行列式多様体と冪零多様体

京都大学　総合人間学部　基礎科学科
数理と情報専攻

松田一秀

平成 15 年 1 月 31 日

Abstract. 本論文では、有限個の多項式の共通零点集合として定義される代数多様体を扱う。その中でも、特に行列式の共通零点集合で定義される行列式多様体と、冪零行列の全体として定義される冪零多様体を取り上げる。両多様体の特異点集合、secant variety、dual variety について述べる。secant variety は相異なる 2 点を結ぶ直線上の点を集めて得られる代数多様体であり、dual variety は滑らかな点における接空間を含む超平面を集めて得られる代数多様体である。

行列式多様体については、特異点集合、secant variety、dual variety のいずれをとっても、再び行列式多様体になることが結論される。このことによって、1 つの行列式多様体から始まって、特異点集合や secant variety、dual variety を取ることで行列式多様体の間を自由に移動できるのである。また、secant variety に関する不足指数と行列方程式の解空間との関係についても述べる。

冪零多様体については、特異点集合、secant variety、dual variety を求めたが、行列式多様体の場合とは異なり、それらが再び冪零多様体になるわけではない。例えば、特異点集合は冪零多様体と行列式多様体の共通部分となり、secant variety は超平面になる。特に、特異点集合の列を求めるのは時間の余裕もなく、難しかった。冪零多様体の特異点集合についてはもう少し深く考察する必要があるが、これは将来の課題としたい。

Contents

導入

XY 平面において、円は方程式 $X^2+Y^2=1$ を満たす点の集合として、放物線は $Y=X^2$ として定義される。これらの方程式はそれぞれ、 $X^2+Y^2-1=0$、 $Y-X^2=0$ と考えられる。すなわち、円や放物線はある多項式の零点集合とみなすことができるのである。もっと一般に有限個の多項式を考えてそれらの共通零点のなす図形を考えよう。代数多様体とは、このような有限個の多項式の共通零点集合として定義された図形のことである。代数多様体は、高次の連立方程式系の解集合と考えても良い。連立一次方程式系の解集合は一般にはアフィン空間 (ユークリッド空間を平行移動したもの) であるが、代数多様体は一般には曲線や曲面のように湾曲した空間を表している。

$m\times n$ 行列の全体 $M_{m,n}(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^{mn}$ と同一視できるので、行列空間 $M_{m,n}(\mathbb{C})$ の部分集合のなかには、有限個の多項式の零点集合として定義されるものがあり、本論文ではそのようなものとして、行列式多様体、冪零多様体を扱う。行列式多様体 V^k とは、行列の階数がある数 k 以下のものの全体であり、それを定義する多項式系として $(k+1)$ 次の小行列式全体が取れる。つまり

$$\begin{aligned} V^k &= \{A\in M_{m,n}(\mathbb{C}) \mid \operatorname{rank} A\le k\} \\ &= \{A\in M_{m,n}(\mathbb{C}) \mid \Delta_k(A)=0, \Delta_k \text{ は } (k+1) \text{ 次小行列式の全体}\} \end{aligned}$$

一方、冪零多様体は正方行列の中で何乗かすると零行列になるようなものの全体である。冪零多様体を定義する多項式については、論文の中で詳しく記す。もっとも行列の冪乗の各成分は明らかに多項式であるから、これらを零とおけば、冪零行列が多項式の零点になっていること自体はほぼ明らかだろう。

行列式多様体や冪零多様体の研究を開始するにあたって、まず代数多様体の基本的な性質を求めることにした。具体的には、最も重要な不変量である次元、そして、特異点の決定である。次元の計算に際しては、各点における接空間の次元を求めねばならない。しかし、本論文では行列の基本変形や Jordan 標準形を利用して、一部の特別な行列での接空間の次元を求めれば十分であることを示す。これらは群の作用する代数多様体を考えることがいかに重要であるかを示す例となっている。

連立一次方程式の解空間の場合、次元は解の自由度を与えていることからわかるように、代数多様体にとって次元は重要な意味を持っている。一方、可微分多様体においては次元は定義の段階から与えられていることも多く、特異点も通常扱われない。その意味で、代数多様体の研究は可微分多様体のそれとはかなり様子が違っていることに注意しておきたい。

次元や特異点といった基本的な計算の後、代数多様体から派生して得られる secant variety や dual variety を扱う。

secant variety は代数多様体 X の相異なる 2 点を結んで得られる直線上の点を集めて得られる代数多様体である。射影多様体 $X\subset\mathbb{P}^n$ の secant variety を $S(X)\subset\mathbb{P}^n$ と書こう。ただし $\mathbb{P}^n$ は n 次元の射影空間を表す。もし $S(X)$ が $\mathbb{P}^n$ 全体と一致しないならば、$S(X)$ 以外の点 $a\notin S(X)$ からの射影によって、 X を次元が 1 つ小さい射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ に埋め込めると考えられる。実際、a と X 上の点 $x\in X$ を直線で結んでも、その直線は

x 以外の X の点とは交わらないからである。すなわち、射影は X に制限して考えると、一対一であることがわかる。

X の dual variety $X^\vee$ は代数多様体の滑らかな点上の接空間を含む超平面を $\mathbb{P}^n$ の双対空間 $\mathbb{P}^{*n}$ の点とみなし、これをすべて集めて得られる代数多様体である。この多様体は X 上の divisor を考える際に基本的な役割を果たすが、著者の非力によりそれをこの論文で紹介することはここではできない。secant variety と dual variety がともに代数多様体となることや、その既約性については論文の中で示す。

行列式多様体や冪零多様体の次元や特異点、 secant variety や dual variety を求めてみたわけだが、両多様体の secant variety を求めるうちに、 secant variety と代数多様体を含む線形空間の関係に関心を持った。冪零多様体の secant variety を求めたら、$\operatorname{trace} X = 0$ で定義される超平面になることが解かった。そこで、最初は、代数多様体の secant variety はその代数多様体を含む最小の線形空間に他ならないと考えた。ところが、次に rational normal curve の secant variety を考えると、それは線形空間にならないということが解かってきた。そこで最初の予想を修正する必要に迫られた。代数多様体 X の secant variety $S(X)$ に対して再び secant variety $S^2(X) = S(S(X))$ を取る。この作業を繰り返すうちに、代数多様体 X を含む最小の線形空間が得られることを本論文の中で証明する。なおこの事実については既にある本に書かれており、それを知ってがっかりした。

本論文の構成について述べる。

第一章で、次元や特異点などの代数多様体の基本的な諸概念について述べる。次元や特異点の定義だけでなく、代数多様体の包含関係と次元との関係や、滑らかな点の全体や特異点の全体がそれぞれどのような集合になるのかについて述べる。

第二、三章で、 secant variety や dual variety のような代数多様体から派生して得られる代数多様体について述べる。既約性や次元の点から secant variety や dual variety ともとの代数多様体との関係について述べる。

第四、五章で、それぞれ代数多様体の具体例として行列式多様体、冪零多様体を取り上げる。それぞれの次元や特異点、 secant variety や dual variety について述べる。行列式多様体については、特異点集合も secant variety も dual variety もまた行列式多様体になることが解る。また、secant variety の議論を通じて、行列式多様体を含む最小の線型空間が $(mn-1)$ 次元射影空間 $\mathbb{P}^{mn-1}$ になることが示される。冪零多様体については、secant variety は $\operatorname{trace} X = 0$ で定義される超平面になることや dual variety が冪零多様体と単位行列が生成する錐の和になることなどを示す。

