零錐の特異点解消と余法束

Resolution of Null Fiber and Conormal Bundles over Lagrangian Grassmannian

西山 享　(京大・理)
Kyo Nishiyama　(Kyoto University)

Introduction

簡約代数群 K の有限次元表現 W に対して、アフィン商写像

$$\psi : W \to W/\!/K = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[W]^K)$$

を考える。このとき $o = \psi(0)$ の逆像 $\mathfrak{N} := \psi^{-1}(o)$ を零錐 (null fiber または null cone) と呼ぶ。零錐は商写像のファイバーの中でも複雑な構造を持っており、他のファイバーの性質は多かれ少なかれ零錐 $\mathfrak{N}$ の性質に帰着できることが多い。(例えば [VP94] 参照。)

この報告では簡約な dual pair $(G, G') = (\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(m, m))$ を例にとって、dual pair から自然にモーメント写像が導出され、そのモーメント写像がシンプレクティック空間の商写像になっていることをまず解説する。この場合の零錐は冪零軌道と深い関係がある。実際、随伴作用の零錐は冪零多様体そのものである (Kostant [Kos63], Kostant-Rallis [KR71])。

古くは Kraft, Procesi によって、異なるリー環の間の冪零軌道にある種の対応 (θ-持ち上げ) があることが知られており、不変式論や特異点理論の立場から研究されていた ([KP79, KP81])。この対応は複素数体上の dual pair を考えることでも得られるが、同様に実数体上の dual pair を考えれば、対称対の冪零軌道の θ-持ち上げが我々のモーメント写像を用いて記述できる (落合啓之と Zhu との共同研究を含む; [NOZ06, Nis00a, Nis05])。このような冪零軌道の対応は、太田琢也 [Oht05] や Przebinda 達 [DKP02, DKP05] によっても異なる視点から研究されている。しかしどの場合にも安定域と呼ばれる場合にしか美しい対応が得られていない。

この報告では、自明な冪零軌道の持ち上げの場合に限って安定域外でどのような現象が起こっているのか、それが表現論的には何を意味するのかを明らかにしたい。

この報告の前半の目標は、dual pair に附随したモーメント写像 (アフィン商写像) とその零錐 $\mathfrak{N}$ に対して、

(1) $\mathfrak{N}$ の既約成分の特異点解消を構成すること
(2) 特異点解消の商多様体が $\mathbb{C}^{2n}$ の Lagrange 部分空間のなす Grassmann 多様体 $\mathrm{LGr}(\mathbb{C}^{2n})$ 上の閉 GL_n-軌道の余法束に一致すること
(3) 余法束のモーメント写像による像と自明な軌道の θ-持ち上げによって構成された冪零軌道の閉包が一致すること

2006 年度表現論シンポジウム (2006/11/14 – 11/17; 於 ウェルシティ湯河原).

の解説である。

さて、前半は零錐をめぐる代数幾何的な話題であるが、後半では零錐の幾何と表現論の関係について述べたい。この部分は Peter Trapa との共同研究で現在進行形の結果ばかりである。計算が行き届いていない部分も多く、具体的な場合にしか結果を述べられないのが残念である。

dual pair の概念は Howe [How83] によって導入されたもので、ユニタリ最高ウェイト表現の分類理論などで威力を発揮した。その後 Li [Li89] によって、安定域にある dual pair では θ-対応によってユニタリ表現からユニタリ表現が得られるということが明らかにされ、それ以降はいわゆる "小さな" ユニタリ表現の構成に大きく寄与してきた。最近では、任意のユニポテント表現が θ-対応を何回か繰り返すことによって得られるという結果が Barbasch によって報告された。特に安定域における自明な表現の θ-持ち上げはユニポテント表現であると考えられている。このようなわけで自明な表現の dual pair 対応における役割は大きい。

さて、Lee-Zhu [LZ97, LZ98] は安定域外の dual pair 対応を考え、$\mathrm{O}(m,m)$ $(m \geq n)$ の自明な表現に対応する Howe の極大商 (θ-極大商) が $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ の退化主系列表現であることを明らかにした。もともとこれは Kudla, Rallis [KR90] による極大商から退化主系列への intertwining 作用素の構成を精密化したものであるが、Lee による退化主系列の詳細な解析 [Lee96] によってその全体像が明らかになった。

