次数付けられたリー環における巾零軌道の分類と特異点解消

京都大学大学院理学研究科

数学・数理解析専攻

松尾 清史

Abstract. 半単純線型代数群のリー環に対し、整数による次数付けが与えられているとする。次数付けは、ある半単純元の随伴作用による固有空間分解として与えられる。この元の中心化群は考えているリー環における次数 0 の部分空間をリー環とする線型代数群であって、各次数の部分空間へ自然に作用する。このとき各次数の部分空間における巾零軌道の分類という問題が考えられる。

自明な次数付けの場合は Dynkin-Kostant 理論により、巾零軌道は考えているリー環の重みつき Dynkin 図形と対応づけることで分類される。一般の次数付けに対しても、川中宣明 [20] により重みつき Dynkin 図形を用いて巾零軌道が分類される事がわかっている。しかし、これらの分類においては軌道の幾何学的構造についてあまり言及されていない。

この論文では、整数により次数付けられた特殊線型リー環に対して次数 1 の部分空間における巾零軌道の幾何学的構造を明らかにする。具体的には、軌道が旗多様体上の等質ファイバー束である事を示し、軌道の間の閉包関係を記述する。また軌道のファイバーを稠密に含むベクトル空間を用いて、軌道と同伴な旗多様体上の等質ベクトル束が軌道の閉包の特異点解消を与える事も証明する。

軌道の分類は単一方向に向き付けられた A 型箙

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

に対する、次元を固定した表現の分類に帰着されるが、Abeasis と Del Fra[4] によって箙の軌道の分類と軌道の閉包関係について同じ結果が得られている事を、後に知った。この論文の証明は別証を与えている。また、特異点解消の構成についても Abeasis、Del Fra、Kraft ら [7] により同じ構成で特異点解消が与えられている。

Contents

1. 次数付き半単純リー環における巾零軌道

この節では次数付き半単純リー環における巾零軌道の分類について知られている事実を解説し、この論文において考える問題を紹介する。節末において得られた結果を述べる事にしよう。以後断らない限り、リー環 $\mathfrak{g}$ とは半単純な複素数体上の有限次元リー代数を表すとする。

1.1. 巾零軌道と Jacobson-Morozov の定理.

次数を考えない半単純リー環における巾零軌道の分類に関する話から始めよう。まず巾零元の定義を述べ、半単純リー環における同値な条件を与える。同値性の証明に用いる Jacobson-Morozov の定理は軌道の分類において重要な役割を果たす。

定義 1.1 (巾零元)**.** リー群 G の表現 V において元 $v \in V$ が**巾零元**であるとは、G による v の軌道の閉包が原点を含むことをいう。また、巾零元を通る軌道を**巾零軌道**と呼ぶ。

$$0 \in \overline{Gv}$$

リー環 $\mathfrak{g}$ の元 X が巾零元であるとは、随伴群の表現において X が巾零元である事を表すこととする。

半単純リー環に対して巾零元は次の性質により特徴付けられる。

補題 1.2. 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ の元 X が巾零元であることは、$\mathfrak{g}$ 上の線型写像 $\mathrm{ad}(X)$ が巾零であることと同値である。

証明. $\mathfrak{g}$ は半単純リー環であるので次の同型が成り立つ。

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathrm{ad}(\mathfrak{g}).$$

巾零であるということは、同型によって保たれる ([8, §6.3 Proposition 4]) ので一般線型リー環 $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ に含まれる半単純リー環について証明すれば十分である。一般にリー環 $\mathrm{End}(V)$ に含まれる半単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対しては次の同値関係が成り立つ ([8, §6.3 Proposition 3, Corollary])。

$$\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \text{ は巾零である} \iff X \text{ は } V \text{ 上の線型写像として巾零である}$$

ここで巾零でない線型写像は 0 でない固有値を持つので、随伴群による軌道 (随伴軌道) の閉包が原点を含むことはない。ゆえに X が巾零元ならば $\mathrm{ad}(X)$ は巾零な線型写像である。

逆に巾零な線型写像に対して随伴軌道の閉包が原点を含むことを、次の Jacobson-Morozov の定理を用いて証明する。

定理 1.3 (Jacobson-Morozov)**.** 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ において補題 1.2 の意味で X が巾零元であるとする。このとき X を巾零元として含む $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{sl}_2$-triple $\{H,\ X,\ Y\}$ が存在する。ここで $\{H,\ X,\ Y\}$ が X を巾零元とする $\mathfrak{g}$ の **$\mathfrak{sl}_2$-triple** であるとは

$$H, X, Y \in \mathfrak{g}, \qquad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H$$

を満たす事を言う。このとき H を $\mathfrak{sl}_2$-triple $\{H, X, Y\}$ の**特性元**と呼ぶ。

注意 1.4. 次の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の基底に対して

$$h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$\mathfrak{sl}_2$-triple の関係式が成り立つ。

$$[h,x]=2x,\quad [h,y]=-2y,\quad [x,y]=h.$$

ゆえに $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{sl}_2$-triple とは $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と同型な部分リー環の基底と言える。

Jacobson-Morozov の定理の証明は [10, §3.3] や [22, Theorem 10.3] を参照して頂きたい。補題 1.2 の意味での巾零元 X に対し、Jacobson-Morozov の定理から $\mathfrak{sl}_2$-triple $\{H,X,Y\}$ をとる時、次式により随伴軌道の閉包が原点を含む事がわかる。

$$\mathrm{Ad}(\exp(-tH))(X)=\exp(\mathrm{ad}(-tH))(X)=e^{-2t}X\longrightarrow 0\quad (t\longrightarrow\infty).$$

□

半単純リー環における巾零軌道について次の事実が知られている。

定理 1.5 (Dynkin-Kostant)**.** 半単純リー環 $\mathfrak{g}$ において巾零軌道の全体は、$\mathfrak{g}$ の重みつき Dynkin 図形全体の部分集合と一対一に対応する。

この定理については [10] の第三節で詳しく解説がなされている。定理の証明において先程紹介した Jacobson-Morozov の定理が重要な役割を果たす。ここでは次数付けと重みつき Dynkin 図形との対応を述べた後に、巾零軌道と重みつき Dynkin 図形との対応を与える。巾零軌道と対応する重みつき Dynkin 図形においては、重みが $\{0,1,2\}$ のいずれかである事が知られており ([22, Proposition 10.12] など参照)、半単純リー環において巾零軌道は有限個しかない ([10, Theorem 3.5.4])。

1.2. **次数付けと重みつき Dynkin 図形.**

ここでは半単純リー環における次数付けが、重みつき Dynkin 図形として表される事を見よう。定理 1.5 における、巾零軌道と重みつき Dynkin 図形との対応はここで紹介する対応を用いる。

定義 1.6 ($\mathbb{Z}$ によって次数付けられたリー環)**.** リー環 $\mathfrak{g}$ に対し、$\mathbb{Z}$ により添字付けられた部分空間による直和分解

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_m$$

が存在し $[\mathfrak{g}_n,\mathfrak{g}_m]\subseteq\mathfrak{g}_{n+m}$ を満たすとき $\mathfrak{g}$ を $\mathbb{Z}$ **によって次数付けられたリー環**と呼ぶ。

注意 1.7. 同様に有限巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ によって次数付けられたリー環を定義することができる。

整数 $\mathbb{Z}$ により次数づけられたリー環 $\mathfrak{g}$ に対して $\mathfrak{g}_0$ は部分リー環となる。特に $\mathfrak{g}$ が半単純リー環ならば、Killing form が非退化な不変二次形式を定めるので $\mathfrak{g}_0$ は簡約なリー環である ([8, §6.4 Proposition 5] 参照)。$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ で $\mathfrak{g}_0$ に含まれるものが存在するが、このとき $\mathfrak{g}_i$ は $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ により不変である。

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_i]\subset[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_\mathrm{i}]\subset\mathfrak{g}_i.$$

Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ に関するルート空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ は一次元である ([22, Proposition 2.21]) ので、各ルート空間 $\mathfrak{g}_\alpha$ は斉次な空間 $\mathfrak{g}_{i_\alpha}$ に含まれる。このとき対応

$$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \ni \alpha \longrightarrow i_\alpha \in \mathbb{Z}$$

は加法的であるから、単純ルートにおける対応によって特徴づけられる。単純ルート達が $\mathfrak{h}$ の双対 $\mathfrak{h} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{h},\mathbb{C})$ における基底である ([22, Corollary 2.38]) ことにより

$$H \in \mathfrak{h} \text{ かつ、任意のルート } \alpha \in \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \text{ に対して } \alpha(H) = i_\alpha$$

となる元 H が存在する。この時 $\mathrm{ad}(H)$ の固有空間と、各次数の部分空間が一致する。

$$\mathfrak{g}_i = \left\{ X \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \mathrm{ad}(H)(X) = iX \right\}$$

逆に $\mathrm{ad}(H)$ が対角化可能で固有値が全て整数であるとき、Jacobi 恒等式により $\mathrm{ad}(H)$ の固有空間による分解は $\mathbb{Z}$ による $\mathfrak{g}$ の次数付けを定める。

以上により $\mathfrak{g}$ の次数付けは、ある半単純元 H の随伴作用 $\mathrm{ad}(H)$ に対する固有空間分解によって与えられる事が解った。半単純元とは随伴作用が $\mathfrak{g}$ 上の対角化可能な線型写像である元のことをいう。このとき H を含む Cartan 部分代数に関するルート系を考えれば、次数付けは各単純ルート α_i の上での値 $\alpha_i(H)$ により特徴付けられる。よって $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形において単純ルートの H における値を、対応する頂点に乗せる事で $\mathfrak{g}$ に対する次数付けを、重みを乗せた $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形として表示する事ができる。さらに次数を定める H に対して、単純ルートを H における値が非負になるようにとり直す事ができるので、非負の重みを乗せた Dynkin 図形により次数付けが表示できる。

この次数付けと重みつき Dynkin 図形との対応を用いて、半単純リー環における巾零軌道の分類 (定理 1.5) がどのように与えられるかを述べよう。巾零元 X を通る巾零軌道と、重みつき Dynkin 図形との対応は次の様に与えられる ([20, Lemma 2.1.4] や [10, Corollary 3.2.15] 参照)。

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathfrak{sl}_2-\text{triple}} \mathrm{ad}(H) \text{ による次数付け} \longrightarrow \text{重みつき Dynkin 図形}$$

ここで巾零元 X に対して H は $\mathfrak{sl}_2$-triple $\{H, X, Y\}$ における特性元である。このとき $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現論 (例えば [22, Theorem 1.66]) により $\mathrm{ad}(H)$ の固有値は整数しかないので $\mathrm{ad}(H)$ の固有空間分解が $\mathbb{Z}$ による $\mathfrak{g}$ の次数付けを定める。

1.3. 次数付き半単純リー環における巾零軌道.

整数により次数付けられた半単純リー環における巾零軌道について述べることにしよう。半単純リー環 $\mathfrak{g}$ において次数付けが H により与えられるとする。リー群 G でリー環を $\mathfrak{g}$ とするものに対して、連結な閉部分群 $G(0)$ を H の中心化群の連結成分として定める。

$$G(0) = Z_G(H)_0 = \left\{ g \in G \;\middle|\; \mathrm{Ad}(g)H = H \right\}_0$$

G が $\mathfrak{g}$ を複素リー環とする複素リー群である場合、もしくは $\mathfrak{g}$ をリー環とする線型代数群である場合、閉部分群 $G(0)$ は複素リー群や線型代数群であり、随伴作用によって各次数の部分空間 $\mathfrak{g}_i$ に正則に作用する。

このとき $\mathfrak{g}_i$ の元に対して、$G(0)$ の表現において巾零であることと $\mathfrak{g}$ の元として巾零であることは同値である。何故ならば $G(0)$ による軌道は随伴軌道に含まれるので、$G(0)$ の表現において巾零ならば $\mathfrak{g}$ において巾零である。逆に $\mathfrak{g}$ における巾零元に対し

て Jacobson-Morozov の定理によって得られる半単純元 H を $\mathfrak{g}_0$ からとれる事 ([10] における Jacobson-Morozov の定理の証明 Claim 3.3.7 以降の議論を参照) により、$G(0)$ 軌道の閉包が原点を含む事が解る。よって特に、整数により次数付けられた半単純リー環においては 0 以外の次数の斉次元は、全て巾零元である。

$\mathfrak{g}_1$ における巾零元の $G(0)$ 軌道の個数について Vinberg による結果が知られている。

定理 1.8 (Vinberg [28]). 巡回群により次数付けられた半単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して、$\mathfrak{g}_1$ における巾零元の $G(0)$ 軌道は有限個しかない。

ここで巡回群とは無限巡回群 $\mathbb{Z}$ 又は有限巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ をあらわす。証明は [28, §2 Proposition 2] を参照して頂きたい。次数付けを無限巡回群に限った場合は [22, Theorem 10.19] を参照する事もできる。この定理により $\mathfrak{g}_1$ における $G(0)$ の表現は概均質ベクトル空間を与える。さらに川中宣明 [20] により巾零軌道の分類が与えられている。

定理 1.9 (Kawanaka [20]). 巡回群により次数付けられた半単純線型代数群のリー環 $\mathfrak{g}$ に対して、$\mathfrak{g}_1$ における巾零元の $G(0)$ 軌道全体は $\mathfrak{g}_0$ の重みつき Dynkin 図形全体の部分集合と一対一に対応する。

軌道に対応する重みつき Dynkin 図形により軌道の次元を具体的に与える事もできる。証明など詳細は [20] を参照して頂きたい。

これまで紹介してきた定理においては軌道の分類が問題の主眼であるので、軌道の幾何学的構造についてあまり言及されていない。この論文においては軌道の幾何学的な性質を明らかにすることを問題とした。

1.4. 次数付き特殊線型リー環と A 型箙.