1. アフィン多様体および射影多様体

1.1. **代数多様体の定義.** **アフィン多様体**は n 次元複素空間 $\mathbb{C}^n$ の中で複素数 $\mathbb{C}$ に係数を持つ有限個の多項式の零点集合として定義される。またそれに同型なものもアフィン多様体と呼ぶ。アフィン多様体を X と書くことにすると、次のように書ける。

$$X \simeq \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = 0, \ldots, f_k(x) = 0\} = V(f_1, \ldots, f_k)$$

$$\text{但し、} f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

アフィン多様体には Zariski 位相を入れておく。

射影多様体もまた同様に n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ の中で有限個の**斉次**多項式の零点集合として定義される。また、それに同型なものも射影多様体と呼ぶ。[S, §1.5.2] や [M, §2C] より射影多様体の場合は、アフィン多様体の場合と異なり、斉次多項式の零点集合の正則な写像による像は斉次多項式の零点集合となることが解かる。すなわち、$X \subset \mathbb{P}^n$ を斉次多項式の共通零点集合とし、X に Zariski 位相を入れ、$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^m$ を正則写像とすると、f は閉写像で、$f(X)$ は斉次多項式の共通零点集合となる。同じ記号ながら、射影多様体を X と書くことにすると、次のように表せる。

$$X = \{x = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid F_1(x) = 0, \ldots, F_l(x) = 0\} = V(F_1, \ldots, F_l)$$

$$\text{但し、} F_1, \ldots, F_l \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_n] : \text{斉次}$$

射影多様体 X, Y について次の命題が成り立つ。

命題 1.1. X は既約とし、$\varphi : X \longrightarrow Y$ を支配的な正則写像であるとする。すると Y は既約である。

証明. Y を次のように既約分解できたとする。

$$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k$$

すると、逆像を取ることにより

$$X = \varphi^{-1}(Y_1) \cup \cdots \cup \varphi^{-1}(Y_k)$$

となり、X の既約性から $X = \varphi^{-1}(Y_1)$ とできる。したがって、

$$Y = \overline{\varphi(X)} \subset Y_1, \quad \therefore Y = Y_1$$

となり、Y の既約性が言えた。 □

例 1.2. アフィン多様体の例 (rational normal curve in $\mathbb{C}^n$):

$$X = \{(t, t^2, \ldots, t^n) \mid t \in \mathbb{C}\} = V(X_2 - X_1^2, X_3 - X_1^3, \ldots, X_n - X_1^n)$$

この曲線が rational と呼ばれるのは、各変数が t の有理式で表されるからである。

射影多様体の例 (rational normal curve in $\mathbb{P}^n$):

$$\overline{X} = V(X_0X_2 - X_1^2, X_0^2X_3 - X_1^3, \ldots, X_0^{n-1}X_n - X_1^n) = \varphi(\mathbb{P}^1)$$
$$(\text{ 但し、} \varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n \quad \varphi[X_0 : X_1] = [X_0^n : X_0^{n-1}X_1 : \cdots : X_1^n])$$

$\mathbb{P}^n$ で考えた rational normal curve $\overline{X}$ は $\mathbb{C}^n$ における rational normal curve $X(\simeq \overline{X} \cap \{X_0 \neq 0\})$ に無限遠点として、$(0 : \cdots : 0 : 1)$ を付け加えて完備化したものと考えられる。

例 1.3. $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ とすると、$X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mid yf(x) = 1\}$ と $Y = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) \neq 0\}$ は互いに同型に移りあう。実際、同型写像として、$X \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^n$ への射影を取れば良い。ゆえに、ともにアフィン多様体である。

アフィン多様体 $X \subset \mathbb{C}^n$ に対して、定義イデアル $I(X)$ を定義する。

$$I(X) = \{f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \mid f(a) = 0 \quad \forall a \in X\}$$

射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ に対しても同様に定義イデアル $I(X)$ を定義する。

$$I(X) = \{F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \dots, X_n] \mid F(a) = 0 \quad \forall a \in X\}$$

但し、ここで a は斉次座標として考える。

1.2. **接空間.** アフィン多様体 X の点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ における**接空間** $T_{x,X}$ を次のように定義する。

$$T_{x,X} = \{\xi \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)(\xi_i - x_i) = 0 \quad \forall f \in I(X)\}$$

同様に射影多様体 X の $x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ における接空間 $T_{x,X}$ を定義する。

$$T_{x,X} = \{\xi \in \mathbb{P}^n \mid \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)\xi_i = 0 \quad \forall f \in I(X)\}$$

X の接空間は X の局所的な性質から決まるのだが (局所環を定義してそれを用いる)、そのような局所的な性質を用いた接空間の定義については、 [S, §2.1.3] を参照されたい。

1.3. **次元.** アフィン多様体、あるいは射影多様体 X の関数体を定義するにあたって、 X の既約性を仮定しておく。

アフィン多様体 X の**座標環** $\mathbb{C}[X]$ を剰余環 $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I(X)$ として定義する。すなわち、

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I(X)$$

である。 X の既約性と、Hilbert の零点定理 [M, §1A] より、$\mathbb{C}[X]$ は整域となる。 $\mathbb{C}[X]$ の商体として、アフィン多様体 X の**関数体**を定義し、 $\mathbb{C}(X)$ と書く。 $\mathbb{C}(X)$ の $\mathbb{C}$ 上の超越次数をアフィン多様体 X の**次元**と呼び、$\dim X$ で表す。すなわち、

$$\dim X = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}(X)$$

アフィン多様体が可約な場合は、各既約成分の次元の中の最大値として定義する。

射影多様体 X の定義をする前に以下のような可換環 $\mathcal{O}_X$ とその極大イデアル $\mathcal{M}_X$ を定義する。

$$\mathcal{O}_X = \{\frac{Q(X_0, \dots, X_n)}{P(X_0, \dots, X_n)} \mid \deg P = \deg Q \quad P, Q : \text{斉次} \quad P \notin I(X)\}$$

$$\mathcal{M}_X = \{\frac{Q}{P} \in \mathcal{O}_X \mid Q(X_0, \dots, X_n) \in I(X)\}$$

$\mathcal{O}_X$ の $\mathcal{M}_X$ による剰余環として、射影多様体の関数体 $\mathbb{C}(X)$ を定義する。射影多様体 X の次元は、アフィン多様体と同じように定義される。すなわち、

$$\dim X = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}(X)$$

アフィン多様体と同様に、可約な場合は、各既約成分の次元の中の最大値として次元を定義する。

次元について次の定理が成立する。

定理 1.4. X, Y を既約な射影多様体とし、$Y \subseteq X$ とする。 $\dim X = \dim Y$ ならば、$X = Y$ である。

証明. 証明は [M, §1A] , [S, §1.6.1] を参照されたい。 □

この定理は、既約なアフィン閉集合 X, Y に対しても成り立つ。証明は、完備化して射影多様体に帰着すればよい。

命題 1.5. X, Y は既約な局所閉集合とし、$\varphi : X \longrightarrow Y$ は正則で全単射であるとする。局所閉集合について、その次元は Zariski 閉包によって定義するものとする。すると、X と Y の次元は等しくなる。

証明. [M, §3A] より、φ が smooth になる X 上の点 x が存在する。また、[M, §3A] より、そのような x について、 $\varphi^{-1}\varphi(x)$ の x を含む既約成分の次元は $\dim X - \dim Y$ に等しい。ところで、φ は全単射なので、$\varphi^{-1}\varphi(x) = \{x\}$ である。故に、

$$\dim X - \dim Y = \dim\{x\} = 0$$

となり、$\dim X = \dim Y$ が言えた。 □

1.4. **滑らかな点および特異点.** この節では、 X はアフィン多様体あるいは射影多様体を表すものとする。 X が可約な場合も考えて次の記号を導入する。 $x \in X$ とする。

$$\dim_x X := \max\{\dim X' \mid X' \text{ は } x \text{ を含む } X \text{ の既約成分 }\}$$

$x \in X$ が X の**滑らかな点**、あるいは**特異点**であるとは、次の式が成り立つことである。

$$x \in X \text{ が滑らかな点 } \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \dim T_{x,X} = \dim_x X$$

$$x \in X \text{ が特異点 } \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \dim T_{x,X} > \dim_x X$$

(但し、$\dim T_{x,X}$ は、$T_{x,X}$ の線形空間としての次元である。)