一般に θ-対応では極大商のうち既約商表現しか相手にしないのであるが、上で考えた零錐には、退化主系列そのものが対応すると考えるのが自然である。例えば退化主系列の既約成分で最大の Gelfand-Kirillov 次元を持つものが零錐の (代数幾何的な) 既約成分と対応し、表現の随伴多様体と余法束がモーメント写像によって結び付く。結果として、退化主系列の Gelfand-Kirillov 次元が最大の既約成分の随伴サイクルが重複度 1 を持つことが示される。一方、自明な表現から θ-対応で持ち上げて得られる表現の Gelfand-Kirillov 次元は退化主系列の成分の中でも最小のものである。

おそらく安定域外における一般の軌道や表現の持ち上げは、極大商で考えればその性質の多くの部分がより小さな零錐の性質 (あるいは自明な表現の極大商の性質) に帰着されると期待できる。この報告は、その目標に向かう第一歩である。

1. Dual pair とモーメント写像

実ベクトル空間 $W = \mathbb{R}^{2n}$ で非退化シンプレクティック双線型形式 $\langle\, ,\, \rangle$ を持つものを考える。ここではシンプレクティック形式を

$$\langle v, w\rangle = {}^t v J_n w \qquad J = J_n = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

で実現しておく。W の部分空間 X が全等方的であるとは、$\langle X, X\rangle = 0$ となるときに言い、極大な全等方的部分空間を Lagrange 部分空間と呼ぶ。W が

$$W = X \oplus Y \qquad (X, Y \text{ は Lagrange 部分空間}) \tag{1.2}$$

と直和分解するとき、この分解を完全極分解という。このとき $\langle\, ,\, \rangle$ を $X \times Y$ に制限したものは非退化であるから、自然に $Y \simeq X^*$ とみなされることに注意する。以下、完全極分解(1.2) を一つ固定して考えよう。

$\mathbb{G} = \mathrm{Sp}(W) = \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ を実シンプレクティック群とする。一般にシンプレクティック多様体 M 上にリー群 G がそのシンプレクティック構造を保って作用している場合にはモーメント写像

$\mu : M \to \mathrm{Lie}\,(G)^*$ が定義されるが、$\mathbb{G}$ の W への自然な作用の場合には、$\mathfrak{G}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Lie}\,(\mathbb{G})$ を実リー環、$\mathfrak{G}_{\mathbb{R}}^*$ をその代数的な双対とするとき、

$$\mu : W \to \mathfrak{G}_{\mathbb{R}}^*, \qquad \mu(w)(x) = \frac{1}{2}\langle xw, w\rangle \quad (x \in \mathfrak{G}_{\mathbb{R}}, w \in W) \tag{1.3}$$

がモーメント写像となる ([CG97] 参照)。これを複素化したものは複素シンプレクティック群の作用 $\mathbb{G}_{\mathbb{C}} \curvearrowright W_{\mathbb{C}}$ によるモーメント写像 $\mu : W_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{G}^*$ に他ならない。

定理 1.1. モーメント写像 $\mu : W_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{G}^*$ の像は $\mathfrak{G}^*$ の極小冪零余随伴軌道 $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^{\min}$ の閉包に一致する。さらに $\mu : W \to \overline{\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^{\min}}$ は $\mathbb{Z}^2 = \{\pm 1\}$ の掛け算作用による商写像である。

証明. 概略を示す。式 (1.3) と (1.1) により

$$2\mu(w)(x) = \langle xw, w\rangle = {}^t(xw)Jw = {}^tw\,{}^txJw = \mathrm{trace}\,{}^tx(Jw\,{}^tw)$$

だから、通常のように不変双線型形式 $\mathrm{trace}\,{}^tAB$ によって $\mathfrak{G}^*$ と $\mathfrak{G}$ を同一視するならば $\mu(w) = Jw\,{}^tw/2$ である。これは明らかに冪零元であるが、写像は $\mathbb{G}$-同変であり、これがたった二つの軌道 $\{0\}$ と $\{\mu(w) \mid w \neq 0\}$ の和であることは見易い。次元を比較すれば非自明な軌道は極小軌道に一致することがわかる。$\mathbb{Z}_2$ の作用による商写像であることはその具体形から明らかである。 □