以降は整数により次数づけられた特殊線型リー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ のみを考える。このとき $\mathfrak{g}_1$ における巾零軌道の分類を改めて与え、幾何学的な性質を調べるのであるが、まず問題が簡略化できる事を見る事にしよう。

$\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ に対して次数付けは非負の重みをのせた A 型の Dynkin 図形により記述できるのであった。ゆえに次数付けと対応する重みつき A_{N-1} 型 Dynkin 図形 $\mathcal{A}_{N-1}$ は一般に次の形で書くことができる。

$$\mathcal{A}_{N-1} : 0^{k_1} \text{——} \overset{\ell_1}{\bullet} \text{——} \cdots \text{——} 0^{k_i} \text{——} \overset{\ell_i}{\bullet} \text{——} 0^{k_{i+1}} \text{——} \cdots \text{——} \overset{\ell_{n-1}}{\bullet} \text{——} 0^{k_n}$$

ここで k_i は非負の整数とし ℓ_i は正の整数とする。また 0^k とは全ての頂点に重み 0 を乗せた A_k 型 Dynkin 図形を表し k_i は等式 $N = \sum_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ を満足するとする。重み付き Dynkin 図形 $\mathcal{A}_{N-1}$ と対応する次数付けを見る事にしよう。$\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ における Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を

$$\mathfrak{h} = \left\{ H = \begin{pmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_N \end{pmatrix} \middle| \ \mathrm{Trace}(H) = \sum_{i=1}^{N} h_i = 0 \right\}$$

により定める。次数を定める $H_0 \in \mathfrak{h}$ が次により与えられる。

$$H_0 = \begin{pmatrix} H_1 & & \\ & \ddots & \\ & & H_n \end{pmatrix}, \quad H_i = h_i \cdot I_{k_i+1} \ .$$

ここに I_r は r 次の単位行列とし h_i は ℓ_j と k_j により次式で与えられるものとする。

$$h_i = \sum_{j \geq i} \ell_j - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{n} (k_m + 1) \sum_{j \geq m} \ell_j \quad (1 \leq i \leq n).$$

ゆえに $X_{i,j}$ をサイズが $(k_i + 1) \times (k_j + 1)$ であるブロック成分として

$$\deg \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} & \dots & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} & \dots & X_{2,n} \\ X_{3,1} & X_{3,2} & X_{3,3} & \dots & X_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n,1} & X_{n,2} & X_{n,3} & \dots & X_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_{1,1} & L_{1,2} & \dots & L_{1,n} \\ -L_{1,1} & 0 & L_{2,2} & \dots & L_{2,n} \\ -L_{1,2} & -L_{2,2} & 0 & \dots & L_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -L_{1,n} & -L_{2,n} & -L_{3,n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

によって、重みつき Dynkin 図形 $\mathcal{A}_{N-1}$ と対応する次数付けを得る。このとき $i < j$ に対する $X_{i,j}$ 成分の次数 $L_{i,j}$ は次式により定まる。

$$L_{i,j} = \sum_{m=i}^{j} \ell_m.$$

この次数付けに対して $G(0)$ は

$$G(0) = \left\{ g = \mathrm{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n) \;\middle|\; g_i \in GL(k_i + 1, \mathbb{C}),\ \det(g) = \prod_{i=1}^{n} \det(g_i) = 1 \right\}$$

により与えられる。ここで $\mathrm{diag}(g_1, \dots, g_n)$ は $g_1, \cdots, g_n$ を成分とする対角行列を表す。このとき $G(0)$ の $X_{i,j}$ への作用は次式により与えられる。

$$G(0) \times X_{i,j} \longrightarrow X_{i,j}\ , \quad (g, X) \mapsto g_i X g_j^{-1}.$$

よって $\mathfrak{g}_i$ における軌道を考える上では行列式が 1 であると言う $G(0)$ における条件はないものとして良い。つまり $G(0)$ を

$$G(0) = \left\{ g = \mathrm{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n) \;\middle|\; g_i \in GL(n_i, \mathbb{C}) \right\}$$

と考えて良い。このことは可逆なスカラー行列が $\mathfrak{g}_i$ に自明に作用するので、$G(0)$ に可逆なスカラー行列を増やしても軌道は変わらないことによる。

この論文の主題は $\mathfrak{g}_1$ における $G(0)$ 軌道を考える事である。ℓ は正の整数であるので $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ を $X_{i,j}$ によるブロック分割で表示したとき、$\mathfrak{g}_1$ は対角成分よりも一つ上のブロック成分 $X_{i,i+1}$ にしか現れ得ない。しかも $m = i, \dots, j$ に対して $\ell_m > 1$ とするとき、次の様なパートで $G(0)$ の $\mathfrak{g}_1$ への作用は直積に分解される。

$$\cdots \text{---} \overset{+1}{\bullet} \text{---} 0^{k_i} \text{---} \overset{\ell_i}{\bullet} \text{---} \cdots \text{---} \overset{\ell_j}{\bullet} \text{---} 0^{k_{j+1}} \text{---} \overset{+1}{\bullet} \text{---} \cdots$$

ゆえに、連続する 0 と孤立した +1 からなる重みつき Dynkin 図形に対して軌道を考えれば十分である。

$$0^{n_1-1} \text{ --- } \overset{+1}{\bullet} \text{ --- } \cdots \text{ --- } 0^{n_i-1} \text{ --- } \overset{+1}{\bullet} \text{ --- } 0^{n_{i+1}-1} \text{ --- } \cdots \text{ --- } \overset{+1}{\bullet} \text{ --- } 0^{n_{k+1}-1}$$

よって次数 1 のパート $\mathfrak{g}_1$ を

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_1 & & & & \\ & 0 & A_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & A_{k-1} & \\ & & & & 0 & A_k \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \middle| \; A_i \in \mathrm{M}(n_i, n_{i+1} \;; \mathbb{C}) \right\}$$

として $G(0)$ の $\mathfrak{g}_1$ に対する作用

$$\mathrm{Ad}\,(g) \left(\begin{pmatrix} 0 & A_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & A_k \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & g_1 A_1 g_2^{-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & g_k A_k g_{k+1}^{-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

を考えれば良いのだが、この $G(0)$ の $\mathfrak{g}_1$ への作用は箙の言葉に書き換えることができる。

Dynkin 図形 A_{k+1} に対して、単一方向に向きをつけることで定まる箙を $\mathcal{Q}_{k+1}$ とする。

$$\mathcal{Q}_{k+1} : \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

複素数体上の有限次元ベクトル空間 V_i と線型写像 $A_i \in \mathrm{Hom}(V_{i+1}, V_i)$ により箙 $\mathcal{Q}_{k+1}$ の表現が定まる。

$$V_{k+1} \xrightarrow{A_k} V_k \xrightarrow{A_{k-1}} \cdots \xrightarrow{A_2} V_2 \xrightarrow{A_1} V_1$$

各頂点を V_i とする箙 $\mathcal{Q}_{k+1}$ の表現全体を $\mathbb{A}_k$ により表す。

$$\mathbb{A}_k = \mathrm{Hom}(V_2, V_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}(V_{k+1}, V_k).$$

各ベクトル空間 V_i における自己同型群 $GL(V_i)$ の直積

$$\mathbb{G}_k = GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_{k+1})$$

は $\mathbb{A}_k$ に自然に作用する。

$$g \cdot A = (g_1 A_1 g_2^{-1}, \cdots, g_k A_k g_{k+1}^{-1}).$$

表現の全体 $\mathbb{A}_k$ における $\mathbb{G}_k$ 軌道は各頂点を V_i とする表現の同値類を定める。

このとき $\dim V_i = n_i$ として自然に $\mathfrak{g}_1$ は $\mathbb{A}_k$ と、$G(0)$ は $\mathbb{G}_k$ と作用もこめて同一視できる。以降は簡単の為に箙の言葉を用いる。

1.5. 巾零軌道の幾何学的構造.

得られた結果を述べることにしよう。

定理 (定理 2.10)**.** $A = (A_1, \ldots, A_k) \in \mathbb{A}_k$ を通る $\mathbb{G}_k$ 軌道は A_i による合成写像の階数

$$\operatorname{rank}(A_i A_{i+1} \cdots A_{j-1} A_j) \qquad (1 \leq i \leq j \leq k+1)$$

を成分とする行列、**階数行列** $R = I(A)$ によって分類される。このとき階数行列 R に対して旗多様体 $\mathcal{F}_R$ が自然に定まり、R と対応する軌道 $\mathcal{O}_R$ は $\mathcal{F}_R$ 上の $\mathbb{G}_k$ 等質ファイバー束である。

$$\mathcal{W}_R : \mathcal{O}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R.$$

ここで得られた分類と川中宣明による分類 [20] との対応は後に 2.3 節において例を挙げて紹介する。川中による分類では、軌道の間の閉包関係は与えられていない。この事に関して次の結果を得た。

定理 (定理 3.2)**.** 階数行列の間に、各成分の大小関係により半順序を定める。つまり、$R = (r_{i,j}),\ R' = (r'_{i,j})$ として

$$R \leq R' \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad r_{i,j} \leq r'_{i,j} \quad (1 \leq i, j \leq k+1)$$

とする。ここで階数行列 R と対応する $\mathbb{G}_k$ 軌道を $\mathcal{O}_R$ により表せば軌道の間の閉包関係は、この階数行列における半順序により与えられる。

$$\overline{\mathcal{O}_R} \subset \overline{\mathcal{O}_{R'}} \quad \Longleftrightarrow \quad R \leq R'.$$

軌道 $\mathcal{O}_R$ における $\mathcal{W}_R$ のファイバー

$$\mathcal{V}_0 = (\mathcal{W}_R)^{-1}(*) \subset \mathcal{O}_R$$

に対して $\mathbb{A}_k$ における閉包 $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}_0}$ をとる。この $\mathcal{V}$ をファイバーとする同伴な等質ファイバー束 E_R は軌道 $\mathcal{O}_R$ を稠密な開集合として含む。今の場合はさらに $\mathcal{V}$ がベクトル空間になり E_R は等質ベクトル束であることがわかる。

定理 3.2 の証明において E_R から軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}_R}$ への自然な全射 Φ が存在する事を示すのだが、さらに写像 $\Phi : E_R \to \overline{\mathcal{O}_R}$ は軌道の閉包の特異点解消を与える。

定理 (定理 4.12)**.** 自然な写像 $\Phi : E_R \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_R}$ は軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}_R}$ の特異点解消を与える。

特異点解消の定義 (定義 4.10) は [29] を参照した。この等質ベクトル束が特異点解消を与える事は、西山 享先生による示唆に基づき考えた事である ([24])。

階数行列を用いた軌道の分類は、恐らく古くから知られていると考えていたのだが軌道の間の閉包関係も、結果を得た後に Abeasis と Del Fra[4] によって既に解決されていることを知った。Abeasis と Del Fra による証明は、箙の表現が各ベクトル空間 V_i の基底変換により、ある種の標準的な表現と同値になることをもちいて表現を分類し、その標準的な表現の間で閉包関係を考えるというものであった。この論文では軌道が等質ファイバー束であるという幾何学的性質を明らかにし、軌道の分類と閉包関係に関して別証明を与えた事になる。また Abeasis と Del Fra は箙の表現の観点から、一般の A 型箙 [6] や単一方向に向きづけられた D 型箙 [5] に対しても軌道の閉包関係を与えている。

特異点解消については Abeasis、Del Fra、Kraft ら [7] によって全く同じ構成で軌道の閉包の特異点解消が与えられる事が証明されている。[7] においては更に、軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}}$ が正規かつ Cohen-Macaulay である事も証明されている。この事は、私が考えたかった問題の一つである。軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}_R}$ や特異点解消 E_R の函数環について知られている事実については、将来への課題とともに第 5 章にて紹介する。また、巾零軌道の特異点解消については一般的な観点から Hesselink([15],[16]) や Kraft-Wallach[23] によって研究されている。

謝辞 多数の有益な助言を頂き、またセミナーや論文作成においても厚き御指導頂いた西山 享先生に感謝の意を表したい。また、色々と助言をくれた森 伸吾君、森 克也君にも大変感謝している。

2. 軌道の分類とファイバー束としての構造

この節において軌道の分類を行なう。前節でみたように箙の表現を考えるのだが、まず箙 $\mathcal{Q}_{k+1}$ の表現の定義を繰り返しておこう。ここに $\mathcal{Q}_{k+1}$ とは A_{k+1} 型 Dynkin 図形に、単一の方向に向きを付けた図形を表すとする。

$$\mathcal{Q}_{k+1} : \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

以下、ベクトル空間は複素数体上の有限次元ベクトル空間とする。

定義 2.1. ベクトル空間 V_i $(1 \leq i \leq k+1)$ に対して $\dim V_i = n_i$ とし $n = (n_1, \ldots, n_{k+1})$ とおく。この時 $\{V_i\}_{i=1,\ldots,k+1}$ を頂点に持つ $\mathcal{Q}_{k+1}$ の表現とは

$$V_{k+1} \xrightarrow{A_k} V_k \xrightarrow{A_{k-1}} \cdots \xrightarrow{A_2} V_2 \xrightarrow{A_1} V_1 \tag{2.1}$$

となる線型写像の列 $A = (A_1, \ldots, A_k)$ のことである。表現の全体を

$$\mathbb{A}_k(n) = \mathrm{Hom}(V_2, V_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}(V_{k+1}, V_k) \tag{2.2}$$

により表す。各 V_i の自己同型群 $GL(V_i)$ の直積を $\mathbb{G}_k(n)$ とする。

$$\mathbb{G}_k(n) = GL(V_1) \times \cdots \times GL(V_{k+1}). \tag{2.3}$$

群 $\mathbb{G}_k(n)$ は $\mathbb{A}_k(n)$ 次の様に自然に作用する。

$$g \cdot A = (g_1 A_1 g_2^{-1}, \cdots, g_i A_i g_{i+1}^{-1}, \cdots, g_k A_k g_{k+1}^{-1}), \quad (g \in \mathbb{G}_k(n), \quad A \in \mathbb{A}_k(n)). \tag{2.4}$$

簡単のため $g \cdot A = gA$ と表し、ベクトル空間 V_i を明記しなくてもわかる場合は、ただ表現や線型写像列という言葉によって $\{V_i\}$ を頂点に持つ箙 $\mathcal{Q}_{k+1}$ の表現を表すこととする。

2.1. 階数行列とその性質.

階数行列という $\mathbb{G}_k$ の作用で不変な整数行列を定義し、階数行列を特徴付ける三つの性質を示す。以後、環 S の元を成分として持つ (ℓ, m) 次の行列全体のなす多元環を $\mathrm{M}(\ell, m\,; S)$ により表し、特に $\ell = m$ の時は $\mathrm{M}(\ell\,; S)$ と表す。

定義 2.2. 線型写像の列 $A \in \mathbb{A}_k(n)$ に対して V_j の部分空間 $\{W_{i,j}(A)\}_{1 \leq i \leq k+1}$ を次で定める。

$$W_{i,j}(A) = \begin{cases} \mathrm{Im}(A_j \cdots A_{k+1-i}) & (j \leq k+1-i) \\ V_j & (j = k+2-i) \\ \{0\} & (j \geq k+3-i) \end{cases} \tag{2.5}$$

また、$A \in \mathbb{A}_k(n)$ に対して $W_{i,j}(A)$ の次元を与える写像を $r_{i,j}$ により表す。

$$r_{i,j} : \mathbb{A}_k(n) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad r_{i,j}(A) = \dim W_{i,j}(A). \tag{2.6}$$

そして、行列 $(r_{i,j}(A))_{1 \leq i,j \leq k+1}$ を与える写像を I により表すこととしよう。

$$I : \mathbb{A}_k(n) \longrightarrow \mathrm{M}(k+1\,; \mathbb{Z}), \qquad I(A) = (r_{i,j}(A)). \tag{2.7}$$

このとき表現 $A \in \mathbb{A}_k(n)$ に対して $I(A)$ を A の**階数行列**とよぶ。

注意 2.3. (2.5) を端的に表せば図 1 の様に図示できる。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
W_{1,1}(A) & \xleftarrow{A_1} & W_{1,2}(A) & \xleftarrow{A_2} & W_{1,3}(A) & \xleftarrow{A_3} \dots \xleftarrow{A_{k-2}} & W_{1,k-1}(A) & \xleftarrow{A_{k-1}} & W_{1,k}(A) & \xleftarrow{A_k} & V_{k+1} \\
\bigcap & & \bigcap & & \bigcap & & \bigcap & & \bigcap & & \\
W_{2,1}(A) & \xleftarrow{A_1} & W_{2,2}(A) & \xleftarrow{A_2} & W_{2,3}(A) & \xleftarrow{A_3} \dots \xleftarrow{A_{k-2}} & W_{2,k-1}(A) & \xleftarrow{A_{k-1}} & V_k & & \\
\bigcap & & \bigcap & & \bigcap & & \bigcap & & & & \\
W_{3,1}(A) & \xleftarrow{A_1} & W_{3,2}(A) & \xleftarrow{A_2} & W_{3,3}(A) & \xleftarrow{A_3} \dots \xleftarrow{A_{k-2}} & V_{k-1} & & & & \\
\bigcap & & \bigcap & & \bigcap & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \iddots & & & & & \\
\bigcap & & \bigcap & & \bigcap & & & & & & \\
W_{k-1,1}(A) & \xleftarrow{A_1} & W_{k-1,2}(A) & \xleftarrow{A_2} & V_3 & & & & & & \\
\bigcap & & \bigcap & & & & & & & & \\
W_{k,1}(A) & \xleftarrow{A_1} & V_2 & & & & & & & & \\
\bigcap & & & & & & & & & & \\
V_1 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

図 1. 線型写像の分解
横に走る写像は全て全射

写像 $W_{i,j}, r_{i,j}, I$ を用いて階数行列の満たす性質を見る事にしよう。$\mathrm{Gr}_r(V_j)$ を V_j の r 次元部分空間全体 (Grassmann 多様体) とすれば、像をとる写像 $W_{i,j}$ は次の写像を定める。

$$W_{i,j} : \left\{ A \in \mathbb{A}_k(n) \;\middle|\; r_{i,j}(A) = r \right\} \longrightarrow \mathrm{Gr}_r(V_j).$$