滑らかな点、特異点についてはそれぞれ次の事実が成立する。

定理 1.6. X の滑らかな点の全体は、空でない Zariski 開集合となる。

定理 1.7. X の特異点の全体、$\mathrm{Sing}(X)$ は、真の Zariski 閉集合となる。

定理 1.6, 1.7 の説明. 射影多様体 X の滑らかさ・特異性、Zariski 開集合・閉集合性は局所的なものであり、各点 $x \in X$ にアフィン多様体と同型な近傍が取れるので、 2 つの定理の証明はアフィン多様体に限っても良い。既約なアフィン多様体における定理 1.6, 1.7 の証明は、[M, §1A] を参照されたい。可約な場合は、 [S, §2.2.2] を参照されたい。 □

2. Secant Variety

2.1. **定義と次元.** X を射影多様体とし、 X の **secant variety** $S(X)$ を定義する。 $S(X)$ は X の 相異なる 2 点を結んで得られる直線上の点の全体の Zariski 閉包として定義される。厳密には次のように定義する。但し、 $x, y \in X, x \neq y$ に対して、 $\langle x, y \rangle$ は x, y を通る $\mathbb{P}^n$ 内の直線を表すものとする。

$$\begin{array}{ccc} & X \times X \times \mathbb{P}^n & \\ & \cup & \\ \mathfrak{S}(X) = & \overline{\{(x,y,z) \mid x, y \in X, x \neq y, z \in \langle x, y \rangle\}} & \\ & p \swarrow \qquad\qquad \searrow q & \\ X \times X & & S(X) := q(\mathfrak{S}(X)) \end{array}$$

ここで p, q はそれぞれ $\mathfrak{S}(X)$ から $X \times X, \mathbb{P}^n$ への射影である。 [S, §1.5.2], [M, §2C] より p, q は閉写像であるから、 $S(X)$ は $\mathbb{P}^n$ の閉集合で、射影多様体となり、また、 p は全射な閉写像になることに注意しておく。$S(X)$ の次元について次のことが言える。

定理 2.1. X を既約な射影多様体とすると、

$$\dim \mathfrak{S}(X) = 2\dim X + 1, \qquad \dim S(X) \leq 2\dim X + 1$$

が成り立つ。

証明. $\varphi := p\big|_{\mathfrak{S}(X)}$ (p の $\mathfrak{S}(X)$ への制限) とする。[M, §3A] により、ある Zariski 開集合 $U \subset X \times X$ が存在して、

$$\dim \varphi^{-1}(x,y) = \dim \mathfrak{S}(X) - \dim X \times X \qquad \forall (x,y) \in U \tag{2.1}$$

[S, §1,3,1] や [M, §2B] から既約な X の直積からなる射影多様体 $X \times X$ は既約である。Δ を $X \times X$ の対角集合とする。すると、 $\Delta \subset X \times X$ は 真の Zariski 閉部分集合となり、$U \cap (X \times X \setminus \Delta) \neq \emptyset$ となることがわかる。したがって、任意に $(x_0, y_0) \in U \cap (X \times X \setminus \Delta)$ を選べば、

$$\varphi^{-1}(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0, z) \mid z \in \langle x_0, y_0 \rangle\} \simeq \mathbb{P}^1 \tag{2.2}$$

故に、

$$\dim \varphi^{-1}(x_0, y_0) = 1 \tag{2.3}$$

したがって、(2.1) – (2.3) より

$$\dim \mathfrak{S}(X) = 2\dim X + 1 \tag{2.4}$$

正則写像 $p : \mathfrak{S}(X) \longrightarrow S(X)$ は $S(X)$ の定義より全射なので、

$$\dim S(X) \leq \dim \mathfrak{S}(X) = 2\dim X + 1 \tag{2.5}$$

である。 □

定理 2.2. 射影多様体 X が既約ならば、 $\mathfrak{S}(X)$ は既約である。したがって、$S(X)$ もまた既約になる。

証明. $\mathfrak{S}(X)$ が次のように既約分解できたとする。

$$\mathfrak{S}(X) = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$$

左右両辺の集合を射影 p で移すと、

$$X \times X = p(\mathfrak{S}(X)) = p(S_1) \cup p(S_2) \cup \cdots \cup p(S_k)$$

X の既約性より $X \times X$ は既約である。さらに [S, §1,5,2], [M, §2C] より、p が閉写像であるので、適当に順番を入れ替えて $X \times X = p(S_1)$ としてよい。さらに定理 2.1 より、$\dim S_1 = 2\dim X + 1$ となるようにとることができる。このとき $x, y \in X, x \neq y, z \in \langle x, y\rangle$ ならば、 $(x, y, z) \in S_1$ であることを証明しよう。$p_1 := p\big|_{S_1}$ と書く。 $X \times X$ と S_1 の既約性、さらに

$$X \times X = p(S_1), \quad \dim X \times X = 2\dim X, \quad \dim S_1 = 2\dim X + 1$$

であることから、$p_1^{-1}(x, y) \subset p^{-1}(x, y) \simeq \mathbb{P}^1$ を考慮すれば

$$1 = \dim S_1 - \dim X \times X \leq \dim p_1^{-1}(x, y) \leq \dim p^{-1}(x, y) = 1$$

がわかる。 したがって定理 1.4 より、 $p_1^{-1}(x, y) = p^{-1}(x, y)$ となる。そこで

$$\mathcal{C}(X) := \{(x, y, z) \mid x, y \in X, x \neq y, z \in \langle x, y\rangle\}$$

とすると、明らかに $\overline{\mathcal{C}(X)} \subset S_1$ が成り立つ。

$$S_1 \subset \mathfrak{S}(X) = \overline{\mathcal{C}(X)} \subset S_1$$

よって $\mathfrak{S}(X) = S_1$ となり、 $\mathfrak{S}(X)$ の既約性が示された。正則写像 $q : \mathfrak{S}(X) \longrightarrow S(X)$ が全射であることと、命題 1.1 より $S(X)$ の既約性も示された。 □

2.2. **射影多様体とそれを含む最小の線形空間.** この節では、射影多様体 X を含む最小の線形空間が secant variety を使って記述できることを示そう。まず、次の補題を準備しておく。

補題 2.3. ア) 既約な射影多様体 X について、 X が線形空間になることと $S(X) = X$ は同値である。
イ) 射影多様体 X, Y について、 Y が既約で $Y \subset X$ ならば、 $S(Y) \subset S(X)$ となる。

ア), イ) より、 X を含む線形空間 H について、 $S(X) \subset H$ が言える。

証明. ア) [$\Rightarrow$ の証明] $X \subset S(X)$ は $S(X)$ の定義より明らかである。p を $\mathfrak{S}(X)$ から $X \times X$ への射影、$\Delta(X)$ を $X \times X$ の対角集合とする (これは閉集合である)。$S_0 = p^{-1}(X \times X \setminus \Delta(X))$ とおくと S_0 は開だから constructible である。q を $\mathfrak{S}(X)$ から $S(X)$ への射影とすると、 [M, §2C] より、 constructible な集合の正則写像による像もまた constructible なので、

$$q(S_0) = \cup_{i=1}^k A_i \cap B_i$$

と表せる。ここで、 A_i は Zariski 開集合で、 B_i は Zariski 閉集合である。$\mathfrak{S}(X)$ の既約性と、q が全射であることにより、ある B_i が存在して、 $B_i = S(X)$ とできる。実際、

もしそのような B_i が存在しないとすると、 $S_0 \subset \mathfrak{S}(X)$ が稠密であることと q の全射性から

$$S(X) = \overline{q(S_0)} = \cup_{i=1}^k B_i$$

とできる。仮定より、左辺の次元は右辺の次元より真に大きく矛盾が生じる。したがって $q(S_0) \supset A_i \cap B_i = A_i$ となり、$q(S_0)$ は開集合 A_i を含む。$S(X)$ は既約だから、これは稠密である。