さて、$X \simeq \mathbb{R}^n$ に一つ標準的な正定値内積 $(\,,\,)$ を取り、これによって $X \simeq X^* \simeq Y$ とみなす。この線型同型を複素化したものを $\eta : X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ と書こう。これを用いて $W_{\mathbb{C}}$ の複素 Lagrange 部分空間 L^+ を

$$L^+ := \{x + i\eta(x) \mid x \in X_{\mathbb{C}}\} \tag{1.4}$$

とおく。このとき $x = a + ib \in X_{\mathbb{C}}$ $(a, b \in X)$ に対して、

$$x + i\eta(x) = (a - \eta(b)) + i(b + \eta(a))$$

であるが、$x + i\eta(x)$ にその実部 $a - \eta(b) \in W$ を対応させる写像は $\mathbb{R}$ 上の線型同型 $L^+ \xrightarrow{\sim} W$ を導く。言い換えれば、この写像によって W には複素構造が定まることになる。一方 $L^+ \simeq X_{\mathbb{C}}$ でもあるが、X の標準内積を用いて L^+ 上に Hermite 内積 $(\,,\,)$ (同じ記号で表す) が定義される。つまり上の同型を通して W 上に Hermite 内積が入るわけだが、その虚部は元のシンプレクティック形式を復元する。つまり

$$\langle v, w\rangle = -\,\mathrm{Im}(v, w) \qquad (v, w \in W)$$

が成り立つ。$\mathrm{Sp}(W)$ の極大コンパクト部分群はこのようにして得られた Hermite 形式に対するユニタリ群 $\mathbb{K} = U(W)$ に一致していることに注意しておく。

このようにしてモーメント写像

$$\mu^+ : W \xrightarrow{\sim} L^+ \hookrightarrow W_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{G}^* \tag{1.5}$$

が定義されるが、その像は $\mathfrak{K} = \mathrm{Lie}\,(\mathbb{K})_{\mathbb{C}}$ 上で消えている。これは $\mathbb{K}$ が Hermite 形式を不変にしていることの帰結である。Cartan 分解 $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{P}$ をとれば、Killing 形式により $\mathfrak{P} \simeq (\mathfrak{K})^{\perp}$ であるから、$\mu^+ : W \to \mathfrak{P}$ であることがわかる。

定理 1.2. μ^+ の像は $\mathfrak{P}$ における極小冪零 $\mathbb{K}_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathbb{O}_{\min}^+$ の閉包に一致する。さらに $\mu^+ : W \to \overline{\mathbb{O}_{\min}^+}$ は $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ の自然な掛け算作用による商写像である。

注意 1.3. $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}^{\min} \cap \mathfrak{P} = \mathbb{O}_{\min}^+ \cup \mathbb{O}_{\min}^-$ であり、$\mathbb{O}_{\min}^{\pm}$ が $\mathfrak{P}$ における極小冪零軌道を与えている。L^+ の替わりに $L^- = \{x - i\eta(x) \mid x \in X_{\mathbb{C}}\}$ を用いればモーメント写像 $\mu^- : W \to \overline{\mathbb{O}_{\min}^-}$ を得る。

定義 1.4. シンプレクティック群 $\mathbb{G} = \mathrm{Sp}(W)$ の部分群の組 (G, G') が dual pair であるとは、$\mathbb{G}$ の中で互いに中心化群になっている、つまり $G' = Z_{\mathbb{G}}(G)$ かつ $G = Z_{\mathbb{G}}(G')$ が成り立つときにいう。さらに G, G' が簡約群のとき簡約な dual pair と呼ばれる。

この報告では簡約なものしか扱わないので、以下簡約な dual pair (G, G') を単に dual pair と呼ぶ。

さて dual pair G, G' の極大コンパクト部分群は互いに可換であるから、その積もまたコンパクト群である。したがって両者の極大コンパクト群は、必要ならば共役を取って $\mathbb{G}$ の極大コンパクト群 $\mathbb{K} = U(W)$ の部分群としてよい。Cartan 分解も $\mathfrak{G} = \mathrm{Lie}\,(\mathbb{G})_{\mathbb{C}}$ の分解に順じて取ることができる。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{s}', \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{k}, \mathfrak{k}' \subset \mathfrak{K}, \qquad \mathfrak{s}, \mathfrak{s}' \subset \mathfrak{P}$$

部分群 $G \subset \mathbb{G} = \mathrm{Sp}(W)$ は W のシンプレクティック形式を保つので、モーメント写像 $\mu : W \to \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ が考えられ、これを複素化して Lagrange 部分空間に制限することでモーメント写像 $\mu^+ : W \simeq L^+ \to \mathfrak{s}^*$ を得る。しかし、この手続きは結局最初の $\mathbb{G}$ に対するモーメント写像から次のようにして得られたものと一致することが容易に確かめられる。

$$\mu^+ : W \xrightarrow{\sim} L^+ \to \mathfrak{P}^* \xrightarrow{\mathfrak{s}\,\text{への制限}} \mathfrak{s}^*$$