群 $\mathbb{G}_k(n)$ は V_j に線型に作用しているので $\mathrm{Gr}_r(V_j)$ に自然に作用する。写像 $W_{i,j}$ はこの作用と可換である。

$$W_{i,j}(gA) = gW_{i,j}(A), \quad (A \in \mathbb{A}_k(n),\ g \in \mathbb{G}_k(n)). \tag{2.8}$$

ゆえに値 $r_{i,j}(A) = \dim W_{i,j}(A)$ は $\mathbb{G}_k(n)$ の作用で不変である。

$$r_{i,j}(A) = r_{i,j}(gA), \quad (A \in \mathbb{A}_k(n),\ g \in \mathbb{G}_k(n)).$$

よって $r_{i,j}(A)$ を成分とする階数行列 $I(A) = (r_{i,j}(A))$ は軌道の不変量である。つまり写像

$$\widetilde{I} : \mathbb{G}_k(n) \backslash \mathbb{A}_k(n) \longrightarrow \mathrm{M}(k+1\,; \mathbb{Z}), \quad \widetilde{I}(\mathbb{G}_k(n)A) = I(A) \tag{2.9}$$

が矛盾無く定まる。次に階数行列 $I(A)$ の各成分 $r_{i,j}(A)$ の満たす性質を見ていく事にしよう。まず定義から $r_{i,j}(A)$ は $j \geq k+2-i$ であるとき

$$r_{i,j} = n_j \quad (j = k+2-i), \quad r_{i,j} = 0 \quad (j \geq k+3-i) \tag{2.10}$$

を満たす。これは条件と言うよりも、規約とでも言うべき性質であるが整数行列 R に対してこの二つの条件を合わせて、**枠の条件**と呼ぶ事とする。

定義 2.4. 行列 $R=(r_{i,j})\in \mathrm{M}(k+1\,;\mathbb{Z})$ に対して $S(R)=(s_{i,j})\in \mathrm{M}(k+1\,;\mathbb{Z})$ を次で定める。ここに $r_{0,j}=0$ とする。

$$s_{i,j}=\begin{cases} r_{i.j}-r_{i-1,j} & (j\le k+2-i)\\ 0 & (j\ge k+3-i)\end{cases} \tag{2.11}$$

行列 R の成分の差により定まる行列 $S(R)$ を R の**差分行列**と呼ぶ。

$R=I(A)$ の場合に差分行列 $S(R)$ は商空間の次元を与える。

$$s_{i,j}=\dim W_{i,j}(A)/W_{i-1,j}(A) \quad (\text{但し}\, W_{0,j}(A)=\{0\}).$$

よって

$$s_{i,j}\ge 0 \quad (i+j\le k+2) \tag{2.12}$$

が成り立つ。この不等式は線型写像列 A により定まる部分空間 $\{W_{i,j}(A)\}$ の包含関係を表している。整数行列 R に対してこの不等式を**包含関係の条件**と呼ぶ。

また図1により $W_{i,j}(A)/W_{i-1,j}(A)$ から $W_{i,j-1}(A)/W_{i-1,j-1}(A)$ への全射が存在するので、次の不等式が成り立つ。

$$s_{i,1}\le s_{i,2}\le\cdots\le s_{i,k+2-i} \quad (1\le i\le k+1). \tag{2.13}$$

この不等式は線型写像列の定める旗の間に全射線型写像が存在する為の条件である (補題 2.16 参照)。整数行列 R に対してこの不等式を**全射存在の条件**と呼ぶ。

定義 2.5. 整数行列の集合 $\Lambda_k(n)$ を次のように定める。

$$\Lambda_k(n)=\left\{(r_{i,j})\in \mathrm{M}(k+1\,;\mathbb{Z}) \;\middle|\; (r_{i,j})\ \text{は条件}\ (2.10),(2.12),(2.13)\ \text{を満たす}\right\}. \tag{2.14}$$

この $\Lambda_k(n)$ の元を**階数行列**と呼ぶ。

注意 2.6. 階数行列は各 i 行に $k+2-i$ 成分まで i であり残りの成分が 0 であるベクトル $(i,i,\cdots,i,0\cdots,0)$ を足すことによって半単純板とみなすことができる。

定義から線型写像列 A の階数行列 $I(A)$ は $\Lambda_k(n)$ に含まれる。階数行列をとる写像により導かれる写像 $\widetilde{I}:\mathbb{G}_k(n)\backslash\mathbb{A}_k(n)\to\Lambda_k(n)$ が全単射である事、つまり階数行列により軌道が分類される事を次節において証明する。

2.2. 分類とファイバー束としての構造.

前節において定義した階数行列の集合 $\Lambda_k(n)$ が軌道を分類することと、軌道が等質ファイバー束であることを示す。その為に、重要な道具となる旗多様体を導入する。

定義 2.7. ベクトル空間 V を考える。狭義単調増加な正整数の組 $\mathbf{d}=(d_1,\cdots d_\ell)$ に対し旗多様体 $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V)$ を次で定める。

$$\mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V)=\{(W_1,\dots,W_\ell)\mid W_i\subset W_{i+1}:\text{部分線型空間},\ \mathrm{dim}W_i=d_i\ (1\le i\le\ell)\}. \tag{2.15}$$

ここに $W_{\ell+1}=V$ とする。

旗多様体 $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V)$ はGrassmann多様体と同様に $GL(V)$ の等質空間である。V を $\mathbb{C}^n$ と同一視し、始めの d_i 個の成分からなる部分空間を $\mathbb{C}^{d_i}$ と同一視する。このとき旗

$$\mathcal{W}^{(0)} = (\mathbb{C}^{d_1}, \mathbb{C}^{d_2}, \ldots, \mathbb{C}^{d_\ell}) \in \mathcal{F}_{\mathbf{d}}(\mathbb{C}^n)$$

の固定部分群は次により与えられる。

$$P_{\mathbf{d}} = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & * & \ldots & * \\ 0 & g_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & g_{\ell+1} \end{pmatrix} \middle| \, g_i \in GL(d_i - d_{i-1}, \mathbb{C}) \quad (1 \le i \le \ell+1) \right\}.$$

ここで $d_0 = 0, d_{\ell+1} = n$ とおいた。よって一点の固定部分群は $GL(V)$ の放物型部分群であって $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V) \simeq GL(V)/P_{\mathbf{d}}$ とみなす事ができる。この事から旗多様体 $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V)$ の次元は次のように与えられることが解る。

$$\dim \mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V) = \dim GL(V) - \dim P_{\mathbf{d}} = \sum_{i=1}^{\ell} (n - d_i)(d_i - d_{i-1}). \tag{2.16}$$

簡単の為に、広義単調増加な非負整数の組 $\mathbf{d}' = (d'_1, \ldots, d'_{\ell'})$ に対しても旗多様体 $\mathcal{F}_{\mathbf{d}'}(V)$ を同様に定める。

$$\mathcal{F}_{\mathbf{d}'}(V) = \{(W_1, \ldots, W_{\ell'}) \mid W_i \subset W_{i+1} : \text{部分線型空間},\ \dim W_i = d'_i\ (1 \le i \le \ell')\}.$$

このとき狭義単調増加な正整数の組 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_\ell)$ であって

$$\{d'_1, \ldots, d'_{\ell'}\} \backslash \{0\} = \{d_1, \ldots, d_\ell\}$$

を満たすものが存在する。旗 $\mathcal{W}' = (W'_1, \ldots, W'_{\ell'}) \in \mathcal{F}_{\mathbf{d}'}(V)$ は同じ次元の部分空間を含み得るが、次元が同じ部分空間は包含関係から一致する。よって重複する部分を無視する事で $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V)$ の元が一意に定まる。これにより $(W'_1, \ldots, W'_{\ell'}) \in \mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V)$ とみなし、$\mathcal{F}_{\mathbf{d}'}(V)$ を $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V)$ と同一視する。

以上の記号の下に階数行列 $R \in \Lambda_k(n)$ に対して旗多様体 $\mathcal{F}_R$ を対応させよう。

定義 2.8. 階数行列 $R = (r_{i,j}) \in \Lambda_k(n)$ に対して第 j 列を $\mathbf{r}_j = (r_{1,j}, \ldots, r_{k+2-j,j})$ と表して

$$(\mathcal{F}_R)_j = \mathcal{F}_{\mathbf{r}_j}(V_j) \tag{2.17}$$

と定める。このとき

$$\mathcal{F}_R = (\mathcal{F}_R)_1 \times (\mathcal{F}_R)_2 \times \cdots (\mathcal{F}_R)_k \times (\mathcal{F}_R)_{k+1} \tag{2.18}$$

として $\mathcal{F}_R$ を R **に付随する旗多様体**と呼ぶ。

階数行列 $R \in \Lambda_k(n)$ に対して $(\mathcal{F}_R)_j = \mathcal{F}_{\mathbf{r}_j}(V_j)$ の元 $(W_1, \ldots, W_{k+2-j})$ は枠の条件 (2.10) により $W_{k+2-j} = V_j$ を満たす。

各成分 $(\mathcal{F}_R)_j$ は $GL(V_j)$ の等質空間であるので旗多様体 $\mathcal{F}_R$ は $\mathbb{G}_k(n)$ の等質空間となる。一点の固定部分群は $\mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V)$ のときと同じ記号を用いれば

$$\mathbb{P}_R \simeq P_{\mathbf{r}_1} \times P_{\mathbf{r}_2} \times \cdots \times P_{\mathbf{r}_k} \times P_{\mathbf{r}_{k+1}} \tag{2.19}$$

という同型が成り立ち、$\mathbb{G}_k(n)$ の放物型部分群である。

線型写像列 $A \in \mathbb{A}_k(n)$ の階数行列 $R = I(A)$ の場合、像 $W_{i,j}(A)$ を集めることにより旗 $\mathcal{W}_R(A)$ が定まる。

定義 2.9. 階数行列 $R \in \Lambda_k(n)$ と各 $1 \le j \le k+1,\ A \in I^{-1}(R)$ に対して

$$(\mathcal{W}_R(A))_j = (W_{1,j}(A), W_{2,j}(A), \dots, W_{k+1-j,j}(A), W_{k+2-j,j}(A)) \in (\mathcal{F}_R)_j \tag{2.20}$$

と定め、これらの組として $\mathcal{W}_R$ を定める。

$$\mathcal{W}_R(A) = ((\mathcal{W}_R(A))_1, (\mathcal{W}_R(A))_2, \dots, (\mathcal{W}_R(A))_k, (\mathcal{W}_R(A))_{k+1}) \in \mathcal{F}_R. \tag{2.21}$$

階数行列が軌道の不変量なので $I^{-1}(R)$ に $\mathbb{G}_k(n)$ が作用する。像をとる写像 $W_{i,j}$ が $\mathbb{G}_k(n)$ 同変であるから、写像 $\mathcal{W}_R$ も $\mathbb{G}_k(n)$ 同変である。

$$\mathcal{W}_R(gA) = g\mathcal{W}_R(A) \qquad (A \in I^{-1}(R),\ g \in \mathbb{G}_k(n)). \tag{2.22}$$

写像 $\mathcal{W}_R$ と旗多様体 $\mathcal{F}_R$ を用いてこの節の主定理を述べよう。

定理 2.10. 階数行列をとる写像 $I : \mathbb{A}_k(n) \longrightarrow \Lambda_k(n)$ (式 (2.7)) と旗多様体への写像 $\mathcal{W}_R : I^{-1}(R) \longrightarrow \mathcal{F}_R$ に対し次が成立する。

(1) 階数行列 $R \in \Lambda_k(n)$ に対して $I^{-1}(R)$ は一つの $\mathbb{G}_k(n)$ 軌道であり、I の導く自然な写像

$$\widetilde{I} : \mathbb{G}_k(n) \backslash \mathbb{A}_k(n) \to \Lambda_k(n)$$

は全単射である。

(2) (1) により $R \in \Lambda_k(n)$ と対応する軌道 $I^{-1}(R)$ を $\mathcal{O}_R$ で表す。このとき

$$\mathcal{W}_R : \mathcal{O}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R \tag{2.23}$$

は $\mathcal{F}_R$ 上の正則な $\mathbb{G}_k(n)$ 等質ファイバー束である。

ここで一点 $\mathcal{W}^{(0)} = ((\mathcal{W}^{(0)})_1, \dots, (\mathcal{W}^{(0)})_{k+1}) \in \mathcal{F}_R$ 上のファイバー $\mathcal{V}_0$ は各成分を $(\mathcal{W}^{(0)})_j = (W^{(0)}_{1,j}, \dots, W^{(0)}_{k+2-j,j})$ と表すとき、次式で与えられる。

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ (A_1, \dots, A_k) \in \mathbb{A}_k(n) \;\middle|\; A_j(W^{(0)}_{k+1-i,j+1}) = W^{(0)}_{k+1-i,j}\ (1 \le j \le i \le k+1) \right\}. \tag{2.24}$$

条件 $A_j(W^{(0)}_{i,j+1}) = W^{(0)}_{i,j}$ $(1 \le i \le k+1-j)$ は旗 $(\mathcal{W}^{(0)})_{j+1}$ が A_j によって次の旗 $(\mathcal{W}^{(0)})_j$ へ移ることを表す。よって以後は

$$A_j((\mathcal{W}^{(0)})_{j+1}) = (\mathcal{W}^{(0)})_j$$

によりこの条件を表す事とする。また、写像 $\mathcal{W}_R$ が $\mathbb{G}_k(n)$ 同変であるから $\mathcal{W}^{(0)}$ の固定部分群 $\mathbb{P}_R$ はファイバー $\mathcal{V}_0$ に作用する。

注意 2.11. 後に定理 4.9 において $\mathcal{W}_R : \mathcal{O}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$ が代数的な等質ファイバー束となることを証明する。

以下、定理 2.10 をいくつかの補題に分けて証明する。

補題 2.12. 二つのベクトル空間 V_1, V_2 と V_2 の旗 $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_{\ell+1}) \in \mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V_2)$ であって $W_{\ell+1} = V_2$ であるものを考える。線型写像 $A, B \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1)$ が等式

$$A(\mathcal{W}) = (A(W_1), \dots, A(W_{\ell+1})) = (B(W_1), \dots, B(W_{\ell+1})) = B(\mathcal{W})$$

を満たすならば、旗 $\mathcal{W}$ の $GL(V)$ における固定部分群 $GL(V)^{\mathcal{W}} = P_{\mathbf{d}}$ の元 g_2 が存在して $Ag_2 = B$ が成り立つ。

証明. ℓ についての帰納法で示す。$\ell=0$ の場合は $\mathcal{W}=(V_2)$ であるので g_2 が $\mathcal{W}$ を保つと言う条件は自動的に満たされる。よって

“ $\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Im}(B)=U_1$ ならば $Ag_2=B$ を満たす $g_2\in GL(V_2)$ が存在する”

という命題を示せば良い。

二つの線型写像 A,B の核は次元が等しいので $GL(V_2)$ の作用により一致させる事ができ、初めから

$$\ker(A)=\ker(B)=W_0,\quad \mathrm{Im}(A)=\mathrm{Im}(B)=U_1$$

と仮定して良い。よって A,B は同型 $\widetilde{A},\widetilde{B}$

$$\widetilde{A},\widetilde{B}:\widetilde{V_2}=V_2/W_0\xrightarrow{\sim}U_1$$

を導く。核 W_0 を固定する線型変換の全体 $GL(V_2)^{W_0}$ から商空間の自己同型群への自然な全射準同型

$$GL(V_2)^{W_0}\longrightarrow GL(\widetilde{V_2})$$

によって $(\widetilde{A}^{-1}\circ\widetilde{B})\in GL(\widetilde{V_2})$ へうつる元 $g_2\in GL(V_2)^{W_0}$ をとれば $Ag_2=B$ が成り立つ。