その稠密な開集合から任意に $z \in S(X)$ を取る。すると、ある $x, y \in X$ $(x \neq y), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が存在して、 $z = \alpha x + \beta y$ となる。 X は線形空間なので、 $z = \alpha x + \beta y \in X$ となる。したがって、$S(X) \subset X$ が言えた。 よって $X = S(X)$ である。

[$\Leftarrow$ の証明] 任意に $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を選ぶと、 $X = S(X)$ より、 $\alpha x + \beta y \in S(X) = X$. したがって、 X は線形空間である。

イ) $S(Y)$ の稠密な開集合を ア) の証明と同様に取る。その稠密な開集合から任意に $z \in S(Y)$ を選ぶ。ある $x, y \in Y$ $(x \neq y), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が存在して、 $z = \alpha x + \beta y$ となる。$Y \subset X$ より、 $x, y \in X$ だから、 $z \in S(X)$ が示された。故に、$S(Y) \subset S(X)$ となる。 □

$S(X)$ の secant variety を $S^2(X)$ と書き、この操作を k 回繰り返したものを $S^k(X)$ と記す。

定理 2.4. 既約な $X \subset \mathbb{P}^n$ に対して、ある非負の整数 m が存在して、 $S^m(X) = S^{m+1}(X)$ となる。この時、$S^m(X)$ は X を含む最小の線形空間となる。

証明. 次の射影多様体の昇鎖列

$$X \subseteq S(X) \subseteq S^2(X) \subseteq S^3(X) \subseteq \cdots \subseteq S^k(X) \subseteq \cdots$$

が真に拡大を続ければ、定理 1.4 より、次元も真に増加していく。したがって、適当な m に対して、 $S^m(X) = S^{m+1}(X)$ となることが解かる。$S(S^m(X)) = S^m(X)$ と補題 2.3 より、 $S^m(X)$ は線形空間である。

もし X を含む線形空間 H があれば、補題 2.3 より、 $S(X) \subset H$ が成り立つ。これを繰り返せば、 $S^m(X) \subset H$ となる。したがって、 $S^m(X)$ は X を含む最小の線形空間である。 □

3. Dual Variety

$\mathbb{P}^{*n}$ を $\mathbb{P}^n$ の超平面の全体とする。射影多様体 X の **dual variety** $X^\vee$ を次のように定義する。

$$\begin{array}{ccc}
 & X \times \mathbb{P}^{*n} & \\
 & \cup & \\
D(X) = & \overline{\{(x,h) \mid x \in X : \text{ smooth}, T_{x,X} \subset h\}} & \\
\varphi \swarrow & & \searrow \phi \\
X & & X^\vee := \phi(D(X))
\end{array}$$

但し、 φ, ϕ はそれぞれ $X, \mathbb{P}^{*n}$ への射影である。 $X^\vee$ が射影多様体になることは、ϕ が閉写像であることから解かる。 dual variety の次元について次の定理が成立する。

定理 3.1. X が既約ならば、 $\dim X^\vee \leq n-1$.

証明. $\dim X = d$ とする。 $x_0 \in X$ を滑らかな点とする。すると、

$$\varphi^{-1}(x_0) = \{(x_0, h) \mid T_{x,X} \subset h\}. \tag{3.1}$$

x_0 は滑らかなので、$T^{\mathrm{aff}}_{x_0,X}$ の $\mathbb{C}^{n+1}$ の中での次元は $d+1$ である。但し、$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ を自然な射影とするとき、 $T^{\mathrm{aff}}_{x_0,X} = \pi^{-1}(T_{x_0,X}) \cup \{0\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ と書いた。したがって、

$$\dim \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}/T^{\mathrm{aff}}_{x_0,X}) = (n+1) - (d+1) - 1 = n - d - 1$$

よって、 $\dim \varphi^{-1}(x_0) = n - d - 1$ となる。 [M, §3A] より、ある Zariski 開集合 $U \subset X$ が存在して、

$$\dim \varphi^{-1}(x) = \dim D(X) - \dim X \quad \forall x \in U.$$

滑らかな点の全体は空でない Zariski 開集合になること、X の既約性と (3.1) から、

$$n - d - 1 = \dim \varphi^{-1}(x_0) = \dim D(X) - \dim X \tag{3.2}$$

とできる。よって $\dim D(X) = n-1$ となる。さらに、 $X^\vee$ は $D(X)$ の正則な写像による像なので、 $\dim X^\vee \leq \dim D(X) \leq n-1$. □

定理 3.2. X が既約ならば、 $D(X)$ も既約となり、さらに $X^\vee$ も既約である。

証明. $D(X) = D_1 \cup D_2 \cup \cdots D_k$ と既約分解できたとする。すると、

$$X = \varphi(D(X)) = \varphi(D_1) \cup \cdots \cup \varphi(D_k)$$

となり、 X の既約性から、$\varphi(D_1) = X$ とできる。さらに $\dim D_1 = n-1$ となるように選んでおく。実際、$1 \leq i \leq h$ に対して $\varphi(D_i) = X$, $h < i \leq k$ に対して $\varphi(D_i) \subsetneqq X$ とする。さらに $\dim D_i < n-1$ $(1 \leq i \leq h)$ とすると、X の一般の点 x におけるファイバーの次元は、

$$\dim \varphi^{-1}(x) \leq \dim(\cup_{1 \leq i \leq h} D_i) - \dim X < n - 1 - d$$

となり (3.2) に矛盾する。さて、

$$\mathcal{D}(X) = \{(x, h) \mid x \in X : \text{ smooth}, T_{x,X} \subset h\}$$

と置く。 すると $\mathcal{D}(X) \subset D_1$ であることを示そう。x が滑らかな点であったとする。 φ_1 を φ の D_1 への制限とすると、$\varphi^{-1}(x) \supset \varphi_1^{-1}(x)$ であるから、

$$n - 1 - d = \dim D_1 - \dim X \leq \dim \varphi_1^{-1}(x) \leq \dim \varphi^{-1}(x) = n - d - 1$$

なので、 $\dim \varphi^{-1}(x) = \dim \varphi_1^{-1}(x)$、つまり $\varphi^{-1}(x) = \varphi_1^{-1}(x)$ である。よって、

$$D_1 \subset D(X) = \overline{\mathcal{D}(X)} \subset D_1$$

したがって、 $D_1 = D(X)$ となり、 $D(X)$ の既約性が示された。$X^\vee$ の既約性は $D(X)$ の既約性、ϕ の全射性、さらに命題 1.1 より示される。 □

4. 行列式多様体

4.1. 行列式多様体の次元と特異点. 行列からなるアフィン多様体として、次のようなアフィン多様体を定義する。

$$V^r = V^r_{m,n} = \{A \in M_{m,n}(\mathbb{C}) \mid \operatorname{rank} A \leq r\} = V((r+1)\text{ 次小行列式の全体})$$

V^r を射影化したものを $\mathbb{V}^r = \mathbb{P}(V^r)$ と書く。以下既約性、次元、特異点など、 $\mathbb{V}^r$ の基本的な代数幾何学的性質を列挙しよう。

定理 4.1. V^r は既約、したがってその射影化 $\mathbb{V}^r$ も既約である。

証明. $M_n(\mathbb{C})$ は既約である。ゆえに [M, §2B] より、 $M_m(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ もまた既約である。また、 $M_m(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ からアフィン多様体 V^r への正則な全射 φ が次のように定義される。

$$\varphi : M_m(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow V^r, \qquad \varphi(A,B) = AI_rB, \qquad I_r = \begin{pmatrix} 1_r & 0_{r,m-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{pmatrix}$$

