimes v_T \\
 &= \sigma[i_1, \dots, i_p] \otimes v_S \otimes v_T \\
 &= \sigma \cdot v_D
 \end{aligned}$$

□

例 4.0.3. 標準ドミノ盤に \mathfrak{S}_n の元が作用したときの計算例を示す．

補題 4.0.2 を適用した後，できあがったドミノ数字盤を標準ドミノ盤の一次結合に変換するところまで行っている．また以下の計算では v_D などを v を省いて直接 D と表記している．

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & \\ \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 6 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \right) \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 9 & 8 \\ \hline 2 & 5 & 3 \\ \hline 6 & 7 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 9 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 3 & 8 \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 9 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 8 \\ \hline 2 & 9 & 6 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 8 \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 8 \\ \hline 5 & 7 & \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 9 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 8 \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline \end{array} \right) - \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 9 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 8 \\ \hline 5 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} \right) - \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 9 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 8 \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline \end{array} \right) + \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 9 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 8 \\ \hline 5 & 7 & \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 8 \\ \hline 4 & 3 & 5 \\ \hline 6 & 7 & 9 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 8 \\ \hline 4 & 3 & 6 \\ \hline 5 & 7 & 9 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 6 & 7 & 9 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 6 \\ \hline 5 & 7 & 9 \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 8 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 4 & 7 & 9 \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 8 \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 4 & 7 & 9 \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 6 & 7 & 9 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 6 \\ \hline 5 & 7 & 9 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad (\because \text{補題 2.3.7})
 \end{aligned}$$

上の計算の最後のところで補題 2.3.7 を用いて標準ドミノ盤に変換しているが，実際これはいつでも可能である．つまり，

命題 4.0.4. ドミノ数字盤 D に対して， D の 2 つの数字盤への分解 $\Pi_0(D) = (S, T)$ がそれぞれ標準盤であるとき，補題 2.3.7 の変換を D について適当に繰り返し使えば， $\Pi_0^{-1}(S, T)$ の中にただひとつの標準ドミノ盤に変換できる．

Proof. D が仮定を満たすとす． D が標準ドミノ盤でなければ必ず 2 つのドミノが隣り合っている正方形をした形

$$\begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline i \\ \hline \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline j & i \\ \hline \end{array} \quad (i < j)$$

の形を含むことをまず示す．

$$(1) \quad \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline i \\ \hline \end{array} \quad (i < k) \quad \text{が存在するとき，}$$

$\begin{array}{|c|c|} \hline k & \\ \hline j & i \\ \hline \end{array}$ の形なら補題 2.3.6 より $k < j$ である . よって $\begin{array}{|c|c|} \hline j & i \\ \hline \end{array}$ ($i < i$) を含む .

また $\begin{array}{|c|c|} \hline & k \\ \hline k' & i \\ \hline \end{array}$ ($k < k'$) の形なら $\begin{array}{|c|c|} \hline k' & i \\ \hline \end{array}$ ($k' < i$) を存在するから (2) へ .

(2) $\begin{array}{|c|c|} \hline j & \\ \hline & k \\ \hline \end{array}$ ($k < i$) が存在するとき ,

$\begin{array}{|c|c|} \hline j & \\ \hline i & k \\ \hline \end{array}$ の形なら補題 2.3.6 より $i < k$ である . よって $\begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline i \\ \hline \end{array}$ ($i < j$) を含む .

また $\begin{array}{|c|c|} \hline j & \\ \hline & k \\ \hline k' & \\ \hline \end{array}$ $k' < k$ の形なら $\begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline k' \\ \hline \end{array}$ ($k' < j$) が存在するから (1) へ .

(1), (2) の形が交互に無限回繰り返し現れることはなく , ヤング図形の shape にならなければならないから , 結局

$$\begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline i \\ \hline \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline j & i \\ \hline \end{array} \quad (i < i)$$

の形がなければならない .

さて 2 つの shape の等しいドミノ数字盤 $N, N' \in DN_0(\rho)$ を (各ドミノに現れる要素を 1 箱ずつ中に入れてできる盤とみて) それぞれ一番右の列から左の列に向かって , 各列を下から上に要素を読み上げていくとき , 初めて相異なる要素が現れる箱に注目する . その箱における N の要素を x , N' の要素を y とおくと , $x > y$ ならば $N > N'$ と定義する . これは順序関係である .

D が標準ドミノ盤でなければ上の形の正方形を含み , この正方形に対して補題 2.3.7 の変換を一度施すと , この順序の意味で D より大きくなる . 標準ドミノ盤 が現れるまでこれを繰り返すアルゴリズムを実行する . $DN_0(\rho)$ は有限集合であるから , この変換は有限回で停止し標準ドミノ盤を得る . \square

ドミノ数字盤が複数の一次結合の形に現れるのはちょうど Specht 加群の関係式 Q^1 に現れており , ドミノ数字盤を 2 つ数字盤に分けて考えて関係式を使って変形したのが上の例である . これをもっと直接的にドミノ数字盤に対して変換規則を導入し , 標準ドミノ盤の 1 次結合を得ることが望ましい . このようにしてドミノ数字盤における straightening law が導入されるはずであるが , 時間的制約もありその研究はまだ完成されていない .

参考文献

- [1] G. E. Andrews and K. Eriksson, *Integer Partitions*, Cambridge University Press, 2004
- [2] S. Fomin and D. Stanton, *Rim hook lattices*, St. Petersburg Math. J.9 (1998), pp1007-1016.
- [3] W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society, 1997.
- [4] P. W. Kasteleyn, *Dimer Statistics and Phase Transitions*, J of Math. Phys. 4 (1963), pp.287-293.
- [5] T. Lam, *Growth Diagrams, Domino Insertion and Sign-Imbalance*, arXiv:math/0308265v1, 2003 .
- [6] M. A. A. van Leewen, *The Robinson-Schensted and Schützenberger algorithms, an elementary approach*, Electronic J. of Combin. 3, 1995.
- [7] T. Pietraho, *A Relation for Domino Robinson-Schensted Algorithms*, arXiv:math/0603654v3, 2007.

- [8] M. Shimozono and D. E. White, *A Color-to-Spin Domino Schensted Algorithm*, Electronic J of Combin. 8, 2001.
- [9] M. Shimozono and D. E. White *Color-to-Spin ribbon Schensted algorithms*, Discrete Math. 246 (2002), pp,295-316.
- [10] D. W. Stanton and D. E. White, *A Schensted Algorithm for Rim Hook Insertion Tableaux*, J of Combin. Theory Ser. A40 (1985), pp.211-247.
- [11] D. E. White, *A Bijection Proving Orthogonality of the Characters of \mathfrak{S}_n* , Advances in Math. 50 (1983), pp259-279.
- [12] 石川雅雄, 『代数的組合せ論』, 数学セミナー 2006.11.
- [13] 岡田聡一, 『古典群の表現論と組み合わせ論 下』, 培風館, 2006.
- [14] 木村達雄, 『佐藤幹夫の数学』, 日本評論社, 2007