ℓ が一般の場合を考える。制限写像による自然な全射準同型 $P_{\mathbf{d}}\to GL(W_1)$ が存在するので帰納法の仮定により $P_{\mathbf{d}}$ の元 a であって W_1 の上で $Aa=B$ が成り立つものが存在する。よって初めから A と B は W_1 上で等しいとして良い。

線型写像 A,B による W_1 の像を $\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Im}(B)=U_1$ と表せば A,B は

$$\widetilde{A},\widetilde{B}:V_2/W_1\longrightarrow V_1/U_1$$

を導く。ここで $\widetilde{\mathcal{W}}=(W_2/W_1,\ldots,W_{\ell+1}/W_1)$ は商空間 V_2/W_1 の旗であり $W_{\ell+1}/W_1=V_2/W_1$ を満たすので、帰納法の仮定によって $b\in P_{\widetilde{\mathbf{d}}}=GL(V_2/W_1)^{\widetilde{\mathcal{W}}}$ が存在して次が成り立つ。

$$\widetilde{A}b=\widetilde{B}.$$

旗 $\mathcal{W}$ の固定部分群 $P_{\mathbf{d}}$ の W_1 上への制限が恒等写像となる元のなす部分群から $P_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ への自然な全射準同型が存在する。

$$\{g\in P_{\mathbf{d}}\mid g|_{W_1}=1_{W_1}\}\longrightarrow P_{\widetilde{\mathbf{d}}}.$$

よって $\{g\in P_{\mathbf{d}}\mid g|_{W_1}=1_{W_1}\}$ の元 g が存在し等式 $\widetilde{Ag}=\widetilde{B}$ が成り立つ。ゆえに始めから

$$A-B\in\mathrm{Hom}(V_2,U_1)\text{ かつ }A-B|_{W_1}=0$$

と仮定して良い。差 $A-B$ を C により表そう。このとき $A|_{W_1}=B|_{W_1}$ の導く同型

$$A':W_1'=W_1/(\ker(A)\cap W_1)\xrightarrow{\sim}U_1$$

を用いて線型写像 $\widetilde{h}=(A')^{-1}\circ C\in\mathrm{Hom}(V_2,W_1')$ を定める。商写像を合成する事で定まる自然な全射

$$\{X\in\mathrm{Hom}(V_2,W_1)\mid X|_{(\ker(A)\cap W_1)}=0\}\longrightarrow\{\widetilde{X}\in\mathrm{Hom}(V_2,W_1')\mid \widetilde{X}|_{(\ker(A)\cap W_1)}=0\}$$

により $\widetilde{h}$ へうつる元 $h\in\mathrm{Hom}(V_2,W_1)$ をとれば次の三つの式を満足する。

$$h|_{(\ker(A)\cap W_1)}=0,\qquad h(W_1)\subset(\ker(A)\cap W_1),\qquad Ah=C.$$

よって $g = 1 - h \in P_{\mathbf{d}}$ であり

$$Ag = A - Ah = A - C = B$$

を得る。 □

補題 2.13. 一点の逆像 $\mathcal{V}_0$ は放物型部分群 $\mathbb{P}_R$ の等質空間である。特に $\mathcal{V}_0$ は複素多様体である。

証明. 一点の逆像 $\mathcal{V}_0$ は式 (2.24) により

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ (A_1, \ldots, A_k) \in \mathbb{A}_k(n) \;\middle|\; A_i((\mathcal{W}^{(0)})_{i+1}) = (\mathcal{W}^{(0)})_i \quad (1 \le i \le k)) \right\}$$

である。二元 $A, B \in \mathcal{V}_0$ をとれば、各 $1 \le i \le k$ に対して V_i, V_{i+1} と A_i, B_i が補題 2.12 の仮定を満たす。よって帰納的に $GL(V_i)$ の元 g_i であって

$$g_i \mathcal{W}_i^{(0)} = \mathcal{W}_i^{(0)} \quad かつ \quad g_i A_i g_{i+1}^{-1} = B_i$$

を満たすものを得る。この時 $g = (g_1, g_2, \ldots, g_{k+1}) \in \mathbb{P}_R$ は $gA = B$ を満たす。ゆえに $\mathcal{V}_0$ は $\mathbb{P}_R$ の等質空間である。 □

次に $\mathcal{W}_R : I^{-1}(R) \to \mathcal{F}_R$ が位相的な等質ファイバー束である事を示そう。

補題 2.14. $I^{-1}(R) \neq \emptyset$ である時

$$\mathcal{W}_R : I^{-1}(R) \longrightarrow \mathcal{F}_R \tag{2.25}$$

は $\mathcal{V}_0$ をファイバーとする位相的な $\mathbb{G}_k(n)$ 等質ファイバー束である。

証明. 一点 $\mathcal{W}^{(0)} \in \mathcal{F}_R$ の固定部分群 $\mathbb{P}_R$ は補題 2.13 により複素多様体 $\mathcal{V}_0 = \mathcal{W}_R^{-1}(\mathcal{W}^{(0)})$ に正則に作用するので正則な $\mathbb{G}_k(n)$ 等質ファイバー束 $\pi : \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0 \to \mathcal{F}_R$ を定義することができる。この等質ファイバー束から自然な写像

$$\Phi : \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0 \longrightarrow I^{-1}(R), \qquad \Phi([g, f]) = gf \tag{2.26}$$

が定まる。次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0 \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & I^{-1}(R) \arrow[dl, "\mathcal{W}_R"] \\
& \mathcal{F}_R &
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{W}_R(\Phi([g, f])) = \mathcal{W}_R(gf) = g\mathcal{W}_R(f) = g\mathcal{W}^{(0)} = \pi([g, f]).$$

写像 Φ は $\mathbb{G}_k(n)$ 同変であるので、Φ が同相写像である事を示せば $\mathcal{W}_R : I^{-1}(R) \to \mathcal{F}_R$ が位相的な $\mathbb{G}_k(n)$ 等質ファイバー束である事がわかる。

まず Φ が単射である事を示す。$\Phi([g, A]) = \Phi([g', A'])$ とすると $gA = g'A'$ である。$h = g^{-1}g'$ は $A = hA'$ を満たすので h は $\mathbb{P}_R$ に属する。

$$\mathcal{W}^{(0)} = \mathcal{W}_R(A) = \mathcal{W}_R(hA') = h\mathcal{W}_R(A') = h\mathcal{W}^{(0)}.$$

よって

$$[g, A] = [gh, h^{-1}A] = [gg^{-1}g', g'^{-1}gA] = [g', A']$$

となるので Φ は単射である。

次に Φ が全射である事を示す。旗多様体 $\mathcal{F}_R$ は $\mathbb{G}_k(n)$ の等質空間である。よって任意の元 $A \in I^{-1}(R)$ 対して、ある $g \in \mathbb{G}_k(n)$ があって $\mathcal{W}_R(A) = g\mathcal{W}^{(0)}$ が成り立つ。ゆえに、この g に対して次式が成り立つ。

$$\mathcal{W}_R(g^{-1}A) = g^{-1}\mathcal{W}_R(A) = g^{-1}g\mathcal{W}^{(0)} = \mathcal{W}^{(0)}.$$

つまり $g^{-1}A$ は $\mathcal{V}_0$ に属するので、Φ による $[g, g^{-1}A]$ の像が A であり Φ は全射である。

最後に Φ が同相写像である事を示す。全単射な写像であるので Φ が 各点の近傍上で同相である事を示せば十分である。さらに写像 Φ は $\mathbb{G}_k(n)$ 同変であるので、底空間の一点 $\mathcal{W}^{(0)}$ の近傍 U を取り

$$\Phi' = \Phi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathcal{W}_R^{-1}(U)$$

が同相写像である事を示せば良い。

近傍 U を十分小さくすれば正則な $\mathbb{G}_k(n)$ 主束 $\mathbb{G}_k(n) \longrightarrow \mathcal{F}_R$ は U 上で正則な断面を持つ。つまり次のような s が存在する。

$$s : U \longrightarrow \mathbb{G}_k(n) \text{ は正則写像であり } s(\mathcal{W})\mathcal{W}^{(0)} = \mathcal{W} \quad (\mathcal{W} \in U).$$

この様な s がとれる事は正則等質空間 $\mathcal{F}_R = \mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P}_R$ の複素多様体としての座標の入れ方 ([30, 定理 6.28] など参照) から解る。この時、$\mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0$ の複素多様体としての座標は $U \times \mathcal{V}_0$ から $\pi^{-1}(U)$ への同相写像

$$U \times \mathcal{V}_0 \ni (\mathcal{W}, f) \longrightarrow [s(\mathcal{W}), f] \in \pi^{-1}(U)$$

で与えられている。この同相写像を介して Φ' は

$$\Phi' : U \times \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{W}_R^{-1}(U), \quad \Phi'(\mathcal{W}, f) = \Phi([s(\mathcal{W}), f]) = s(\mathcal{W})f \tag{2.27}$$

とあらわされる。局所断面 s が連続で $\mathbb{G}_k(n)$ の作用は連続であるので、写像 Φ' は連続である。また逆写像が次の連続写像により与えられる。

$$(\Phi')^{-1} : \mathcal{W}_R^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathcal{V}_0, \quad (\Phi')^{-1}(A) = (\mathcal{W}_R(A), s(\mathcal{W}_R(A))^{-1}A). \tag{2.28}$$

よって $\Phi' = \Phi|_{\pi^{-1}(U)}$ は同相写像である。

以上によって $\mathcal{W}_R : I^{-1}(R) \to \mathcal{F}_R$ が位相的な $\mathbb{G}_k(n)$ 等質ファイバー束である事が証明された。 □

次に $I^{-1}(R)$ は空集合でなければ、ただ一つの $\mathbb{G}_k(n)$ 軌道である事を示そう。その為に等質ファイバー束における軌道についての補題を用いる。

補題 2.15. 等質ファイバー束

$$G \times_H F \longrightarrow G/H$$

に対して、 $G \times_H F$ 上の G 軌道は F における H 軌道と一対一に対応する。

証明. 証明は簡単なので省略する。 □

階数行列 $R \in \Lambda_k(n)$ に対し $I^{-1}(R)$ が空集合でないとする。このとき補題 2.13 により $\mathcal{V}_0$ における $\mathbb{P}_R$ 軌道はただ一つである。よって補題 2.15 から $I^{-1}(R)$ は一つの軌道である。つまり I の導く写像 $\widetilde{I} : \mathbb{G}_k(n)\backslash\mathbb{A}_k(n) \to \Lambda_k(n)$ は単射である。

次に、 $\mathcal{W}_R : I^{-1}(R) = \mathcal{O}_R \to \mathcal{F}_R$ が正則な等質ファイバー束である事を示す。位相的には等質ファイバー束である事が解っているので、補題 2.14 の証明における同相写像 Φ (2.26) が複素多様体 $\mathcal{O}_R$ への双正則写像である事を示せば良い。

$$\Phi : \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_R, \quad \Phi([g, f]) = gf.$$

しかし、同相写像 Φ の局所的な表示 (2.27) と逆写像の局所的な表示 (2.28)

$$\Phi' : U \times \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{W}_R^{-1}(U), \quad \Phi'(\mathcal{W}, f) = \Phi([s(\mathcal{W}), f]) = s(\mathcal{W})f$$

$$(\Phi')^{-1} : \mathcal{W}_R^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathcal{V}_0, \quad (\Phi')^{-1}(A) = (\mathcal{W}_R(A), s(\mathcal{W}_R(A))^{-1}A)$$

はともに正則な写像である。これは s が正則な局所断面であり $\mathbb{G}_k(n)$ の作用は正則であること、そして $\mathcal{W}_R$ が正則写像であることにより従う。

写像 $\mathcal{W}_R$ が正則であることについて少し述べる事にしよう。軌道 $\mathcal{O}_R$ における $f \in \mathcal{V}_0$ の固定部分群 $\mathbb{H}_R$ は $\mathbb{P}_R$ に含まれる。

$$g\mathcal{W}^{(0)} = g\mathcal{W}_R(f) = \mathcal{W}_R(gf) = \mathcal{W}_R(f) = \mathcal{W}^{(0)} \ (g \in \mathbb{H}_R) \quad \text{から } \mathbb{H}_R \subset \mathbb{P}_R.$$

このとき写像 $\mathcal{W}_R$ は次の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_k(n)/\mathbb{H}_R & \longrightarrow & \mathcal{O}_R \\ \downarrow & \circlearrowright & \downarrow {\scriptstyle \mathcal{W}_R} \\ \mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P}_R & \longrightarrow & \mathcal{F}_R \end{array}$$

この図式において縦の写像は商写像であり、横の写像は次で与えられる双正則写像であるので $\mathcal{W}_R$ は正則写像である。

$$\mathbb{G}_k(n)/\mathbb{H}_R \longrightarrow \mathcal{O}_R, \quad g\mathbb{H}_R \mapsto gF. \qquad \mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R, \quad g\mathbb{P}_R \mapsto g\mathcal{W}^{(0)}.$$

以上により $\mathcal{W}_R : \mathcal{O}_{(R)} \to \mathcal{F}_R$ が正則な $\mathbb{G}_k(n)$ 等質ファイバー束である事が示された。

最後に $I : \mathbb{A}_k(n) \to \Lambda_k(n)$ が全射である事を示す。

補題 2.16. V_1, V_2 をベクトル空間とし旗 $\mathcal{W}_j = (W_{1,j}, \dots, W_{\ell,j}) \in \mathcal{F}_{\mathbf{r}_j}(V_j)$ で $W_{\ell,2} = V_2$ を満たすものを考える。商空間の次元を

$$\dim W_{i,j}/W_{i-1,j} = s_{i,j} \quad (j = 1, 2,\ 1 \le i \le \ell) \quad (\text{但し } W_{0,j} = \{0\})$$

により表し、旗 $\mathcal{W}_1$ と $\mathcal{W}_2$ は商空間の次元について不等式

$$s_{i,1} \le s_{i,2} \qquad (1 \le i \le \ell) \tag{2.29}$$

を満たすとする。この時 V_2 から V_1 への線型写像 A で $A(\mathcal{W}_2) = \mathcal{W}_1$ を満たすもの全体を $\mathcal{V}_0$ とすれば

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ A \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1) \;\middle|\; A(\mathcal{W}_2) = \mathcal{W}_1 \right\}$$

$\mathcal{V}_0$ は $\mathrm{Hom}(V_2, V_1)$ における閉包 $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}_0}$ において稠密な開集合である。さらに $\mathcal{V}$ は

$$\mathcal{V} = \left\{ A \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1) \;\middle|\; A(\mathcal{W}_2) \subset \mathcal{W}_1 \right\}$$

により与えられるベクトル空間である。ここで $A(\mathcal{W}_2) \subset \mathcal{W}_1$ とは全ての $1 \le i \le \ell$ に対して $A(W_{i,2}) \subset W_{i,1}$ が成り立つ事を表す。

証明. $\mathcal{V}$ がベクトル空間である事は定義より明らか。$\mathcal{V}_0$ がベクトル空間 $\mathcal{V}$ において開集合である事を示そう。

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ A \in \mathcal{V} \;\middle|\; \widetilde{A}_i(W_{i,2}/W_{i-1,2}) = W_{i,1}/W_{i-1,1} \quad (1 \leq i \leq \ell) \right\}$$

により $\mathcal{V}_0$ は与えられる。ここに $W_{0,j} = 0$ とし $\widetilde{A}_i$ とは $A|_{W_{i,2}}$ が導く線型写像

$$\widetilde{A}_i : W_{i,2}/W_{i-1,2} \longrightarrow W_{i,1}/W_{i-1,1}$$

を表すとする。ベクトル空間 $W_{i,j}/W_{i-1,j}$ の次元に関して次の大小関係が成り立つ。

$$\dim(W_{i,1}/W_{i-1,1}) = s_{i,1} \leq s_{i,2} = \dim(W_{i,2}/W_{i-1,2}).$$

線型写像の最大階数の条件は多項式の非零点条件で表される、空でない開集合の条件であるから $\mathcal{V}_0$ は $\mathcal{V}$ の空でない Zariski 開集合である (補題 3.5 参照)。 □