したがって、アフィン多様体 V^r は既約になる。 □

以下では、 $m \leq n$ として議論を展開する。これから示される結果に関して、 $n \leq m$ の場合は、 n と m を取り替えて考えればよい。

定理 4.2. $1 \leq k \leq m$ とする。すると $\dim V^k = mn - (m-k)(n-k)$ である。また、滑らかな点の全体は、群 $GL_m(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$ の作用に関して推移的となる。すなわち、

$$\{A \in V^k \mid A \text{ は smooth}\} = \{A \in V^k \mid A \text{ は } I_k \text{ と相似 }\}$$

となる。さらに、特異点集合は $\operatorname{Sing}(V^k) = V^{k-1}$ となる。

証明. 任意に $M \in V^k$ を選ぶ。すると、線形代数の議論から、ある $A \in GL_m(\mathbb{C}), B \in GL_n(\mathbb{C})$ が存在して、次のようになることが分かる。

$$AMB = \begin{pmatrix} 1_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_s \qquad (\text{但し、 } 1 \leq s \leq k\ )$$

したがって、 V^k の任意の元における接空間は、その元の rank を s とすると、 I_s での接空間と線形同型になる。ゆえに、 V^k の各元の接空間の次元を求めるには、 I_s における接空間の次元を求めればよい。I_s における接空間は、V^k の生成元である $(k+1)$ 次小行列式 f の接ベクトル $(\frac{\partial f}{\partial X_{i,j}}(I_s))_{i,j}$ の核なので、その接ベクトルの rank を求める。一般に $(k+1)$ 次行列式の変数 $X_{i,j}$ による偏微分はその余因子になる。 $s < k$ の時、 V^k の定義方程式である、 $(k+1)$ 次小行列式の接ベクトルは 0 ベクトルとなる。$s = k$ の時について考える。そこで、$k+1 \leq i \leq m, \quad k+1 \leq j \leq n$ とし、次のような集合を定義する。

$$I^i = \{1, 2, \ldots, k\} \cup \{i\}$$
$$J^j = \{1, 2, \ldots, k\} \cup \{j\}$$

そして、$\Delta_{ij}(X)=\det(X_{\alpha\beta})_{\alpha\in I^i,\beta\in J^j}$ とする。すると、

$$\left(\frac{\partial\Delta_{ij}}{\partial X_{uv}}(I_k)\right)_{\substack{1\le u\le m\\ 1\le v\le n}}=E_{ij}$$

となる。また、V^k のその他の定義方程式の I_k における接ベクトルは 0 ベクトルになる。ゆえに、 I_k での一次独立な余接ベクトルの数は、 $(m-k)(n-k)$ 個であり、接空間のベクトル空間としての次元は $mn-(m-k)(n-k)$ 次元となる。したがって、$\dim V^k=mn-(m-k)(n-k)$ となる。

以上の議論と、 V^k の既約性から

$$\{A\in V^k \mid A \text{ は smooth}\}=\{A\in V^k \mid A \text{ は } I_k \text{ と相似}\}$$
$$\mathrm{Sing}(V^k)=V^{k-1}$$

も分かる。 □

$\pi: V_k\backslash\{0\}\to\mathbb{V}^k=\mathbb{P}(V^k)$ を自然な射影とするとき、$A\in V^k$ に対して $[A]=\pi(A)\in\mathbb{V}^k$ と書くことにする。

系 4.3. $\dim\mathbb{V}^k=mn-(m-k)(n-k)-1$、滑らかな点の集合は $\{x\in\mathbb{V}^k \mid x \text{ は smooth}\}=\{[A]\in\mathbb{V}^k \mid A \text{ は } I_k \text{ と相似}\}$、特異点集合は $\mathrm{Sing}(\mathbb{V}^k)=\mathbb{V}^{k-1}$ である。

4.2. **行列式多様体の Secant Variety.** 行列式多様体の secant variety について次のことが成り立つ。

定理 4.4. $l=\min\{2k,m,n\}$ とすると、$S(\mathbb{V}^k)=\mathbb{V}^l$ となる。

証明. $2k\le\min\{m,n\}$ の時 (つまり $l=2k$ の時) について考える。任意に $M\in V^l$ を選ぶと、線形代数の議論より、適当な $A\in GL_m(\mathbb{C}),B\in GL_n(\mathbb{C})$ が存在して、 $I_s=AMB$ となる。但し、 $1\le s\le l=2k$ である。 したがって適当な非負の整数 $s_1,s_2\le k$ が存在して、 $I_s=I_{s_1}+I'_{s_2}$ となる。但し、$s=s_1+s_2$ で、I'_{s_2} は次のような行列である。

$$I'_{s_2}=\begin{pmatrix}0_{s_1}&&\\&1_{s_2}&\\&&0\end{pmatrix}\tag{4.1}$$

故に

$$M=A^{-1}I_sB^{-1}=A^{-1}I_{s_1}B^{-1}+A^{-1}I'_{s_2}B^{-1}\tag{4.2}$$

$\mathrm{rank}\,A^{-1}I_{s_1}B^{-1}=s_1,\mathrm{rank}\,A^{-1}I'_{s_2}B^{-1}=s_2$ より $A^{-1}I_{s_1}B^{-1},A^{-1}I'_{s_2}B^{-1}\in\mathbb{V}^k$ がわかる。よって、 $M\in S(X)$ である。

補題 2.3 と同様に稠密な開集合を取り、そこから任意に $M\in S(\mathbb{V}^k)$ を選ぶと、ある $M_1,M_2\in\mathbb{V}^k,M_1\ne M_2,t,u\in\mathbb{C}$ が存在して、$M=tM_1+uM_2$ となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}\,M&=\mathrm{rank}(tM_1+uM_2)\le\mathrm{rank}\,tM_1+\mathrm{rank}\,uM_2\\&\le\mathrm{rank}\,M_1+\mathrm{rank}\,M_2\le k+k=2k\end{aligned}$$

よって、 $M \in \mathbb{V}^l$ となる。故に、$S(\mathbb{V}^k) \subset \mathbb{V}^l$ となる。

$m \le 2k$ の時も同様の議論で、 $S(\mathbb{V}^k) = \mathbb{V}^m = \mathbb{P}^{mn-1}$ が言える。 □

定理 4.4 から、 $\mathbb{V}^k$ を含む最小の線形空間について次の事実が言える。

系 4.5. $\mathbb{V}^k$ を含む最小の線形空間は、 $\mathbb{P}^{mn-1}$ である。

証明. 定理 4.4 より、 $S(\mathbb{V}^k) = \mathbb{V}^l, l = \min\{2k, m\}$ が言える。 k に対して、適当な非負の整数 t が存在して、 $m \le 2^t k$ となる。したがって、 $S^t(\mathbb{V}^k) = \mathbb{P}^{mn-1}$ となる。定理 2.4 より、 $\mathbb{V}^k$ を含む最小の線形空間は $\mathbb{P}^{mn-1}$ である。 □

$\mathbb{V}^k$ の secant variety に関する**不足指数**を

$$\dim \mathfrak{S}(\mathbb{V}^k) - \dim S(\mathbb{V}^k) = 2 \dim \mathbb{V}^k + 1 - \dim \mathbb{V}^l$$

として定義する。この不足指数の応用例を次に紹介する。

命題 4.6. $2k \le \min\{m, n\}$ とし、$z \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ を階数が $2k$ の行列であるとする。すると、

$$Q_z = \{(x, y) \in V^k \times V^k \mid z = x + y\}$$

の次元は $\mathbb{V}^k$ の secant variety に関する不足指数、すなわち、 $2k^2$ と一致する。

証明. p を $\mathfrak{S}(\mathbb{V}^k)$ から $\mathbb{V}^k \times \mathbb{V}^k$ への射影とし、q を $\mathfrak{S}(\mathbb{V}^k)$ から $S(\mathbb{V}^k)$ への射影とする。すると、 $\mathbb{V}^k$ の既約性から、

$$p^{-1}(\mathbb{V}^k \times \mathbb{V}^k \setminus \Delta) \cap q^{-1}(\{2k \text{ 次主行列式} \neq 0\})$$