G' の方でも同様に考えて、結局次の図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[d, "/\mathbb{Z}_2"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi"] & \\
& \overline{\mathbb{O}^+_{\mathrm{min}}} \subset \mathfrak{P}^* \arrow[dl, "\text{制限}"] \arrow[dr, "\text{制限}"'] & \\
\mathfrak{s}^* & & \mathfrak{s}'^*
\end{tikzcd}$$

例 1.5. $V = \mathbb{R}^{2n}$ をシンプレクティック空間として、$G = \mathrm{Sp}(V) = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ をシンプレクティック群とする。また $U = \mathbb{R}^{p,q} = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$ を符号が (p, q) の二次形式を持つ空間とし、$G' = \mathrm{O}(p, q)$ をその直交群とする。このとき $W = V \otimes U = \mathrm{M}_{2n,p+q}(\mathbb{R})$ はそれぞれの形式のテンソル積を取ることによってシンプレクティックなベクトル空間となる。実際、標準的な実現を行えば、シンプレクティック形式は $x, y \in \mathrm{M}_{2n,p+q}(\mathbb{R})$ に対して

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{trace}(I_{p,q}\, {}^t x J_n y), \qquad I_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられている。この設定の下で W の完全極分解 $W = X \oplus Y$ を

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathrm{M}_{n,p}, d \in \mathrm{M}_{n,q} \right\}, \qquad Y = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathrm{M}_{n,q}, c \in \mathrm{M}_{n,p} \right\}$$

ととって上のように計算すれば、$W = \mathrm{M}_{n,p+q}(\mathbb{C}) \simeq L^+$ とみなすことができ、この同一視のもとでモーメント写像は、$(A, B) \in \mathrm{M}_{n,p+q}(\mathbb{C}) = W$ に対して

$$\begin{aligned} \psi(A,B) &= {}^t AB \in \mathrm{M}_{p,q} \simeq \mathfrak{s}' \\ \varphi(A,B) &= A\,{}^t A \oplus B\,{}^t B \in \mathrm{Sym}_n \oplus \mathrm{Sym}_n \simeq \mathfrak{s} \end{aligned} \tag{1.6}$$

と与えられることが計算により確かめられる。ただし $\mathfrak{s}$ と $\mathfrak{s}^*$ は Killing 形式により同一視した。$\mathfrak{s}'$ についても同様である。以下、常にこの設定でモーメント写像を使うことにする。

このようにモーメント写像を考えると、明らかにそれは $\mathbb{K}$ についての同変写像である。ところが (G, G') が dual pair であるから、$\mathfrak{s}'$ には $K_{\mathbb{C}}$ が自明に作用する。つまり写像 $W \xrightarrow{\psi} \mathfrak{s}'$ は $K_{\mathbb{C}}$-不変である。

$$\psi(kw) = \psi(w) \qquad (w \in W,\ k \in K_{\mathbb{C}})$$

個々の場合に検証すると、実は ψ はその像 $\mathrm{Im}\,\psi \subset \mathfrak{s}$ 上へのアフィン商写像になっていることが分かるが、これについては後述する。もちろん $W \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{s}$ についても全く同様である。

2. 冪零軌道の θ-持ち上げ

dual pair (G, G') に対して、モーメント写像

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \mathfrak{s} & & \mathfrak{s}' \end{tikzcd}$$

が定義されたが、冪零軌道の持ち上げを定義しよう。その前にまず冪零軌道とは何かを復習しておく。

定義 2.1. $x \in \mathfrak{g}$ が冪零元であるとは、$x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ であって、かつ $\mathrm{ad}\,x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が冪零写像になっているときに言う。$\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{w}$ に対して、$\mathfrak{w}$ に含まれる冪零元の全体を $\mathcal{N}(\mathfrak{w})$ で表す。冪零元 x を通る軌道を冪零軌道と呼ぶ。

さて、モーメント写像の像はもともと双対空間の元であるので、冪零軌道を文字通りに解釈するのは難しそうに思われる。しかし、次の補題のように冪零軌道は幾何学的な条件で決まるので、$\mathfrak{s}^*$ を Killing 形式で $\mathfrak{s}$ と同一視しても冪零軌道は矛盾なく定義されていることがわかる。

補題 2.2. $G_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}$ が冪零であることと $\overline{\mathbb{O}_{\mathbb{C}}} \ni 0$ であることは同値である。また $\mathfrak{s}$ における $K_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathbb{O} \subset \mathfrak{s}$ が冪零であることと $\overline{\mathbb{O}} \ni 0$ は同値である。