注意 2.17. 不等式 (2.29) は旗 $\mathcal{W}_2$ を $\mathcal{W}_1$ へ全射に移す線型写像が存在することの同値な条件である。

補題 2.16 を用いて I が全射である事を示そう。階数行列 $R \in A_k(n)$ に対して定義 2.8 により旗多様体 $\mathcal{F}_R$ が定義された。このとき任意の $\mathcal{W} \in \mathcal{F}_R$ に対して

$$\mathcal{W} = ((\mathcal{W})_1, \dots (\mathcal{W})_{k+1}) \in \mathcal{F}_R,\ (\mathcal{W})_j = (W_{1,j}, W_{2,j}, \dots W_{k+2-j,j}) \in (\mathcal{F}_R)_j$$

の各旗 $(\mathcal{W})_j = (W_{1,j}, W_{2,j}, \dots, W_{k+2-j,j})$ は全射存在の条件 (2.13) により次の不等式を満たす。

$$\dim W_{i,j}/W_{i-1,j} = s_{i,j} \leq s_{i,j+1} = \dim W_{i,j+1}/W_{i-1,j} \quad (1 \leq i \leq k+1-j).$$

よって補題 2.16 から線型写像 $A_j \in \mathrm{Hom}(V_{j+1}, V_j)$ が存在して、旗の間の全射

$$A_j((\mathcal{W})_{j+1}) = (\mathcal{W})_j$$

が成立する。このとき $A = (A_1, A_2, \dots, A_k) \in \mathbb{A}_k(n)$ に対して $\mathcal{W}_R(A) = \mathcal{W}$ が成り立つ。実際、各旗 $(\mathcal{W})_j$ において $W_{k+2-j,j} = V_j$ である事に注意すれば $i+j \leq k+1$ では $W_{i,j}(A)$ は次式により $W_{i,j}$ に等しい。

$$W_{i,j}(A) = A_j \cdots A_{k+1-i}(V_{k+2-i}) = A_j \cdots A_{k-i}(W_{i,k+1-i}) = \cdots = W_{i,j}.$$

また $i+j = k+2$ の場合は、定義により $W_{i,j}(A) = V_j$ であったから $\mathcal{W}_R(A) = \mathcal{W}$ が成り立つ。よって $I(A) = R$ である。

以上により I が全射である事が証明され、定理 2.10 の証明が終了した。

2.3. **川中分類との対応.**

ここでは前節において得た軌道の分類と、川中宣明 [20] による重みつき Dynkin 図形を用いた分類との関係を例をあげて紹介する。

$k = 2$ の場合を考える。つまり箙 $\mathcal{Q}_3$ に対し、各頂点と対応させるベクトル空間の次元を $n = (n_1, n_2, n_3)$ をとした場合の表現を考える。

$$\mathcal{Q}_3 : \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

次数付けられた特殊線型リー環の言葉で述べれば重みつき A_{N-1} 型 Dynkin 図形

$$\mathcal{A}_{N-1} : 0^{n_1-1} \text{ —— } \overset{+1}{\bullet} \text{ —— } 0^{n_2-1} \text{ —— } \overset{+1}{\bullet} \text{ —— } 0^{n_3-1}$$

と対応する次数付けられた $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$ における $\mathfrak{g}_1$ での軌道分類を考える。ここで N は次元の和 $n_1+n_2+n_3$ であるとする。この重みつき Dynkin 図形と対応する $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$ の次数付けは次の H により与えられる。

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix},\ H_i = h_i I_{n_i} \in \mathrm{M}(n_i\ ;\mathbb{C}).$$

ここで I_r は r 次の単位行列とし h_i は以下の様に定める。

$$h_1 = \frac{n_2+2n_3}{N},\quad h_2 = \frac{-n_1+n_3}{N},\quad h_3 = \frac{-2n_1-n_2}{N}.$$

このとき $X_{i,j}$ をサイズ $n_i \times n_j$ のブロック成分として次数付けは

$$\deg \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} \\ X_{3,1} & X_{3,2} & X_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって与えられる。ゆえに次数 1 の部分空間 $\mathfrak{g}_1$ は

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & \\ & 0 & A_2 \\ & & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; A_i \in \mathrm{M}(n_i, n_{i+1}\ ;\mathbb{C}) \right\}$$

により与えられ、$G(0)$ は

$$G(0) = \left\{ g = \mathrm{diag}(g_1,g_2,g_3) \;\middle|\; \det(g_1)\det(g_2)\det(g_3) = 1 \right\}$$

と定まる。このとき $\mathfrak{g}_1$ における $G(0)$ 軌道は階数行列

$$I(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{rank}(A_1A_2) & \mathrm{rank}(A_2) & n_3 \\ \mathrm{rank}(A_1) & n_2 & 0 \\ n_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

によって分類される (定理 2.10)。

川中宣明による分類 [20] がどの様に与えられるかを簡単に述べよう。巾零元 $X \in \mathfrak{g}_1$ に対して Jacobson-Morozov の定理により $\mathfrak{sl}_2$-triple $\{H, X, Y\}$ をとる。このとき H を次数づけにより分解する。

$$H = H_0 + \sum_{i\neq 0} H_i.$$

巾零元 X に対して H_0 の定める重みつき Dynkin 図形を対応づける事により軌道の分類が与えられる (詳しくは [20, Theorem 3.15] の証明を参照)。

次数 1 の部分空間 $\mathfrak{g}_1$ の元 $A_{(r_1,r_2,r_{1,2})}$ 次により定める。

$$A_{(r_1,r_2,r_{1,2})} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & \\ & 0 & A_2 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_1.$$

ここに各成分を

$$A_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} I_{r_{1,2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2-r_{1,2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。各添字は階数を表し、これらは軌道空間 $G(0)\backslash\mathfrak{g}_1$ の完全代表系を与える。

$$r_1 = \mathrm{rank} A_1, \quad r_2 = \mathrm{rank} A_2, \quad r_{1,2} = \mathrm{rank}(A_1A_2).$$

Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ が今は $\mathfrak{g}_0$ に含まれているので対応する H_0 は H に等しく、次式により与えられる。

$$H = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 2I_{r_{1,2}} & & \\ & I_{r_1-r_{1,2}} & \\ & & 0 \end{matrix} & & \\ \hline & \begin{matrix} 0 & & & \\ & -I_{r_1-r_{1,2}} & & \\ & & I_{r_2-r_{1,2}} & \\ & & & 0 \end{matrix} & \\ \hline & & \begin{matrix} -2I_{r_{1,2}} & & & \\ & 0 & & \\ & & -I_{r_2-r_{1,2}} & \\ & & & 0 \end{matrix} \end{array}\right).$$

よって対応する重みつき Dynkin 図形は連結成分が三つあり、次の様に与えられる。

$$0^{r_{1,2}-1} \text{ — } \overset{+1}{\bullet} \text{ — } 0^{r_1-r_{1,2}-1} \text{ — } \overset{+1}{\bullet} \text{ — } 0^{n_1-r_1-1}$$

$$0^{r_{1,2}-1} \text{ — } \overset{+1}{\bullet} \text{ — } 0^{r_1-r_{1,2}-1} \text{ — } \overset{-2}{\bullet} \text{ — } 0^{r_2-r_{1,2}-1} \text{ — } \overset{+1}{\bullet} \text{ — } 0^{n_2-(r_1+r_2-r_{1,2})}$$

$$0^{r_{1,2}} \text{ — } \overset{-2}{\bullet} \text{ — } 0^{r_1-r_{1,2}} \text{ — } \overset{+1}{\bullet} \text{ — } 0^{r_2-r_{1,2}} \text{ — } \overset{-1}{\bullet} \text{ — } 0^{n_3-(r_1+r_2-r_{1,2})}$$

一般の $\mathfrak{g}_1$ における $G(0)$ 軌道は上の重みつき Dynkin 図形の和によって表される (1.4 節参照)。

2.4. **軌道の次元.**

2.2 節において軌道が旗多様体の上のファイバー束である事を証明した。今節ではこのことを用いて軌道の次元を計算する。

定理 2.18. 階数行列 R と対応する軌道 $\mathcal{O}_R$ の次元は次式により与えられる。

$$\dim \mathcal{O}_R = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k+1-j} \{(n_j + n_{j+1}) - (r_{i-1,j+1} + r_{i,j})\} s_{i,j}. \tag{2.30}$$

2.2 節で得たファイバー束 (2.23)

$$\mathcal{W}_R : \mathcal{O}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$$

において、ファイバー $\mathcal{V}_0$ と底空間 $\mathcal{F}_R$ の次元を計算すれば良い。旗多様体の次元は次式により与えられる (式 (2.16))。

$$\dim \mathcal{F}_{\mathbf{d}}(V) = \sum_{i=1}^{\ell} (n - d_i)(d_i - d_{i-1}) \quad (\text{但し } d_0 = 0).$$

よって、これを足し合わせて底空間の次元を得る。

補題 2.19 (底空間の次元)**.**

$$\dim \mathcal{F}_R = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k+1-j} (n_j - r_{i,j}) s_{i,j}. \tag{2.31}$$

ファイバーの次元については次が成り立つ。

補題 2.20 (ファイバーの次元)**.**

$$\dim \mathcal{V}_0 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k+1-j} (n_{j+1} - r_{i-1,j+1}) s_{i,j}. \tag{2.32}$$

証明. ファイバー $\mathcal{V}_0$ は式 (2.24) により

$$(\mathcal{V}_0)_j = \left\{ A_j \in \mathrm{Hom}(V_{j+1}, V_j) \;\middle|\; A_j((\mathcal{W}^{(0)})_{j+1}) = (\mathcal{W}^{(0)})_j \right\},$$
$$\mathcal{V}_0 = (\mathcal{V}_0)_1 \times (\mathcal{V}_0)_2 \times \cdots \times (\mathcal{V}_0)_{k+1}$$

と直積で書ける。成分 $(\mathcal{V}_0)_j$ の次元はこれから示す補題 2.21 で与えられるのでファイバーの次元を得る。 □

補題 2.21. ベクトル空間 V_1, V_2 と旗 $\mathcal{W}_i = (W_{1,i}, \ldots, W_{\ell,i}) \in \mathcal{F}_{\mathbf{r}_i}(V_i)$ であって $W_{\ell,2} = V_2$ を満たし、商空間の次元 $s_{i,j} = \dim W_{i,j}/W_{i-1,j}$ についての条件

$$s_{i,1} \leq s_{i,2} \quad (1 \leq i \leq \ell)$$

を満たすものを考える。このとき、旗 $\mathcal{W}_2$ を $\mathcal{W}_1$ に移す線型写像の全体

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ A \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1) \;\middle|\; A(\mathcal{W}_2) = \mathcal{W}_1 \right\}$$

の次元は $\mathbf{r}_j = (r_{1,j}, \ldots, r_{\ell,j})$, $r_{\ell,2} = \dim V_2 = n_2$ として、次のように表される。

$$\dim \mathcal{V}_0 = \sum_{i=1}^{\ell} (n_2 - r_{i-1,2}) s_{i,1}. \tag{2.33}$$

証明. 補題 2.16 により $\mathcal{V}_0$ の次元はベクトル空間

$$\mathcal{V} = \{A \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1) \mid A(\mathcal{W}_2) \subset \mathcal{W}_1\}$$

の次元に等しい。ここで $A(\mathcal{W}_2) \subset \mathcal{W}_1$ とは全ての i に対して、包含関係 $A(W_{i,2}) \subset W_{i,1}$ が成り立つ事を表す。ベクトル空間 $\mathcal{V}$ の次元が次式により与えられる事を示そう。

$$\dim \mathcal{V} = \sum_{i=1}^{\ell} (n_2 - r_{i-1,2}) s_{i,1}. \tag{2.34}$$

ℓ に関する帰納法によって証明する。$\ell = 1$ の場合は

$$\mathcal{V} = \{A \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1) \mid A(V_2) \subset W_{1,1}\} = \mathrm{Hom}(V_2, W_{1,1})$$

であるから $\dim \mathcal{V} = \dim \mathrm{Hom}(V_2, W_{1,1}) = n_2 r_{1,1}$ となり、次元の公式 (2.34) は成り立つ。
一般の ℓ の場合、一番小さな部分空間 $W_{1,j}$ で割った旗を考える。

$$\mathcal{W}_j / W_{1,j} = (W_{2,j}/W_{1,j}, W_{3,j}/W_{1,j}, \ldots, W_{\ell,j}/W_{1,j}) = (\widetilde{W}_{1,j}, \widetilde{W}_{2,j}, \ldots, \widetilde{W}_{\ell-1,j}).$$

これは商空間 $\widetilde{V}_j = V_j / W_{1,j}$ における旗である。ベクトル空間 $\widetilde{\mathcal{V}}$ を

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \{A \in \mathrm{Hom}(\widetilde{V}_2, \widetilde{V}_1) \mid A(\widetilde{\mathcal{W}}_2) \subset \widetilde{\mathcal{W}}_1\}$$

とすれば $\mathcal{V}$ から $\widetilde{\mathcal{V}}$ への自然な全射が存在し次の完全列をえる。

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_2, W_{1,1}) \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{V}} \longrightarrow 0$$

商空間における $\widetilde{\mathcal{V}}$ に対しては旗の個数が一つ減っているので帰納法の仮定が適用できる。従って $\mathcal{V}$ の次元は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{V} &= \dim \mathrm{Hom}(V_2, W_{1,1}) + \dim \widetilde{\mathcal{V}} \\ &= n_2 r_{1,1} + \sum_{i=2}^{\ell} (n_2 - r_{i-1,2}) s_{i,1} = \sum_{i=1}^{\ell} (n_2 - r_{i-1,2}) s_{i,1}. \end{aligned}$$

以上により一般の ℓ に対しても次元の公式 (2.34) が証明された。 □

ファイバー束 $\mathcal{O}_R = \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0 \to \mathcal{F}_R$ に対してファイバーと底空間の次元が

$$\dim \mathcal{V}_0 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k+1-j} (n_{j+1} - r_{i-1,j+1}) s_{i,j}, \quad \dim \mathcal{F}_R = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k+1-j} (n_j - r_{i,j}) s_{i,j} \tag{2.35}$$

により与えられる事が解ったので、これらを足し合わせて軌道の次元を得る。

$$\dim \mathcal{O}_R = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k+1-j} \{(n_j + n_{j+1}) - (r_{i-1,j+1} + r_{i,j})\} s_{i,j}.$$

以上により定理 2.18 の証明を終る。

3. 軌道の間の閉包関係

第 2.2 節において軌道の分類集合として、階数行列の全体 $\Lambda_k(n)$ を得た。軌道の閉包関係を階数行列を用いて具体的に記述しよう。まず $\Lambda_k(n)$ における半順序を定義する。

定義 3.1. 分類集合 $\Lambda_k(n)$ に半順序 $\leq$ を $R = (r_{i,j}),\ R' = (r'_{i,j}) \in \Lambda_k(n)$ に対して

$$R \leq R' \overset{\text{def}}{\iff} r_{i,j} \leq r'_{i,j} \quad (1 \leq i, j \leq k+1) \tag{3.1}$$

により定める。

次の定理を証明する事がこの節での主題である。

定理 3.2. 階数行列 R と対応する軌道を $\mathcal{O}_R$ により表す。このとき、軌道の間の閉包関係は次により与えられる。

$$\overline{\mathcal{O}_R} \subset \overline{\mathcal{O}_{R'}} \iff R \leq R' \quad (R, R' \in \Lambda_k(n)). \tag{3.2}$$

$k = 1$ の場合における軌道の閉包、行列式多様体について閉包関係をみることにしよう。以降ではベクトル空間 V_i の基底を一つとり $\mathbb{C}^{n_i}$ と同一視する。従って線型写像は行列として表示される。