は空にならない。すなわち、

$$q^{-1}([z]) \cap \{[x] \neq [y]\} = \{([x], [y], [z]) \in \mathbb{V}^k \times \mathbb{V}^k \times \mathbb{P}^{mn-1} \mid [x] \neq [y], [z] \in \langle x, y \rangle\}$$

が空にならないような階数 $2k$ の行列 z が存在する。但し、ここで

$$\{[x] \neq [y]\} = q^{-1}(\mathbb{V}^k \times \mathbb{V}^k \setminus \Delta)$$

と書いた。 この z について定理を証明すれば、他の階数 $2k$ の行列については基本変形を考えればよい。

この z について $Q_z \simeq q^{-1}([z]) \cap \{[x] \neq [y]\}$ を示す。$\operatorname{rank} z = 2k$ なので、$[z] \in \mathbb{V}^{2k} = S(\mathbb{V}^k)$ となる。そこで、次のような写像 ϕ を取る。

$$\phi : Q_z \longrightarrow q^{-1}([z]) \cap \{[x] \neq [y]\} \quad \phi(x, y) = ([x], [y])$$

ϕ の正則性、全射性は明らかである。まず、単射性を示す。$\phi(x, y) = \phi(x', y')$ とする。すると、ある $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が存在して、

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y$$

となる。

$$z = x + y = \alpha x + \beta y \Longrightarrow (1 - \alpha)x + (1 - \beta)y = 0 \tag{4.3}$$

$x, y \in V^k$ かつ、$x + y = z \in V^{2k}$ より、x, y は一次独立なので、 $1 - \alpha = 0,\ 1 - \beta = 0$ である。よって、$x = x', y = y'$ となり、ϕ の単射性が示された。次に ϕ の逆写像が正則であることを示す。$(x, y) = \phi^{-1}([u], [v], [z])$ とする。すると、ある α, β が存在して、

$$z = \alpha u + \beta v, \quad x = \alpha u, \quad y = \beta v$$

が成り立つ。そこで、この α, β が代数的に決まることを示せばよい。ある $1 \leq i, j \leq n$ が存在して、

$$\begin{cases} z_i &= \alpha u_i + \beta v_i \\ z_j &= \alpha u_j + \beta v_j \end{cases} \qquad \det \begin{pmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{pmatrix} \neq 0$$

となる。したがって、

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_i \\ z_j \end{pmatrix}$$

となる。ゆえに、$Q_z \simeq q^{-1}([z]) \cap \{[x] \neq [y]\}$ が示され、さらに、

$$\dim Q_z = \dim q^{-1}([z]) \cap \{[x] \neq [y]\}$$

が言えた。$q^{-1}([z])$ は $q^{-1}([z]) \cap \{[x] \neq [y]\}$ の Zariski 閉包であり、また、 secant variety 一般に関する定理 2.1 の証明から

$$\begin{aligned} \dim Q_z &= \dim q^{-1}([z]) \cap \{[x] \neq [y]\} = \dim q^{-1}([z]) \\ &= \dim \mathfrak{S}(\mathbb{V}^k) - \dim S(\mathbb{V}^k) = 2k^2 \end{aligned}$$

となる。 □

4.3. **行列式多様体の Dual Variety.** 行列式多様体 $\mathbb{V}^k$ の dual variety について次の定理が成立する。

定理 4.7. $l = \min\{m - k, n - k\}$ とする。すると、$(\mathbb{V}^k)^\vee = \mathbb{V}^l$ となる。

証明. $k + 1 \leq i \leq m, k + 1 \leq j \leq n$ とする。そこで次のような集合 I^i, J^j を定義する。

$$I^i = \{1, 2, \ldots, k\} \cup \{i\}$$
$$J^j = \{1, 2, \ldots, k\} \cup \{j\}$$

そして、$\Delta_{ij}(X) = \det(X_{u,v})_{u \in I^i, v \in J^j}$ とする。

$$\left(\frac{\partial \Delta_{ij}}{\partial X_{st}}(I_k)\right)_{\substack{1 \leq s \leq m \\ 1 \leq t \leq n}} = E_{ij} \tag{4.4}$$

となる。ただし $E_{i,j}$ は (i, j) 成分が 1 で他はすべてゼロの行列 (行列単位) を表す。これを考慮して、次のような行列 Λ を定義する。

$$\Lambda = \sum_{\substack{k+1 \leq i \leq m \\ k+1 \leq j \leq n}} \lambda_{ij} E_{ij}$$

すると、$[\Lambda] \in (\mathbb{V}^k)^\vee$ である。ゆえに、 $1 \le s = \operatorname{rank}\Lambda \le l$ に対して、 $I_s \in (V^k)^\vee$ となる。行列の基本変形より、 $V^l \subset (\mathbb{V}^k)^\vee$ がわかる。

$(\mathbb{V}^k)^\vee \subset \mathbb{V}^l$ を示す。任意に $\mathbb{V}^k$ の滑らかな点 M を取る。すると、定理 4.2 から、$\operatorname{rank} M = k$ となる。基本変形を考えることによって、 $M = I_k$ としてよい。$[I_k]$ における接空間を求めると、それは

$$T_{[I_k],\mathbb{V}^k} = \{\Xi = (\xi_{i,j}) \mid \operatorname{trace}\Lambda\Xi = 0\}$$

となる。$\operatorname{rank}\Lambda \le l$ なので、$[\Lambda] \in \mathbb{V}^l$ となる。 □

5. 冪零多様体

5.1. **冪零多様体の定義と次元.** 任意の $n \times n$ 行列 $X \in M_n(\mathbb{C})$ に対して、その固有多項式を次のように記す。 $F(X,T) = F_X(T) = \det(T1_n - X)$ とする。すると、 $F_X(T)$ について次の補題が成り立つ。

補題 5.1. $I \subset \{1,2,\dots,n\}$ に対して、 $\Delta_I(X) = \det(X_{ij})_{i,j\in I}$ と定義する。すると、

$$F_X(T) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{\#I=n-k}\Delta_I(X)\,T^k$$

となる。

証明. [佐武, §IV.1] 参照。 □

$F_X(T)$ の T^k の係数を $F^{(k)}(X)$ と記す。これは $(X_{ij})_{1\le i,j\le n}$ の座標の下、斉次多項式となっている。

補題 5.2 (Hamilton-Cayley)**.** 任意の $X \in M_n(\mathbb{C})$ に対して、 $F_X(X) = 0$ が成り立つ。

証明. 例えば [佐武, §IV.1] を見よ。 □

補題 5.3. $A \in M_n(\mathbb{C})$ がある自然数 m について、$A^m = 0$ であるとする。すると、固有値は 0 である。したがって、 A の固有多項式は T^n であり、 $F^{(k)}(A) = 0 \quad (0 \le k \le n-1)$ である。

証明. λ を A の固有値とし、 $x \neq 0$ をその固有ベクトルとする。

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x &\Longrightarrow A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda^2 x \\ &\Longrightarrow A^3x = \lambda^3 x \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow A^m x = \lambda^m x \end{aligned}$$

ここで、$A^m x = 0$ だから、$\lambda^m x = 0$ したがって $\lambda = 0$ がわかる。 □

冪零行列の全体を N_n と記す。すなわち、

$$N_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^m = 0 \quad \exists m : \text{自然数}\}$$

N_n を射影化したものを $\mathfrak{N}_n$ と書く。

定理 5.4. $\mathfrak{N}_n = V(F^{(0)},\dots,F^{(n-1)})$ が成り立つ。

証明. 補題 5.3 より、 $\mathfrak{N}_n \subset V(F^{(0)}, \dots, F^{(n-1)})$ が言える。

$V(F^{(0)}, \dots, F^{(n-1)}) \subset \mathfrak{N}_n$ について述べる。任意に $M \in V(F^{(0)}, \dots, F^{(n-1)})$ を取る。すると、 M の固有多項式は $F_M(T) = T^n$ となる。補題 5.2 より、 $M^n = 0$ となる。よって、 $M \in \mathfrak{N}_n$ が言えた。 □