定義 2.3. $\mathbb{O}' \subset \mathfrak{s}'$ を冪零 $K'_{\mathbb{C}}$-軌道とする。このとき $\varphi(\psi^{-1}(\overline{\mathbb{O}'}))$ は有限個の冪零 $K_{\mathbb{C}}$-軌道の和であり、

$$\varphi(\psi^{-1}(\overline{\mathbb{O}'})) = \bigcup_{i=1}^{l} \overline{\mathbb{O}_i} \qquad (\exists \mathbb{O}_i \subset \mathfrak{s} :\ K_{\mathbb{C}}\text{-軌道})$$

と代数多様体として既約分解される。そこで $\theta(\mathbb{O}') = \{\mathbb{O}_i \mid 1 \le i \le l\}$ と書き、これを軌道 $\mathbb{O}'$ の θ-持ち上げと呼ぶ。

一般には冪零軌道の持ち上げは一対多の対応であるが、dual pair が安定域にあるときには写像を定める。ここで dual pair (G, G') が安定域にあるとは G' のサイズが G に比して十分に小さいことを言うが、たとえば $(G, G') = (\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(p, q))$ の時は、$p + q \le n$ が安定域の条件である。逆に $(G, G') = (\mathrm{O}(p, q), \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}))$ とすると安定域は $2n \le p, q$ を意味する。

定理 2.4 ([Nis00a, Nis05], [Oht05], [DKP02, DKP05], [NOZ06])**.** dual pair (G, G') が安定域にあれば $\varphi(\psi^{-1}(\overline{\mathbb{O}'}))$ は既約であって $\varphi(\psi^{-1}(\overline{\mathbb{O}'})) = \overline{\mathbb{O}}$ とただ一つの冪零軌道の閉包になる。したがって写像 $\theta : \mathcal{N}(\mathfrak{s}')/\operatorname{Ad} K'_{\mathbb{C}} \to \mathcal{N}(\mathfrak{s})/\operatorname{Ad} K_{\mathbb{C}}$ が $\mathbb{O} = \theta(\mathbb{O}')$ として定義されるが、この対応は単射である。

さらに安定域においては $\mathbb{O}' \subset \mathfrak{s}'$ が冪零軌道と限らなくてもよく、任意の $K'_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathbb{O}' \subset \mathfrak{s}'$ に対して $\theta(\mathbb{O}')$ が上のように定義され、単射写像 $\theta : \mathfrak{s}'/\operatorname{Ad} K'_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{s}/\operatorname{Ad} K_{\mathbb{C}}$ が定まる。

注意 2.5. $\mathbb{O}'$ が冪零でないとき、安定域外では一般に $\varphi(\psi^{-1}(\overline{\mathbb{O}'}))$ は無限個の軌道の和であり、既約成分も軌道の閉包の形をしているとは限らない。

3. アフィン商写像と零錐

ここでアフィン商写像の一般論について必要な事項を簡単にまとめておく。

一般に K を簡約な複素代数群とし、K の有限次元表現 W を考える。したがって W は有限次元の複素ベクトル空間である。このとき K は W 上の多項式の全体 $\mathbb{C}[W]$ に左移動で作用する。

$$(k \cdot f)(w) = f(k^{-1} \cdot w) \qquad f \in \mathbb{C}[W],\ w \in W,\ k \in K$$

この作用に関する不変元全体を $\mathbb{C}[W]^K$ で表し K-不変式環と呼ぶ。Hilbert の基底定理により、$\mathbb{C}[W]^K$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な可換環であることに注意しておこう。

定義 3.1. 上の設定の下に $W/\!/K = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[W]^K)$ とおき、これを W の K の作用によるアフィン商と呼ぶ。ただし可換代数 A に対して $\operatorname{Spec} A$ はその素イデアル全体に Zariski 位相を入れたアフィン・スキームを表す。不変式環の包含写像 $\mathbb{C}[W]^K \hookrightarrow \mathbb{C}[W]$ は自然にスキームの射 $W \to W/\!/K$ を引き起こすが、これをアフィン商写像と呼ぶ。

例 3.2. $W = \mathrm{M}_{n,p+q}$ とおき、上で与えたモーメント写像

$$\psi : W = \mathrm{M}_{n,p+q} \to \mathrm{M}_{p,q} = \mathfrak{s}', \qquad \psi(A, B) = {}^t AB$$