定義 3.3. アフィン空間 $\mathrm{M}(n, m\ ; \mathbb{C})$ において $r+1$ 次の小行列式全体で定義される閉部分多様体を $\mathrm{Det}_r(n, m)$ で表し r 次の**行列式多様体**と呼ぶ。

行列式多様体については以下の事実が知られている。ここに n 以下の自然数の集合を $[n]$ で表して、その中の k 個の自然数の組全体を次の記号であらわす。

$$\mathcal{I}_k[n] = \left\{ I \subset [n] \;\middle|\; \#I = k \right\}.$$

補題 3.4. サイズが $r+1$ の小行列式全体が生成するイデアル

$$(\mathcal{D}_{I,J} \mid I \in \mathcal{I}_{r+1}[n],\ J \in \mathcal{I}_{r+1}[m]) \tag{3.3}$$

は素イデアルである。ここに $\mathcal{D}_{I,J}$ は次で定めるサイズが $r+1$ の小行列式である。

$$\mathcal{D}_{I,J} = \det(z_{i,j})_{i \in I, j \in J} \in \mathbb{C}[\mathrm{M}(n, m\ ; \mathbb{C})]. \tag{3.4}$$

また $\mathbb{C}[\mathrm{Det}_r(n, m)]$ は正規な Cohen-Macaulay 環である。

この補題の証明については [9, 定理 6.3, 系 5.17] を参照して頂きたい。行列式多様体 $\mathrm{Det}_r(n, m)$ は集合としては階数が r 以下の行列全体である。

$$\mathrm{Det}_r(n, m) = \{A \in \mathrm{M}(n, m\ ; \mathbb{C}) \mid \mathrm{rank}(A) \leq r\}. \tag{3.5}$$

そして階数がちょうど r の行列全体は

$$\{A \in \mathrm{M}(n, m\ ; \mathbb{C}) \mid \mathrm{rank}(A) = r\} = \mathrm{Det}_r(n, m) \backslash \mathrm{Det}_{r-1}(n, m) \tag{3.6}$$

により与えられるから行列式多様体の中で空集合もしくは、稠密な開集合である。この事を補題してまとめておく。

補題 3.5. 行列式多様体 $\mathrm{Det}_r(n, m)$ において最大階数の行列全体は稠密な開集合である。

行列式多様体は我々の考えている軌道の閉包の例である。ベクトル空間の個数を $k=1$ とすれば線型写像列の全体と作用する群はそれぞれ

$$\mathbb{A}_1(n,m)=\mathrm{M}(n,m\,;\mathbb{C}),\quad \mathbb{G}_1(n,m)=GL(n,\mathbb{C})\times GL(m,\mathbb{C})$$

により与えられる。階数行列の全体は

$$\Lambda_1(n,m)=\left\{\left(\begin{array}{cc} r & m \\ n & 0 \end{array}\right)\in\mathrm{M}(2\,;\mathbb{Z})\ \middle|\ 0\le r\le n,\ r\le m\right\}$$

と与えられ、軌道は線型写像 $A\in\mathrm{M}(n,m\,;\mathbb{C})$ の階数 r により分類される。行列式多様体は $\mathrm{M}(n,m\,;\mathbb{C})$ の閉集合であるが補題 3.5 により軌道の閉包に等しい。

$$\overline{\mathcal{O}_r}=\mathrm{Det}_r(n,m). \tag{3.7}$$

このとき閉包関係は

$$\overline{\mathcal{O}_r}\subset\overline{\mathcal{O}_{r'}}\iff r\le r' \tag{3.8}$$

により与えられるので、目標である定理 3.2 の $k=1$ の場合が証明できた事になる。

一般の場合での定理 3.2 の証明に入ろう。

定理 3.2 の証明. 階数行列 $R\in\Lambda_k(n)$ に対して等式

$$\overline{\mathcal{O}_R}=\bigcap_{1\le i\le j\le k}\left\{A\in\mathbb{A}_k(n)\ \middle|\ \mathrm{rank}(A_i\cdots A_j)\le r_{k+1-j,i}\right\}=\coprod_{R'\in\Lambda_k(n),R'\le R}\mathcal{O}_{R'} \tag{3.9}$$

が成り立つ事を証明しよう。軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}_R}$ に関するこの等式により定理は直ちに従う。

$$\mathbb{A}_k(n)\longrightarrow\mathrm{M}(n_i,n_{j+1}\,;\mathbb{C}),\quad (A_1,\ldots,A_k)\mapsto A_i\cdots A_j\quad(1\le i\le j\le k) \tag{3.10}$$

という代数的な射による行列式多様体 $\mathrm{Det}_{r_{k+1-j,i}}(n_i,n_{j+1})$ の逆像

$$\left\{A\in\mathbb{A}_k(n)\ \middle|\ \mathrm{rank}(A_i\cdots A_j)\le r_{k+1-j,i}\right\}$$

は $\mathbb{A}_k(n)$ の閉集合である。よって式 (3.9) 真中の式は閉集合である。定理 2.10 により軌道 $\mathcal{O}_R$ は、次式により与えられる。

$$\mathcal{O}_R=\bigcap_{1\le i\le j\le k}\left\{A\in\mathbb{A}_k(n)\ \middle|\ \mathrm{rank}(A_i\cdots A_j)=r_{k+1-j,i}\right\}. \tag{3.11}$$

よって階数行列 $R'\le R$ に対して次が成り立つ。

$$\mathcal{O}_{R'}\subset\bigcap_{1\le i\le j\le k}\left\{A\in\mathbb{A}_k(n)\ \middle|\ \mathrm{rank}(A_i\cdots A_j)\le r_{k+1-j,i}\right\}. \tag{3.12}$$

ここで逆に右辺の元 A

$$A\in\bigcap_{1\le i\le j\le k}\left\{A\in\mathbb{A}_k(n)\ \middle|\ \mathrm{rank}(A_i\cdots A_j)\le r_{k+1-j,i}\right\}$$

に対して、階数は $r_{i,j}(A)=\mathrm{rank}(A_j\cdots A_{k+1-i})\le r_{i,j}$ を満たす。つまり A の階数行列は $I(A)\le R$ を満たすので逆の包含関係を得る。

$$\bigcap_{1\le i\le j\le k}\left\{A\in\mathbb{A}_k(n)\ \middle|\ \mathrm{rank}(A_i\cdots A_j)\le r_{k+1-j,i}\right\}\subset\coprod_{R'\in\Lambda_k(n),R'\le R}\mathcal{O}_{R'}.$$

よって式 (3.9) における二つ目の等号が証明できた。また R についての包含関係 (3.12) において、両辺の閉包を取る事で次式を得る。

$$\overline{\mathcal{O}_R} \subset \bigcap_{1 \le i \le j \le k} \left\{ A \in \mathbb{A}_k(n) \;\middle|\; \operatorname{rank}(A_i \cdots A_j) \le r_{k+1-j,i} \right\}.$$

ゆえに式 (3.9) における一つ目の等号を証明する為に包含関係

$$\bigcap_{1 \le i \le j \le k} \left\{ A \in \mathbb{A}_k(n) \;\middle|\; \operatorname{rank}(A_i \cdots A_j) \le r_{k+1-j,i} \right\} \subset \overline{\mathcal{O}_R}$$

を示そう。そのために、ファイバー束

$$\mathcal{W}_R : \mathcal{O}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$$

に同伴な等質ベクトル束 E_R を導入する。

定義 3.6. 正則な等質ベクトル束 $E_R \to \mathcal{F}_R$ を次で定める。

$$E_R = \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{F}_R. \tag{3.13}$$

ここで $\mathcal{V}$ はファイバー束 $\mathcal{W}_R : \mathcal{O}_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$ での、一点 $\mathcal{W}^{(0)} \in \mathcal{F}_R$ 上のファイバー $\mathcal{V}_0$ の $\mathbb{A}_k(n)$ での閉包 $\overline{\mathcal{V}_0}$ とする。

注意 3.7. 固定部分群 $\mathbb{P}_R$ の $\mathbb{A}_k(n)$ への作用で $\mathcal{V}_0$ が安定であるから閉包 $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}_0}$ も安定である。補題 2.16 により $\mathcal{V}$ は次式で与えられるベクトル空間である。

$$\mathcal{V} = \left\{ (A_1, \ldots, A_k) \in \mathbb{A}_k(n) \;\middle|\; A_i((\mathcal{W}^{(0)})_{i+1}) \subset (\mathcal{W}^{(0)})_i,\ (1 \le i \le k) \right\}.$$

ゆえに等質ファイバー束 $\mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{F}_R$ は等質ベクトル束である。

正則ベクトル束 E_R から $\mathbb{A}_k(n)$ への正則な写像 Φ を

$$\Phi : E_R = \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{A}_k(n) \qquad \Phi([g, f]) = gf \tag{3.14}$$

と定める。補題 2.14 の証明において写像 $\Phi : \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_R$ を、式 (2.26) によって同様に定めたが、写像 (3.14) は Φ の E_R への自然な拡張になっているので全く同じ記号 Φ をここでも用いる。

ファイバーの閉包 $\mathcal{V}$ は、軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}_R}$ に含まれる。定義から像 $\Phi(E_R)$ は $\mathbb{G}_k(n)\mathcal{V}$ に一致するので軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}_R}$ に含まれる。

$$\mathcal{O}_R \subset \Phi(E_R) = \mathbb{G}_k(n)\mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{O}_R}.$$

ゆえに $\Phi(E_R)$ が式 (3.9) の第二項を含む事を証明しよう。ここで式 (3.9) の二つ目の等号により右辺は、R 以下の階数行列と対応する軌道の和であった。この事から像 $\Phi(E_R)$ が、R 以下の階数行列と対応する軌道を全て含む事を示せば良い。

$$\Phi(E_R) \supset \coprod_{R' \in \Lambda_k(n),\, R' \le R} \mathcal{O}_{R'}.$$

像 $\Phi(E_R)$ が群 $\mathbb{G}_k(n)$ の作用で安定であるからファイバーの閉包 $\mathcal{V}$ が $R' \in \Lambda_k(n)$ に対して次を満たす事を示せば良い。

$$R' \le R \implies \mathcal{V} \cap \mathcal{O}_{R'} \ne \emptyset. \tag{3.15}$$

このことを次の補題を用いて証明する。

補題 3.8. ベクトル空間 V_j における旗 $\mathcal{W}_j = (W_{1,j}, \ldots, W_{\ell+1,j}) \in \mathcal{F}_{\mathbf{r}_j}(V_j) \quad (j = 1, 2)$ であって $W_{\ell+1,2} = V_2$ を満たすものと、線型写像 $A : V_2 \to V_1$ で $A(\mathcal{W}_1) = \mathcal{W}_2$ を満たすものを考える。このときベクトル空間の次元 $n_j = \dim V_j$ を越えない非負整数の単調増加列 $\widetilde{r_j} = (\widetilde{r}_{1,j}, \ldots, \widetilde{r}_{\ell+1,j}) \quad (j = 1, 2)$ であって

$$\widetilde{r}_{i,2} - \widetilde{r}_{i-1,2} \geq \widetilde{r}_{i,1} - \widetilde{r}_{i-1,1}, \qquad \widetilde{r}_{i,j} \geq r_{i,j} \qquad (j = 1, 2.\ 1 \leq i \leq \ell + 1)$$

を満たすものに対して、各 V_j の旗 $\widetilde{\mathcal{W}}_j \in \mathcal{F}_{\widetilde{\mathbf{r}}_j}(V_j)$ が存在し $A(\widetilde{\mathcal{W}_2}) \subset \widetilde{\mathcal{W}}_1$ が成り立つ。ここに $\widetilde{r}_{0,1} = \widetilde{r}_{0,2} = 0$ とする。

注意 3.9. 補題 3.8 における $\widetilde{r}_j$ に関する第一の条件

$$\widetilde{r}_{i,2} - \widetilde{r}_{i-1,2} \geq \widetilde{r}_{i,1} - \widetilde{r}_{i-1,1} \quad (1 \leq i \leq \ell + 1)$$

は旗 $\widetilde{\mathcal{W}}_2$ と $\widetilde{\mathcal{W}}_1$ の間に全射線型写像が存在する為の条件である (補題 2.16 参照)。

証明. 旗の個数 ℓ についての帰納法によって証明しよう。$\ell = 0$ の場合は $r_2 = \widetilde{r}_2 = (n_2)$ であるから V_2 における旗 $\mathcal{W}_2$ と $\widetilde{\mathcal{W}}_2$ は等しく (V_2) となる。よって V_1 における旗 $\widetilde{\mathcal{W}}_1 = (\widetilde{W}_{1,1})$ を $W_{1,1} \subset \widetilde{W}_{1,1}$ が成り立つ様にとれば、求める旗の条件を満たす。

$$A(\widetilde{\mathcal{W}}_2) = A(V_2) = W_{1,1} \subset \widetilde{W}_{1,1}.$$

ℓ が一般の場合を証明する。

$$\begin{array}{ccc} & & V_1 \\ & & \cup \\ V_2 & \xrightarrow{A} & W_{\ell+1,1} \\ \cup & & \cup \\ W_{\ell,2} & \xrightarrow{A} & W_{\ell,1} \end{array}$$

ここで横に走る写像は全射である。A の導く線型写像 $\widetilde{A} : V_2/W_{\ell,2} \to W_{\ell+1,1}/W_{\ell,1}$ の核の次元は次式により与えられる。

$$\dim\ker(\widetilde{A}) = \dim(V_2/W_{\ell,2}) - \dim(W_{\ell+1,1}/W_{\ell,1}) = (n_2 - r_{\ell,2}) - (r_{\ell+1,1} - r_{\ell,1}).$$

V_2 の $\widetilde{r}_{\ell,2}$ 次元部分空間 $\widetilde{W}_{\ell,2}$ を $W_{\ell,2}$ を含み $\widetilde{W}_{\ell,2}/W_{\ell,2}$ において $\widetilde{A}$ の核が最も大きくなるようにとる。つまり $W_{\ell,2}$ を含み

$$W_{\ell,2} \subset \widetilde{W}_{\ell,2}$$

$W_{\ell,2}$ を含む、次元が $\widetilde{r}_{\ell,2}$ である任意の部分空間 W に対して次の不等式を満たす。

$$\dim((\widetilde{W}_{\ell,2}/W_{\ell,2}) \cap \ker(\widetilde{A})) \geq \dim((W/W_{\ell,2}) \cap \ker(\widetilde{A})).$$

このとき

$$\dim((\widetilde{W}_{\ell,2}/W_{\ell,2}) \cap \ker(\widetilde{A})) = \min\{\widetilde{r}_{\ell,2} - r_{\ell,2}, \dim(\ker(\widetilde{A}))\}$$

であるので像 $\widetilde{A}(\widetilde{W}_{\ell,2}/W_{\ell,2})$ の次元は次式により与えられる。

$$\dim(\widetilde{A}(\widetilde{W}_{\ell,2}/W_{\ell,2})) = \max\{0, \widetilde{r}_{\ell,2} - (n_2 - r_{\ell+1,1}) - r_{\ell,1}\}.$$

ゆえに $A(\widetilde{W}_{\ell,2})$ の次元が

$$\begin{aligned}\dim A(\widetilde{W}_{\ell,2}) &= \dim A(W_{\ell,2}) + \dim \widetilde{A}(\widetilde{W}_{\ell,2}/W_{\ell,2}) \\ &= r_{\ell,1} + \max\{0, \widetilde{r}_{\ell,2} - (n_2 - r_{\ell+1,1}) - r_{\ell,1}\} \\ &= \max\{r_{\ell,1}, \widetilde{r}_{\ell,2} - (n_2 - r_{\ell+1,1})\}\end{aligned}$$