$\mathfrak{N}_n$ の次元、滑らかな点の集合、特異点集合について次の定理が成り立つ。

定理 5.5. $\dim \mathfrak{N}_n = n^2 - n - 1$ である。また、滑らかな点の集合は、群 $GL_n(\mathbb{C})$ の作用に関して推移的となる。すなわち、

$$\{x \in \mathfrak{N}_n \mid x \text{ は smooth}\} = \{[A] \in \mathfrak{N}_n \mid A \text{ は } J_n \text{ と共役}\}$$

さらに、特異点集合については、

$$\mathrm{Sing}(\mathfrak{N}_n) = \mathfrak{N}_n \cap \mathbb{V}^{n-2}$$

が成り立つ。

証明. 任意に $[A] \in \mathfrak{N}_n$ (つまり $A \in N_n$) を選ぶと、補題 5.3 より A の固有値は 0 なので、適当な $P \in GL_n(\mathbb{C})$ が存在して、 Jordan 標準形として、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{s_1} & & & \\ & J_{s_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{s_k} \end{pmatrix} = J(s_1, s_2, \dots, s_k)$$

がとれる。但し、 $\sum_{i=1}^{k} s_i = n$ であり、 J_{s_i} は $s_i \times s_i$ 行列で、

$$J_{s_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

である。すると、 $A \in N_n$ ならば、 $P^{-1}AP \in N_n$ なので、 N_n の任意の元の接空間は Jordan 標準形の接空間と線形同型となる。接空間を定義する n 個の余接ベクトル

$$\Big(\frac{\partial F^{(0)}}{\partial X_{ij}}\Big)_{ij}, \dots, \Big(\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial X_{ij}}\Big)_{ij}$$

の中で一次独立なベクトルの数が最も多いのは、Jordan 標準形が J_n の時である。実際、これから示すように J_n におけると時は、一次独立なベクトルの数は n こある。一方、$J(s_1, s_2, \dots, s_k) \quad (\sum_{i=1}^{k} s_i = n)$ の階数は $n-k$ となり、定義方程式 $F^{(s)}(X) \quad (0 \le s \le n-1)$ は $n-s$ 次の行列式の和である。したがって、$J(s_1, s_2, \dots, s_k)$ における一次独立なベクトルの数は $n-k+1$ 個以下になる。

$0 \leq k \leq n-1$ に対して、 $A_k := (\frac{\partial F^{(k)}}{\partial X_{ij}}(J_n))$ と置く。 $\det(T1_n - X)$ を X_{ij} で偏微分することで次の式が得られる。

$$(A_k)_{ij} = \begin{cases} 1 & (i-j=n-1-k) \\ 0 & (\text{ その他 }) \end{cases}$$

n 個の余接ベクトル $A_k \quad (0 \leq k \leq n-1)$ は一次独立になっているので、 $\dim N_n = n^2 - n$ である。したがって $\dim \mathfrak{N}_n = n^2 - n - 1$ となる。

以上の議論から

$$\{x \in \mathfrak{N}_n \mid x \text{ は smooth}\} = \{[A] \in \mathfrak{N}_n \mid A \text{ は } J_n \text{ と共役}\}$$

と、

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing}(\mathfrak{N}_n) &= \{[A] \in \mathfrak{N}_n \mid A \text{ は } J_n \text{と共役ではない}\} \\ &= \mathfrak{N}_n \cap \mathbb{V}^{n-2} \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

5.2. **冪零多様体の Secant Variety.** 冪零多様体 の secant variety を求めるにあたって、多項式の微分と終結式について述べる。体 K 上の多項式 $f(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ の微分を次のように定義する。

$$f'(T) = \sum_{i=1}^{n} i a_i T^{i-1}$$

多項式の重根について次の補題が成り立つ。

補題 5.6. $a \in K$ が K 上の多項式 $f(T)$ の重根である $\iff f(a) = f'(a) = 0$

証明. [$\Longrightarrow$ の証明] 仮定より、適当な多項式 $g(T)$ があって、 $f(T) = (T-a)^2 g(T)$ となる。 $f'(T) = 2(T-a)g(T) + (T-a)^2 g'(T)$ なので、 $f(T), f'(T)$ も a を零点に持つ。

[$\Longleftarrow$ の証明] $f(a) = 0$ なので、適当な多項式 $g(T)$ があって、 $f(T) = (T-a)g(T)$ となる。 $f'(T) = g(T) + (T-a)g'(T)$ であり、 $f'(a) = 0$ なので、 $g(a) = 0$ となる。したがって、適当な多項式 $h(T)$ があって、 $f(T) = (T-a)^2 h(T)$ となる。 □

$f(T) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} T^i, g(T) = \sum_{j=0}^{m} b_{m-j} T^j$ を体 K 上の多項式とする。 f, g に対して、終結式 $Res(f,g)$ を次のように定義する。

$$Res(f,g) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & a_0 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & b_0 & \cdots & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

但し、多項式 f の係数 a_i に関する行は m 行あり、多項式 g の係数 b_j に関する行は n 行あるものとする。

終結式 $Res(f,g)$ については次の定理が成立する。

補題 5.7. 次の $a), b), c)$ は同値である。
$a)$ f と g の終結式は 0 になる。すなわち、$Res(f,g)=0$.
$b)$ 適当な $A(T), B(T) \in K[T]$ が存在して、 $\deg A < \deg g,\ \deg B < \deg f$ かつ $fA+gB=0$ が成り立つ。
$c)$ f, g は定数でない共通因子を持つ。

証明. [高木, §5.28] 参照。 □

補題 5.6, 5.7 より、 $\mathfrak{N}_n$ の secant variety について次の定理が成り立つ。

定理 5.8. $\mathfrak{N}_n$ の secant variety は超平面 $V(\mathrm{trace}(X))$ になる。すなわち $S(\mathfrak{N}_n) = V(\mathrm{trace}(X))$ となる。

証明. secant variety 一般に関する補題 2.3 と $\mathfrak{N}_n$ の定義方程式から、 $S(\mathfrak{N}_n) \subset V(\mathrm{trace}(X))$ が導かれる。

$V(\mathrm{trace}(X)) \subset S(\mathfrak{N}_n)$ を次のように示す。 $V(\mathrm{trace}(X))$ の適当な空でない Zariski 開集合 U があって、 $U \subset S(\mathfrak{N}_n)$ となることを示す。一般に、固有値が全て異なる行列の集合は Zariski 開集合となる。実際、補題 5.6, 5.7 より、 $n \times n$ 行列 X の固有値が全て異なるための必要十分条件は、固有多項式 $F_X(T)$ について $Res(F_X(T), F'_X(T)) \neq 0$ が成立することである。そこで、 $U = V(\mathrm{trace}(X)) \cap \{Res(F_X(T), F'_X(T)) \neq 0\}$ と置いて、 $U \subset S(\mathfrak{N}_n)$ を示す。任意に $X \in U$ を選び、その相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とする。 $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ を

$$\prod_{j=1}^{n}(T-\lambda_j) = T^n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i b_i T^{n-1-i}$$

の両辺の係数が等しくなるように選ぶ。

このような $\{b_i\}$ に対して、次のような N_n の 2 つの行列を考える。

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ b_1 & 0 & & & \\ b_2 & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_{n-1} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

すると、 X_1, X_2 は冪零なので、 $X_1 + X_2 \in S(\mathfrak{N}_n)$ となる。比較的簡単な計算により X_1+X_2 の固有多項式 $F_{X_1+X_2}(T)$ は、 $T^n + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j b_j T^{n-1-j}$ となることが解かり、 b_j の定義より、 X_1+X_2 の固有値は $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ であるから、相異なる。したがって、適