を考えよう。この写像 ψ は $K_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の作用 $g \cdot (A, B) = (gA, {}^t g^{-1} B)$ によるアフィン商写像に “ほぼ” 一致する。これをもう少し厳密に言おう。

$$\operatorname{Det}_n(\mathrm{M}_{p,q}) = \{x \in \mathrm{M}_{p,q} \mid \operatorname{rank} x \le n\} \tag{3.1}$$

で階数が n 以下の行列のなす行列式多様体を表すと、

$$\operatorname{Im} \psi = \operatorname{Det}_n(\mathrm{M}_{p,q}) \simeq W/\!/K_{\mathbb{C}}$$

であって、$\psi : \mathrm{M}_{n,p+q} \to \operatorname{Det}_n(\mathrm{M}_{p,q})$ はアフィン商写像になる。このことは Weyl による古典的な不変式論からの直接的な帰結である。もちろん $n \ge \min\{p, q\}$ ならば $\operatorname{Det}_n(\mathrm{M}_{p,q}) = \mathrm{M}_{p,q}$ であり、特に安定域 $(n \ge p + q)$ においては文字通り $\psi : W \to \mathfrak{s}'$ がアフィン商写像になっていることに注意しておく。

以下 $\psi : W \to W/\!/K$ をアフィン商写像とする。$o = \psi(0)$ とおき、$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_K = \psi^{-1}(o)$ を零錐と呼ぶ。零錐は商写像の中でも一番質が悪いファイバーで、零錐がよい性質を持つと他のファイバーもよい性質を持つ。例えば、零錐が有限個の K-軌道を持てば他のファイバーも有限個の軌道の和である ([VP94] 参照)。

J を $\mathbb{C}[W]^K$ の正の次数を持つ斉次元から生成された斉次イデアル (不変イデアル) とする。零錐の定義より、$\mathfrak{N}$ は J の共通ゼロ点 $\mathbb{V}(J)$ に一致するが、このことから次の補題がわかる。

補題 3.3. $\mathfrak{N}$ は原点を頂点とする錐であって、$w \in \mathfrak{N}$ であることと $\overline{K \cdot w} \ni 0$ であることは同値である。

例 3.4. 一般に簡約な代数群 G がそのリー環 $\mathfrak{g}$ に随伴作用しているとき、零錐はちょうど冪零元の全体 $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ (冪零多様体) に一致する。これは対称対の場合でも全く同様である。

この例を踏まえて $w \in \mathfrak{N}$ を W の冪零元と呼ぶことにする。

さて、多項式 $f \in \mathbb{C}[W]$ に対して、f を定数係数微分作用素とみなしたものを $\partial(f)$ で表そう。

定義 3.5. 微分作用素 $\partial(f)$ $(f \in J)$ によって消える多項式を K-調和多項式と呼ぶ。調和多項式の全体を

$$\mathcal{H}_K = \{h \in \mathbb{C}[W] \mid \partial(f)h = 0 \quad (\forall f \in J)\}$$

で表す。(K が明らかな場合にはしばしば省略する。)

調和多項式に関する次の定理はよく知られている。例えば [Hel00, Chap. 3] 参照。

定理 3.6. (1) 直和分解 $\mathbb{C}[W] = \mathcal{H}_K \oplus J$ が成り立つ。

(2) 掛け算によって引き起こされる写像 $m : \mathcal{H}_K \otimes \mathbb{C}[W]^K \twoheadrightarrow \mathbb{C}[W]$ は全射である。

(3) $\mathcal{H}_K \hookrightarrow \mathbb{C}[W] \xrightarrow{\mathrm{proj}} \mathbb{C}[\mathfrak{N}] = \mathbb{C}[W]/\sqrt{J}$ は K-加群としての全射を導くが、これが全単射であることと J が被約イデアルであることは同値である[1]。

4. Dual pair $(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(m, m))$ の零錐

以下、簡単のために $p = q = m$ とおいて dual pair $(G, G') = (\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(m, m))$ の零錐とその構造について述べる。まずモーメント写像は既に述べたように

$$\psi : W = \mathrm{M}_{n,2m} \to \mathrm{M}_m = \mathfrak{s}', \qquad \psi(A, B) = {}^t A B \quad (A, B \in \mathrm{M}_{n,m}) \tag{4.1}$$

で与えられる。この写像は、代数群 $K_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の作用による、W から行列式多様体 $\mathrm{Im}\,\psi = \mathrm{Det}_n(\mathrm{M}_m)$ への商写像なのであった。以下複素数体上で常に考えるので (以前の記号とは少々違うが) $K_{\mathbb{C}}, K'_{\mathbb{C}}$ と書くかわりに単に K, K' と書くことにする。また $H = \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) \supset K'$ とおく。見易いようにまとめておこう。

$$\begin{aligned} &K = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}), \\ &K' = \mathrm{O}(m, \mathbb{C}) \times \mathrm{O}(m, \mathbb{C}) \subset H = \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