によって得られる。全射存在の条件によって $n_2 - \widetilde{r}_{\ell,2} \geq \widetilde{r}_{\ell+1,1} - \widetilde{r}_{\ell,1}$ が成り立つので

$$\begin{aligned}\widetilde{r}_{\ell,1} - \{\widetilde{r}_{\ell,2} - (n_2 - r_{\ell+1,1})\} &= \widetilde{r}_{\ell,1} + (n_2 - \widetilde{r}_{\ell,2}) - r_{\ell+1,1} \\ &\geq \widetilde{r}_{\ell,1} + \widetilde{r}_{\ell+1,1} - \widetilde{r}_{\ell,1} - r_{\ell+1,1} = \widetilde{r}_{\ell+1,1} - r_{\ell+1,1} \geq 0\end{aligned}$$

という不等式が成り立つ事から次式を得る。

$$\widetilde{r}_{\ell,1} - \dim A(\widetilde{W}_{\ell,2}) = \min\{\widetilde{r}_{\ell,1} - r_{\ell,1}, \widetilde{r}_{\ell,1} - \{\widetilde{r}_{\ell,2} - (n_2 - r_{\ell+1,1})\}\} \geq 0.$$

よって V_1 の $\widetilde{r}_{\ell,1}$ 次元部分空間 $\widetilde{W}_{\ell,1}$ であって $A(\widetilde{W}_{\ell,2})$ を含むものが存在する。このとき $\widetilde{W}_{\ell,2}$ が $W_{\ell,2}$ を含むので二つの旗

$$\mathcal{W}_2' = (W_{1,2}, \ldots, W_{\ell-1,2}, \widetilde{W}_{\ell,2}), \quad \mathcal{W}_1' = (W_{1,1}, \ldots, W_{\ell-1,1}, A(\widetilde{W}_{\ell,2}))$$

は各々 $\widetilde{W}_{\ell,2}$ と $\widetilde{W}_{\ell,1}$ における旗であって $A(\mathcal{W}_2') = \mathcal{W}_1'$ が成り立つ。これらの旗と非負整数の単調増加列

$$\widetilde{r}_2' = (\widetilde{r}_{1,2}, \ldots, \widetilde{r}_{\ell-1,2}, \widetilde{r}_{\ell,2}), \quad \widetilde{r}_1' = (\widetilde{r}_{1,1}, \ldots, \widetilde{r}_{\ell-1,1}, \widetilde{r}_{\ell,1})$$

について帰納法の仮定から次の様な旗が得られる。

$$\widetilde{\mathcal{W}_2}' \in \mathcal{F}_{\widetilde{\mathbf{r}}_2'}(\widetilde{W_{\ell,2}}), \quad \widetilde{\mathcal{W}_1}' \in \mathcal{F}_{\widetilde{\mathbf{r}}_1'}(\widetilde{W_{\ell,1}}), \qquad A(\widetilde{\mathcal{W}_2}') \subset \widetilde{\mathcal{W}_1}'.$$

必要ならば $\widetilde{W}_{\ell,1}$ をとり直して $\widetilde{W}_{\ell+1,1}$ を $\widetilde{W}_{\ell,1}$ と $W_{\ell+1,1}$ を含む $\widetilde{r}_{\ell+1,1}$ 次元の空間として、V_1 の旗を $\widetilde{\mathcal{W}_1} = (\widetilde{\mathcal{W}_1}', \widetilde{W}_{\ell+1,1})$ と定める。そして V_2 の旗を $\widetilde{\mathcal{W}_2} = (\widetilde{\mathcal{W}_2}', V_2)$ と定めれば

$$\widetilde{\mathcal{W}_1} \in \mathcal{F}_{\widetilde{\mathbf{r}}_1}(V_1), \quad \widetilde{\mathcal{W}_2} \in \mathcal{F}_{\widetilde{\mathbf{r}}_2}(V_2), \qquad A(\widetilde{\mathcal{W}_2}) \subset \widetilde{\mathcal{W}_1}$$

が成り立ち、求める旗を得る。 □

補題 3.8 を用いて式 (3.15) を証明する。

$$R' \leq R \implies \mathcal{V} \cap \mathcal{O}_{R'} \neq \emptyset$$

二つの階数行列 $R, R' \in \Lambda_k(n)$ が $R' \leq R$ という関係にあるとする。このとき階数行列を R' とする線型写像列 $A' = (A_1', \ldots, A_k')$ は、旗の直積 $\mathcal{W}_{R'}(A')$ において各成分を次の成分に移す。

$$A_j'((\mathcal{W}_{R'}(A'))_{j+1}) = (\mathcal{W}_{R'}(A'))_j.$$

階数行列の間の大小関係の定義から旗 $(\mathcal{W}_{R'}(A'))_{j+1}$ と $(\mathcal{W}_{R'}(A'))_j$ そして R の第 j 列 $\mathbf{r}_j = (r_{1,j}, \ldots, r_{k+2-j,j})$ に対して補題 3.8 が適用でき、各 $j = 1, \ldots, k+1$ に対して次を満たす旗 $(\mathcal{W})_j$ を得る。

$$(\mathcal{W})_j \in \mathcal{F}_{\mathbf{r}_j}(V_j), \quad A_j'((\mathcal{W})_{j+1}) \subset (\mathcal{W})_j.$$

これらの直積 $\mathcal{W} = ((\mathcal{W})_1, \dots, (\mathcal{W})_{k+1})$ は $\mathcal{F}_R = \mathcal{F}_{\mathbf{r}_1}(V_1) \times \cdots \times \mathcal{F}_{\mathbf{r}_{k+1}}(V_{k+1})$ に属するが $\mathbb{G}_k(n)$ の作用により A' を動かす事で $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{(0)}$ として良い。このとき次の包含関係が成り立つ。

$$A_j((\mathcal{W}^{(0)})_{j+1}) \subset (\mathcal{W}^{(0)})_j \quad (1 \leq j \leq k).$$

よって A' は $\mathcal{V}$ に属するので $\mathcal{V}$ は $\mathcal{O}_{R'}$ と交わる。以上により式 (3.15) が証明できた。

R 以下の階数行列 R' に対して、像 $\Phi(E_R)$ は 軌道 $\mathcal{O}_{R'}$ 含む事が証明された。よって等式 (3.9)

$$\overline{\mathcal{O}_R} = \bigcap_{1 \leq i \leq j \leq k} \left\{ A \in \mathbb{A}_k(n) \mid \operatorname{rank}(A_i \cdots A_j) \leq r_{k+1-j,i} \right\} = \coprod_{R' \in \Lambda_k(n), R' \leq R} \mathcal{O}_{R'}$$

を得た。以上により定理の証明をおわる。 □

軌道の閉包関係が具体的に記述された。特別な場合においては軌道の閉包が行列式多様体の直積になる事を紹介しこの節を終える。

系 3.10. 階数行列 R が差分行列 $S(R)$ について $s_{i,j} = 0 \quad (i \neq 1,\ i + j \leq k + 1)$ という条件を満足するならば軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}_R}$ は行列式多様体の直積である。

$$\overline{\mathcal{O}_R} = \operatorname{Det}_{r_{1,1}}(n_1, n_2) \times \operatorname{Det}_{r_{1,2}}(n_2, n_3) \times \operatorname{Det}_{r_{1,k+1}}(n_k, n_{k+1}). \tag{3.16}$$

よって軌道の閉包の函数環は

$$\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}_R}] = \mathbb{C}[\operatorname{Det}_{r_{1,1}}(n_1, n_2)] \otimes \mathbb{C}[\operatorname{Det}_{r_{1,2}}(n_2, n_3)] \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}[\operatorname{Det}_{r_{1,k+1}}(n_k, n_{k+1})] \tag{3.17}$$

により与えられる。

証明. 一般に軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}_R}$ は行列式多様体の直積に含まれる。

$$\overline{\mathcal{O}_R} \subset \operatorname{Det}_{r_{k,1}}(n_1, n_2) \times \operatorname{Det}_{r_{k-1,2}}(n_2, n_3) \times \cdots \times \operatorname{Det}_{k,1}(n_k, n_{k+1}).$$

条件 $s_{i,j} = 0 \quad (i \neq 1,\ i + j \leq k + 1)$ によりパラメータ R は

$$n_j = r_{k+2-j,j} \geq r_{k+1-j,j} = \cdots = r_{1,j}$$

を満たすので右辺の元

$$A \in \operatorname{Det}_{r_{k,1}}(n_1, n_2) \times \operatorname{Det}_{r_{k-1,2}}(n_2, n_3) \times \cdots \times \operatorname{Det}_{k,1}(n_k, n_{k+1})$$

をとれば

$$\operatorname{rank}(A_j \cdots A_{k+1-i}) \leq \operatorname{rank}(A_j) \leq r_{k+1-j,j} = r_{1,j} = r_{i,j} \quad (i + j \leq k + 1)$$

であるから A は軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}_R}$ に含まれる。よって求める等号を得る。

$$\overline{\mathcal{O}_R} = \operatorname{Det}_{r_{1,1}}(n_1, n_2) \times \operatorname{Det}_{r_{1,2}}(n_2, n_3) \times \operatorname{Det}_{r_{1,k+1}}(n_k, n_{k+1}).$$

□

4. 軌道の閉包の特異点解消の構成

軌道の閉包に対し特異点解消を与えるのが今節の目的である。

4.1. 等質ファイバー束と軌道の代数的構造.

まず、等質ベクトル束 E_R や軌道 $\mathcal{O}_R$ に代数多様体の構造が自然に定まる事を紹介する。ここで紹介する等質ファイバー束についての事実は [26, §2] において扱われている。しかし、ここでは [25, §4] を参照した。以後、代数多様体は既約性を仮定せず複素数体上で定義されたものとする。

定義 4.1. 代数群 G の部分代数群 H が代数多様体 F に代数的に作用しているとする。この時 H を次のように $G \times F$ へ作用させる。

$$h \cdot (g, f) = (gh^{-1}, hf) \quad (h \in H,\ g \in G,\ f \in F).$$

この作用による商位相空間 $(G \times F)/H = G \times_H F$ 上の可換環の層 $\mathcal{F}_{G \times_H F}$ を $G \times F$ の構造層 $\mathcal{F}_{G \times F}$ と、商写像 $\pi : G \times F \to G \times_H F$ を用いて

$$\mathcal{F}_{G \times_H F}(U) = \mathcal{F}_{G \times F}(\pi^{-1}(U))^H \quad (U \subset G \times_H F : \text{開集合})$$

により定める。ここで $\pi^{-1}(U)$ は H の作用で安定な Zariski 開集合である。

注意 4.2. 環付き空間 $(G \times_H F,\ \mathcal{F}_{G \times_H F})$ と、環付き空間の間の自然な射 $p : G \times F \to G \times_H F$ に対して次の普遍写像性質が成り立つ。

環付き空間 $(Y,\ \mathcal{F}_Y)$ と射 $\varphi : G \times F \to Y$ であって H の作用で不変なもの、つまり $\varphi(h \cdot (g, f)) = (g, f)$ を満たすものに対して次の図式を可換にする射 $\widetilde{\varphi} : G \times_H F \to Y$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
G \times F \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
G \times_H F \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

代数多様体 F が準射影的であれば、環付き空間 $(G \times_H F, \mathcal{F}_{G \times_H F})$ は代数多様体になる事が知られている。証明については [25, Theorem 4.19] を参照して頂きたい。

定理 4.3 (Serre)**.** 代数多様体 F が準射影的多様体、もしくはより一般的に、F の任意の有限集合があるアフィン開集合に含まれるならば、環付き空間 $(G \times_H F,\ \mathcal{F}_{G \times_H F})$ は代数多様体の構造を持つ。

注意 4.4. このとき $(G \times_H F,\ \mathcal{F}_{G \times_H F})$ は代数多様体の圏において注意 4.2 と同様の普遍写像性質を持つ。

さらに、このとき各点の非特異性や正規性が次の定理により与えられる。詳しくは例えば [25, Proposition 4.22] を見よ。

定理 4.5. 点 $x \in F$ が等質ファイバー束 $G \times_H F$ において非特異点もしくは正規点である事は、それぞれ F において非特異点もしくは正規点である事と同値である。

等質ファイバー束 $G \times_H F$ の G 軌道は F と交わるので、定理 4.5 によって次を得る。

系 4.6. ファイバー F が非特異であれば等質ファイバー束 $G \times_H F$ も非特異である。

次に軌道に対して代数多様体の構造が自然に定まることを見る。以降の事実については [27] を参照した。

補題 4.7. 代数群 G が代数多様体 X に作用しているとする。このとき $x \in X$ を通る軌道 $\mathcal{O}_x = Gx$ はその閉包 $\overline{\mathcal{O}_x}$ における開集合である。

証明は [27, Lemma 2.3.3] を参照して頂きたい。この補題により軌道はその閉包の開部分多様体である。さらに代数群 G が線型代数群つまり、ある GL_n の閉部分群であるならば軌道が圏論的な普遍性を持つ (つまり圏論的商多様体になる) ことが知られている。証明は [27, Theorem 5.5.5] などを参照することができる。

定理 4.8. アフィン代数多様体 X に線型代数群 G が作用し、点 $x \in X$ での固定部分群が H であるとする。この時、x を通る G 軌道 $\mathcal{O}_x$ は圏論的商 G/H に同型である。

紹介した事実を用いて定理 2.10 の (2) が代数多様体として成り立つことを示す。つまり $\mathcal{W}_R : \mathcal{O}_R \to \mathcal{F}_R$ が代数多様体としてのファイバー束になることを証明しよう。

定理 4.9. 定理 2.10(2) の等質ファイバー束は代数多様体の構造を持ち、さらに

$$\Phi : \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_R, \qquad \Phi([g, v]) = gv$$

は代数多様体としての同型を与える。

証明. ファイバー $\mathcal{V}_0$ がアフィン空間 $\mathbb{A}_k(n)$ における Zariski 開集合であるので等質ファイバー束 $\mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0$ は代数多様体の構造を持つ。

Φ は代数多様体の間の正則写像

$$\Phi_0 : \mathbb{G}_k(n) \times \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_R, \qquad \Phi_0(g, v) = gv$$

により導かれる正則写像である。ファイバーの一点 $f \in \mathcal{V}_0$ を等質ファイバー束の一点 $[1, f] \in \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0$ とみなす。

$$\pi' : \mathbb{G}_k(n) \longrightarrow \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0, \quad \pi'(g) = [g, f]$$

により定めた正則写像 π' は次の図式を可換にする Φ' を導く。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_k(n) \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0 \\
\mathcal{O}_R \arrow[ur, "\Phi'"'] &
\end{tikzcd}$$

この時、$\Phi \circ \Phi'$ は次の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{G}_k(n) \arrow[d] \arrow[ddl, "\pi"'] \arrow[ddr, "\pi"] & \\
& \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0 \arrow[dr, "\Phi"] & \\
\mathcal{O}_R \arrow[ur, "\Phi'"] \arrow[rr, "\Phi \circ \Phi'"'] & & \mathcal{O}_R
\end{tikzcd}$$

よって

$$\pi = \pi \circ (\Phi \circ \Phi'), \quad \Phi \circ \Phi'(f) = f$$

が成り立つので軌道と π の持つ普遍写像性質により $\Phi \circ \Phi' = 1_{\mathcal{O}_R}$ を得る。この事により Φ' は正則写像 Φ の逆写像であって、かつ正則写像であるから同型を与える。 □

4.2. 特異点解消の構成.