当な $P \in GL_n(\mathbb{C})$ があって、

$$P(X_1+X_2)P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

となる。また、$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は X の固有値だったので、適当な $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ が存在して、$QXQ^{-1} = \Lambda$ となる。よって、

$$\begin{aligned} X &= Q^{-1}P(X_1+X_2)P^{-1}Q \\ &= (P^{-1}Q)^{-1}X_1(P^{-1}Q) + (P^{-1}Q)^{-1}X_2(P^{-1}Q) \in S(\mathfrak{N}_n) \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

系 5.9. $\mathfrak{N}_n$ を含む最小の線形空間は $V(\mathrm{trace}(X))$ である。

証明. 定理 2.4, 5.8 より、明らか。 □

5.3. **冪零多様体の Dual Variety.** 冪零多様体 $\mathfrak{N}_n$ の dual variety について次の定理が成り立つ。

定理 5.10. $\mathfrak{N}_n^\vee = \{[\alpha 1_n + A] \mid \alpha \in \mathbb{C}, A \in N_n\}$ が成り立ち、$\dim \mathfrak{N}_n^\vee = n^2 - n$ である。

証明. $A_k := (\frac{\partial F^{(k)}}{\partial X_{ij}}(J_n)) \quad (0 \le k \le n-1)$ であった。定理 5.5 の式より、

$$(A_k)_{ij} = \begin{cases} 1 & (i-j = n-1-k) \\ 0 & (\text{ その他 }) \end{cases} \tag{5.1}$$

すると、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k A_k = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & & \\ \beta_2 & \beta_1 & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \beta_n & \cdots & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

となる。但し、$\beta_i \in \mathbb{C} \quad (1 \le i \le n)$ である。 J_n 以外の Jordan 標準形においても n 個の接ベクトルの線形結合は上の式のような形にできる。そこで、このような行列の $GL_n(\mathbb{C})$ による共役を取り、それをすべて集めれば、$\mathfrak{N}_n^\vee = \{[\alpha 1_n + A] \mid \alpha \in \mathbb{C}, A \in N_n\}$ となることがわかる。 □

将来への展望

A. 行列式多様体については、その特異点集合、 secant variety、 dual variety が再び行列式多様体になることが示された。したがって、その特異点集合や secant variety、 dual variety を取っていくことによって、行列式多様体の間を移動することができる。例えば、$\mathrm{Sing}(\mathbb{V}^k)^\vee$ がどのような集合になるのかも解明されたわけである。一方、冪零多様体につ

いてはその特異点集合、 secant variety、 dual variety はそれぞれ解かったものの、再び冪零多様体にはならないことが解かった。例えば、冪零多様体の secant variety は超平面になってしまう。特に、特異点集合については、特異点集合の列を考察することによって行列式多様体とも冪零多様体とも異る複雑な射影多様体が得られるように思える。

そのような射影多様体に対して、行列式多様体のように、特異点集合が軌道分解を与えているような場合があるのだろうか? さらに、そこから一般の群の作用する代数多様体について、特異点集合と軌道分解の関係について考察してみたい。

B. ここでなされた行列式多様体や冪零多様体の議論を次のように一般化することも興味深く思われる。すなわち、次のような集合の特異点集合、secant variety、dual variety について考えてみたい。

1. $\{A \in M_{m,n} \mid \mathrm{rank}(A^t A) \leq k\}$
2. $\{A \in M_{m,n} \mid (A^t A)^l = 0 \quad \exists l \geq 0\}$
3. $\{(A_1, A_k, \dots, A_k) \in M_{n_1,n_2} \times M_{n_2,n_3} \times \cdots \times M_{n_k,n_{k+1}} \mid \mathrm{rank}(A_1 A_2 \cdots A_k) \leq s\}$
4. $\{(A_1, A_2, \dots, A_k) \in M_{n_1,n_2} \times M_{n_2,n_3} \times \cdots \times M_{n_k,n_1} \mid (A_1 A_2 \cdots A_k)^l = 0 \quad \exists l \geq 0\}$

C. 行列式多様体の議論では I_k と基本変形で移りあう行列の全体 (つまり $GL_m(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$-軌道) の閉包が $\mathbb{V}^k$ となり、smooth な点はこの軌道に一致することがわかった。冪零多様体 $\mathfrak{N}_n$ の場合には J_n に共役な行列の全体 ($GL_n(\mathbb{C})$-軌道) が丁度 smooth な点の全体となっている。そこで、一般の Jordan 標準形

$$J(s_1, s_2, \dots, s_k) = \begin{pmatrix} J_{s_1} & & & \\ & J_{s_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{s_k} \end{pmatrix}$$

に対して、これに共役な行列全体の**閉包**を考えると、行列式多様体や、冪零多様体における J_n の場合と同じように、$J(s_1, s_2, \dots, s_k)$ と共役な行列の全体が smooth な点の全体と一致するだろうかという疑問が自然に浮かぶ。また、secant variety や dual variety も考えてみると面白いかもしれないと考えている。

D. [H, §1.9] より、$\mathbb{P}^n$ の rational normal curve も、その secant variety も、行列の中で、線型空間と行列式多様体の共通部分になることがわかる。$2 \leq \alpha, n-\alpha$ となる整数 α を固定し、

$$M_\alpha(Z) = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_{n-\alpha} \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & \cdots & Z_{n-\alpha+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ Z_\alpha & Z_{\alpha+1} & \cdots & \cdots & Z_n \end{pmatrix}$$

と定義すると、rational normal curve は $X = \mathbb{P}(\{M_\alpha(Z) \mid \mathrm{rank}\, M_\alpha(Z) \leq 1\})$ と書け、その secant variety は $S(X) = \mathbb{P}(\{M_\alpha(Z) \mid \mathrm{rank}\, M_\alpha(Z) \leq 2\})$ で与えられる。しかし、時間の制約で本論文にはその証明を紹介できなかった。

E. 射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ についてその secant variety に含まれない点や、共通部分を持たない線形空間を取る。すると、その点による射影でもって X を 1 つ次元の低い射影空間に一対一に射影できる。しかし、これが埋め込みになるかどうかという問題、また、一般の線形空間からの射影については、[M] の議論を参考に将来考えてみたい。

G. 当然のことではあるのだが、世の中というのは人間の活動からなる。その中で、人々は交渉や取引、交換をし、一方で、オカルトでの修行や自殺、引きこもりのように世の中から去ってしまう人々もいる。商売が好きだからといって、社会問題について考えないのも問題であるが、仮にオカルトに興味がある（私にはないが）からといって、それとは異なる社会経済活動に一切の関心を払わないのも問題である。（不登校を悪いとは私自身は思わないのであるが、フリースクールを出たものがフリースクールに就職したがるのは問題であると思う。）

このような議論は数学にも当てはまりそうに思える。実際、著者はこの 4 回生の一年間で [M] を読み、アフィン多様体や射影多様体、次元、特異点などの代数幾何学と呼ばれるものの基本的な概念を学んだ。代数幾何学の知識そのものは貴重なものと思えるのだが、これからも代数幾何学という名のつく書籍だけを読んでいればいいわけではない。

究極的に人間と数学（両者は違うとすれば）のどちらを知りたいかと言われると、人間の方である。人付き合いというのは、いつの時代であれ悩みの種であるし、これからは外国人との共生を考えねばならぬと思うと、その種の悩みは増すことはあっても尽きることはないように思える。ただ、人付き合いだけを考えるのはどう甘く考えても苦痛であるし、数学を学んだ以上、それを生かしたいのも事実である。例えば、何人かの行動が、ある多項式が 0 になるという条件で展開されるのならば、人の世について考えられるし、その展開される場を代数幾何学の点から考えられるかもしれないと思う。

References

[M] David Mumford 『Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties』 Springer-Verlag 1995
[S] Igor R. Schafarevich 『Basic Algebraic Geometry 1』 Springer-Verlag 1988
[H] Joe Harris 『Algebraic Geometry, A First Course』Springer-Verlag 1992
[佐武] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1974.
[高木] 高木貞治, 代数学講義 (改訂新版), 共立出版, 1965.