新たに導入した群 H は $W = \mathrm{M}_{n,2m}$ に

$$(h_1, h_2) \cdot (A, B) = (A\, {}^t h_1, B h_2^{-1}) \qquad (h_1, h_2) \in H,\ (A, B) \in W \tag{4.3}$$

で作用している[2]。アフィン商写像 ψ の零錐は

$$\mathfrak{N} = \psi^{-1}(0) = \{(A, B) \in \mathrm{M}_{n,2m} \mid {}^t A B = 0\} \tag{4.4}$$

となっているが、$\mathfrak{N}$ には $K \times H = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times (\mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}))$ が自然に作用する。このとき零錐の軌道分解は次のようになる。

---

[1] $\mathcal{H}_K$ は K-加群ではあるが、代数構造は持っていないことに注意する。一方 $\mathbb{C}[\mathfrak{N}]$ はその定義から $\mathbb{C}$ 上の代数である。

[2] H は $U(m, m)$ の極大コンパクト群の複素化と見ることができる。

定理 4.1. $0 \le s, t \le \min\{m, n\}$ に対して

$$\mathfrak{N}_{s,t}^{\circ} = \{(A, B) \in \mathfrak{N} \mid \operatorname{rank} A = s, \operatorname{rank} B = t\}, \qquad \mathfrak{N}_{s,t} = \overline{\mathfrak{N}_{s,t}^{\circ}} \tag{4.5}$$

と定義する。

(1) $\mathfrak{N}_{s,t}^{\circ}$ は (空でなければ) 一つの $K \times H$-軌道をなし、

$$\mathfrak{N} = \bigsqcup_{\substack{0 \le s,t \le \min\{m,n\} \\ s+t \le n}} \mathfrak{N}_{s,t}^{\circ} \tag{4.6}$$

は $\mathfrak{N}$ の軌道分解を与える。また $\mathfrak{N}_{s,t}^{\circ}$ は開かつ稠密な $K \times K'$-軌道を含む。

(2) 軌道の閉包関係は $\mathfrak{N}_{s,t}^{\circ} \subset \mathfrak{N}_{s',t'} \iff s \le s', t \le t'$ で与えられる。

(3) $p + q = \min\{n, 2m\}$ に対して $\mathfrak{N}_{p,q}$ は $\mathfrak{N}$ の既約成分であって、

$$\mathfrak{N} = \bigcup_{p+q=\min\{n,2m\}} \mathfrak{N}_{p,q} \tag{4.7}$$

は代数多様体としての既約分解である。

(4) 式 (1.6) で定義されたもう一方のモーメント写像 $\varphi : W \to \mathfrak{s}$ を考えると、ある冪零軌道 $\mathbb{O}_{p,q} \in \mathcal{N}(\mathfrak{s}) / \operatorname{Ad} K$ が存在して、$\varphi(\mathfrak{N}_{p,q}) = \overline{\mathbb{O}_{p,q}}$ と書ける。ここで $\mathbb{O}_{p,q}$ は符号付きヤング図形によって $(+-)^p(-+)^q(+)^{n-(p+q)}(-)^{n-(p+q)}$ で表される冪零軌道である[3]。

(5) 冪零軌道の閉包 $\overline{\mathbb{O}_{p,q}}$ はアフィン商 $\mathfrak{N}_{p,q}/\!/K'$ と同型であって $\mathfrak{N}_{p,q} \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathbb{O}_{p,q}}$ は K' の作用によるアフィン商写像である。

系 4.2. dual pair $(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(m, m))$ が安定域にある $\iff$ 零錐 $\mathfrak{N}$ が既約。一般に dual pair $(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(p, q))$ に対しても全く同じ主張が成り立つ。

系 4.3. $\{0\} \subset \mathfrak{s}'$ を自明な冪零 K'-軌道とするとき

$$\varphi(\psi^{-1}(\{0\})) = \varphi(\mathfrak{N}) = \bigcup_{p+q=\min\{n,2m\}} \overline{\mathbb{O}_{p,q}}$$

である。したがって自明な軌道の θ-持ち上げは

$$\theta(\{0\}) = \{\mathbb{O}_{p,q} \mid 0 \le p, q \le \min\{m, n\},\ p + q = \min\{n, 2m\}\}$$