今節では軌道の閉包の特異点解消を与えるのであるが、特異点解消の定義を述べる事から始める。

定義 4.10. 既約な代数多様体 X に対して代数多様体の射 $f : Y \to X$ が X の特異点解消であるとは、次の条件を満たす事を言う。
(1) 射 f は固有射である。
(2) $f|_{Y\backslash f^{-1}(X_{\mathrm{sing}})} : Y\backslash f^{-1}(X_{\mathrm{sing}}) \longrightarrow X\backslash X_{\mathrm{sing}}$ が同型射を与える。
(3) Y は非特異である。
また $f : Y \to X$ が広義の特異点解消であるとは上の (1) (3) と次の (2)$'$ が成立する事を言う。
(2)$'$ 射 f は Y, X の間の双有理射である。

注意 4.11. ここで特異点解消の定義について [29, 定義 3.3.2] を参照した。

軌道の閉包関係を調べるために正則な $\mathbb{G}_k(n)$ 等質ベクトル束

$$E_R = \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{F}_R$$

を定義し、全射正則写像

$$\Phi : E_R = \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V} \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_R}$$

を導入した。この節では $\Phi : E_R \to \overline{\mathcal{O}_R}$ が $\overline{\mathcal{O}_R}$ の特異点解消を与える事を示す。

定理 4.12. 等質ベクトル束 $\mathcal{W}_R : E_R \longrightarrow \mathcal{F}_R$ から軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}_R}$ への射

$$\Phi : E_R \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_R} \qquad \Phi([g, v]) = gv$$

は $\overline{\mathcal{O}_R}$ の広義特異点解消を与える。

証明. 等質ベクトル束 E_R は $\mathbb{G}_k(n)$ 軌道 $\mathcal{O}_R$ を Zariski 開集合として含む。また $\mathbb{G}_k(n)$ は連結な線型代数群であるから既約である。よって E_R は既約である。

等質ベクトル束は非特異であり、定理 4.9 により Φ は開集合 $\mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V}_0$ と $\mathcal{O}_R$ の間の同型射であるので後は Φ が固有射である事を示せば良い。正則写像 i_0 を

$$i_0 : \mathbb{G}_k(n) \times \mathcal{V} \to \mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P} \times \overline{\mathcal{O}_R}, \quad i_0(g, v) = (g\mathbb{P}_R,\ gv)$$

により定めれば次の図式を可換にする正則写像 i が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_k(n) \times \mathcal{V} \arrow[r, "i_0"] \arrow[d] & \mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P}_R \times \overline{\mathcal{O}_R} \\ E_R \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

定義により正則写像 i は図式

$$\begin{tikzcd} E_R \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\Phi"'] & \mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P}_R \times \overline{\mathcal{O}_R} \arrow[d, "p_2"] \\ & \overline{\mathcal{O}_R} \end{tikzcd}$$

を可換にするが正則写像 i の像

$$i(E_R) = \left\{(g\mathbb{P}_R, w) \in \mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P}_R \times \overline{\mathcal{O}_R} \;\middle|\; g^{-1}w \in \mathcal{V}\right\}$$

は $\mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P} \times \overline{\mathcal{O}_R}$ における閉部分多様体である。正則写像 i が閉移入を与える事を示そう。

$$i([g,v]) = i([g',v']) \text{ とすると } \quad g^{-1}g' \in \mathbb{P}_R,\ g'^{-1}gv = v' \text{ である。}$$

このとき

$$[g,v] = [g(g^{-1}g'), (g'^{-1}g)v] = [g', v']$$

が成り立つので、正則写像 i は単射である。

主ファイバー束 $\mathbb{G}_k(n) \longrightarrow \mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P}_R$ は $\mathbb{G}_k(n)$ の Bruhat 分解により代数多様体の圏でも局所断面を持つ ([18, Part II 1.10(5)] 参照)。よって開集合 $U \subset \mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P}_R$ 上の断面 $s : U \longrightarrow \mathbb{G}_k(n)$ をとれば

$$U \times \overline{\mathcal{O}_R} \longrightarrow \mathbb{G}_k(n) \times_{\mathbb{P}_R} \mathcal{V} \quad (g\mathbb{P}_R, w) \mapsto [s(g\mathbb{P}_R), s(g\mathbb{P}_R)^{-1}w]$$

により定まる正則写像は i の局所的な逆を与える。よって i は閉移入である。旗多様体 $\mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P}_R$ が射影的多様体である ([27, Lemma 6.2.2] 参照) ので Φ は射影射である。

$$\begin{tikzcd} E_R \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\Phi"'] & \mathbb{G}_k(n)/\mathbb{P}_R \times \overline{\mathcal{O}_R} \arrow[d, "p_2"] \\ & \overline{\mathcal{O}_R} \end{tikzcd}$$

射影射は固有射である（[14, Theorem 4.9] 参照）から

$$\Phi : E_R \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_R}$$

は軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}_R}$ の広義特異点解消を与える。 □

5. 関連する話題と将来の課題

この節では、関係する話題と将来の課題を紹介する。

5.1. 軌道の位相的性質.

当初、私が考えていた問題は $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ における $G(0)$ 軌道の分類と軌道自身の幾何学的構造の解析であった。その前段階として $\mathfrak{g}_1$ における軌道の分類と幾何学的構造の解析を行なったのであるが、それ以上に進む事ができなかった。

軌道の分類について初等的に考えて、$\mathfrak{g}_1$ 成分を固定し、その固定部分群の $\mathfrak{g}_2$ への作用に関する軌道の分類を試みた。一点の固定部分群を表示する事もできたのだが、それ自身が複雑な表示になってしまい $\mathfrak{g}_2$ への作用を調べる事は困難であった。この様な力技ではなく、より抽象的な代数的性質を利用し階数行列のような不変量を作るなどしなければ分類は行なえないと思われる。例えば

$$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2, \quad (X, Y) \mapsto [X, Y]$$

の様なリーブラケットにより定まる $G(0)$ 同変な写像を利用する事や、ルートに対して次数を乗せ、ルートの空間において議論することなどが考えられる。

また $\mathfrak{g}_1$ の軌道の幾何学的構造についても、等質ファイバー束である事だけでなく、位相的な情報を調べる問題がある。特異コホモロジー環の計算を Serre スペクトル系列を用いて試みたが上手く扱う事はできず未解決のままである。この問題については、Serre スペクトル系列を用いずに特異点解消 E_R における相対コホモロジー $H^*(E_R, \mathcal{O}_R)$ を用いて計算する等が考えられるが結果としては何も得られていない。

5.2. **軌道の函数環.**

軌道の函数環の性質を調べるという問題も考えられる。まず軌道の閉包 $\overline{\mathcal{O}}$ の函数環について知られていることを紹介しよう。特別な場合、$k=1$ である場合は軌道の閉包は行列式多様体であった。この場合については可換環上で定義された行列式多様体に対して正規性や Cohen-Macauley 性などの性質について [9] が詳しく扱っている。また

$$V_{k+1} \xrightarrow{A_k} V_k \xrightarrow{A_{k-1}} \cdots \xrightarrow{A_2} V_2 \xrightarrow{A_1} V_1$$

が複体となるような A の軌道の閉包は、特別に **Buchsbaum-Eisenbud** 多様体と呼ばれる。行列式多様体と同様に一般には各 V_i をベクトル空間ではなく可換環 R 上の階数有限な自由加群として定義する。De Concini と Strickland[11] により R が Cohen-Macauley 環ならば、Buchsbaum-Eisenbud 多様体は Cohen-Macauley であり、複体 A で次を満たすものを通る軌道の閉包については R が正規環ならば正規である事が知られている。

$$\mathrm{rank} A_i + \mathrm{rank} A_{i+1} \leq n_i.$$

軌道の函数環における $\mathbb{G}_k$ の表現について既約分解の問題が考えられる。この問題に対してまず、軌道の閉包の函数環を計算する事から考え始めた。その為に軌道の閉包に対して特異点解消の構成を考えたのであるが、特異点解消の函数環における既約分解でさえ、結果を得る事は困難であった。

特異点解消は旗多様体 $\mathbb{G}_k/\mathbb{P}$ 上のベクトル束

$$E_R = \mathbb{G}_k \times_{\mathbb{P}} \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{G}_k/\mathbb{P}$$

であるので、旗多様体上の対応する局所自由層 $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ に係数を持つ層係数のコホモロジーは自然に $\mathbb{G}_k$ 加群となる。特に 0 次のコホモロジーは誘導表現として表される ([18, §1 3.3] 参照)。

$$H^0(\mathbb{G}_k/\mathbb{P}, \mathcal{L}(\mathcal{V})) = \mathrm{ind}_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}_k} \mathcal{V}.$$

このとき、特異点解消の函数環 $\mathbb{C}[E_R]$ に対して次数付き $\mathbb{G}_k$ 加群としての同型

$$\mathbb{C}[E_R] \simeq \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathbb{G}_k/\mathbb{P}, \mathcal{L}(S^n(\mathcal{V})))$$

が成り立つ事が知られている ([19, 8.11] 参照)。この同型を介して $\mathbb{C}[E_R]$ における既約分解を試みた。$\mathbb{C}[E_R]$ の各斉次成分は放物型部分群からの誘導表現であるので Bott-Borel-Weil の定理を用いる事が考えられる。しかし、放物型部分群のファイバーにおける表現が一般に完全可約でないので単純に Bott-Borel-Weil の定理を使う事はできない。ファイバー $\mathcal{V}$ の $\mathbb{P}$ 部分加群 $\mathcal{V}'$ であって $\mathcal{V}/\mathcal{V}'$ と $\mathcal{V}'$ が完全可約になるものをとり、次の短完全列を考える。

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V}') \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{V}/\mathcal{V}') \longrightarrow 0$$

この短完全列がコホモロジーに誘導する長完全列を用いる事で $H^0(\mathbb{G}_k/\mathbb{P}, \mathcal{L}(\mathcal{V}))$ の $\mathbb{G}_k$ 加群としての既約分解は計算できるのだが、この手法は $\mathcal{V}'$ の存在や既約分解など $\mathcal{V}$ での $\mathbb{P}$ の表現がある程度解っている事が前提となっている。高次になればなるほど、表現の対称テンソル積 $S^n(\mathcal{V})$ における既約分解の困難さから計算を行なう事は殆んど不可能と思われる。

5.3. **概均質ベクトル空間との関係.**

整数により次数付けられた半単純リー環 $\mathfrak{g}$ において次数 1 の部分空間 $\mathfrak{g}_1$ の元は全て巾零元であった。ここで Vinberg の定理 (定理 1.8) により $\mathfrak{g}_1$ における $G(0)$ 軌道は有限個しかない。よって $\mathfrak{g}_1$ において開集合となる軌道が存在し $G(0)$ の表現空間として $\mathfrak{g}_1$ は概均質ベクトル空間となる。

古典型の単純リー環から定まるこのタイプの概均質ベクトル空間については [17] において $G(0)$ 加群としての構造が与えられている。[17] ではさらに、基本相対不変式を与えている。

また、Gabriel[12] により A 型と D 型、E_6 型、E_7 型、E_8 型の箙については分解できない表現の同値類が有限個しかないことが知られている。ここで箙の表現が分解できないとは次元が 0 でない表現の直和にわかれないことを言う。このことにより次元を固定したこれらの箙の表現の同値類は有限個である。よってこれらの箙の次元を固定した表現の全体は概均質ベクトル空間を与える。この定理については [13] を参照することもできる。

箙の表現の観点から Abeasis によって基本相対不変式が計算されている ([1],[2],[3])。[1] は単一方向に向きをつけた A 型箙について、[2] は単一方向に向きをつけた D 型箙について、そして [3] においては一般の向きをつけた A 型箙について次元を固定した表現全体のなす概均質ベクトル空間に対して基本相対不変式を与えている。単一方向に向きをつけた A 型箙についての結果は、次数付きリー環の観点から得られている結果 [17] と一致している。

概均質ベクトル空間において開軌道の補集合を特異集合と呼ぶが、特異集合の余次元 1 の既約成分の定義式が基本相対不変式と対応する ([21, Theorem 2.9] 参照)。Abeasis はこの観点から、余次元 1 の軌道と対応づけることによって基本相対不変式を計算している。余次元が 1 でない軌道の閉包に対して定義イデアルを相対不変式の一般化と考えられるので相対不変式の性質を抽出することで軌道の分類や幾何学的な構造を調べることができると考えられる。

References

[1] S. Abeasis. On the ring of semi-invariants of the representations of an equioriented quiver of type A_n. *Boll. Un. Mat. Ital. A (6)*, 1(2):233–240, 1982.

[2] S. Abeasis. Codimension 1 orbits and semi-invariants for the representations of an equioriented graph of type D_n. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 286(1):91–123, 1984.

[3] S. Abeasis. Codimension 1 orbits and semi-invariants for the representations of an oriented graph of type $\mathcal{A}_n$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 282(2):463–485, 1984.

[4] S. Abeasis and A. Del Fra. Degenerations for the representations of an equioriented quiver of type A_m. *Boll. Un. Mat. Ital. Suppl.*, (2):157–171, 1980.

[5] S. Abeasis and A. Del Fra. Degenerations for the representations of an equioriented quiver of type D_m. *Adv. in Math.*, 52(2):81–172, 1984.

[6] S. Abeasis and A. Del Fra. Degenerations for the representations of a quiver of type $\mathcal{A}_m$. *J. Algebra*, 93(2):376–412, 1985.

[7] S. Abeasis, A. Del Fra, and H. Kraft. The geometry of representations of A_m. *Math. Ann.*, 256(3):401–418, 1981.

[8] Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras. Chapters 1–3.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1989. Translated from the French, Reprint of the 1975 edition.

[9] Winfried Bruns and Udo Vetter. *Determinantal rings*, volume 45 of Monografías de Matemática [Mathematical Monographs]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1988.

[10] David H. Collingwood and William M. McGovern. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras.* Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993.

[11] Corrado De Concini and Elisabetta Strickland. On the variety of complexes. *Adv. in Math.*, 41(1):57–77, 1981.

[12] Peter Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen. I. *Manuscripta Math.*, 6:71–103; correction, ibid. 6 (1972), 309, 1972.

[13] Pierre Gabriel. Représentations indécomposables. In *Séminaire Bourbaki, 26e année (1973/1974), Exp. No. 444*, pages 143–169. Lecture Notes in Math., Vol. 431. Springer, Berlin, 1975.

[14] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[15] Wim H. Hesselink. Cohomology and the resolution of the nilpotent variety. *Math. Ann.*, 223(3):249–252, 1976.

[16] Wim H. Hesselink. Desingularizations of orbits of concentrators. In *Young tableaux and Schur functors in algebra and geometry (Toruń, 1980)*, volume 87 of *Astérisque*, pages 97–108. Soc. Math. France, Paris, 1981.

[17] Steven Glenn Jackson and Alfred G. Noël. Prehomogeneous spaces associated with complex nilpotent orbits. *J. Algebra*, 289(2):515–557, 2005.

[18] Jens Carsten Jantzen. *Representations of algebraic groups*, volume 131 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1987.

[19] Jens Carsten Jantzen and Karl-Hermann Neeb. *Lie theory*, volume 228 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004. Lie algebras and representations, Edited by Jean-Philippe Anker and Bent Orsted.

[20] Noriaki Kawanaka. Orbits and stabilizers of nilpotent elements of a graded semisimple Lie algebra. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34(3):573–597, 1987.

[21] Tatsuo Kimura. *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, volume 215 of *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. Translated from the 1998 Japanese original by Makoto Nagura and Tsuyoshi Niitani and revised by the author.

[22] Anthony W. Knapp. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 2002.

[23] Hanspeter Kraft and Nolan R. Wallach. On the nullcone of representations of reductive groups. *Pacific J. Math.*, 224(1):119–139, 2006.

[24] Kyo Nishiyama. Resolution of null fiber and conormal bundles on the Lagrangian Grassmannian. *preprint,* arXiv:math/0701764v2[math.RT], 2007.

[25] V. L. Popov and È. B. Vinberg. Invariant theory. In Algebraic geometry, 4 (Russian), Itogi Nauki i Tekhniki, pages 137–314, 315. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1989.

[26] Jean-Pierre Serre. Espaces fibrés algébriques. In Séminaire C Chevalley E.N.S., 1958*, Anneaux de Chow et applications*, pages Exp. No. 1, 1–01–1–37. Secr.math.11 rue Pierre Curie,Paris 5e, 1958.

[27] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*, volume 9 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.

[28] È. B. Vinberg. The Weyl group of a graded Lie algebra. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 40(3):488–526, 709, 1976.
[29] 石井志保子. **特異点入門**. シュプリンガー現代数学シリーズ. シュプリンガー・フェアラーク東京, 1997.
[30] 小林俊行 大島利雄. **リー群と表現論**. 岩波書店, 2005.