で与えられる。

注意 4.4. $r = p + q = \min\{n, 2m\}$ とおき、複素 $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$-冪零軌道 $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ を Young 図形による表示で $(2^r, 1^{2(n-r)})$ となっているものとする。このとき

$$\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{s} = \bigsqcup_{\substack{0 \le p,q \le \min\{m,n\} \\ p+q=\min\{n,2m\}}} \mathbb{O}_{p,q}$$

となっている。つまりこの場合 $\theta(\{0\})$ は $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{s}$ の既約成分 (連結成分) をすべて集めたものに他ならない。しかしなぜそうなっているのかはそれほど明らかでない。碩学の教えを乞う。

例 4.5. 軌道の閉包関係を表す Hasse 図式は次のようになる。最上段に並んだ成分が既約成分である。

---

[3] たとえば $(+-)^p$ は $\boxed{+}$ の箱と $\boxed{-}$ の箱一つづつからなる行が p 行続くことを意味する。また $(+), (-)$ の部分は $n = p + q$ のときには現れないと解釈する。

$n = 4 \leq m$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathfrak{N}_{0,4} \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{1,3} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{2,2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{3,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{4,0} \arrow[dl] \\
& \mathfrak{N}_{0,3} \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{1,2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{2,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{3,0} \arrow[dl] & \\
& & \mathfrak{N}_{0,2} \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{1,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{2,0} \arrow[dl] & & \\
& & & \mathfrak{N}_{0,1} \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{1,0} \arrow[dl] & & & \\
& & & & \mathfrak{N}_{0,0} & & & &
\end{tikzcd}$$

$n = 4,\ m = 3$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathfrak{N}_{1,3} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{2,2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{3,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{N}_{0,3} \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{1,2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{2,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{3,0} \arrow[dl] \\
& \mathfrak{N}_{0,2} \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{1,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{2,0} \arrow[dl] & \\
& & \mathfrak{N}_{0,1} \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{1,0} \arrow[dl] & & \\
& & & \mathfrak{N}_{0,0} & & &
\end{tikzcd}$$

$n = 4,\ m = 2$ (安定域) : 安定域では既約成分は一つになる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & \mathfrak{N}_{2,2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& \mathfrak{N}_{1,2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{2,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{N}_{0,2} \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{1,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{2,0} \arrow[dl] \\
& \mathfrak{N}_{0,1} \arrow[dr] & & \mathfrak{N}_{1,0} \arrow[dl] & \\
& & \mathfrak{N}_{0,0} & &
\end{tikzcd}$$

さてこの場合 $n \geq 2$ ならば不変イデアル J は被約であり、$K \times H$ の表現として $\mathbb{C}[\mathfrak{N}] \simeq \mathcal{H}_K$ が成り立っている。この表現の既約分解はよく知られているが、以下それを紹介しよう ([KV78], [How95], [NZ04] 参照)。その前にいくつか記号を用意する。

$\mathcal{P}_n$ は長さが n 以下の分割の全体を表す。つまり

$$\mathcal{P}_n = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0\} \tag{4.8}$$

である。$\alpha_l > 0 = \alpha_{l+1} = \cdots = \alpha_n$ となっているとき、l を α の長さと呼び $\ell(\alpha)$ で表す。分割の末尾に 0 を付け加えることによって自然に $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ とみなすことができる。

$\lambda \in \mathbb{Z}^n$ は $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ を満たすとき優ウェイトと呼ばれ、そのような λ に対して $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の既約有限次元表現で最高ウェイトが λ のものが存在する。それを ρ_λ と書く。一般線型群が多数現れるときには $\rho_\lambda^{(n)}$ と書くこともある。ρ_λ^* は ρ_λ の反傾表現を表す。$\rho_\lambda^* = \rho_{\lambda^*}$ によって λ^* を定義しよう。

分割は優ウェイトなので $\alpha \in \mathcal{P}_n$ に対して表現 ρ_α を考えることができる。二つの分割 α, β で $\ell(\alpha) + \ell(\beta) \leq n$ となっているようなものに対して、

$$\alpha \odot \beta = (\alpha, 0, \ldots, 0, \beta^*) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s, 0, \ldots, 0, -\beta_t, \ldots, -\beta_1) \in \mathbb{Z}^n \tag{4.9}$$

とおけば、これも優ウェイトである。すべての優ウェイトは (α, β に空の分割も許せば) このように表すことができる。

以上の記号の下に $K \times H = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times (\mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}))$ の表現として零錐の関数環は次のように分解される。

$$\mathbb{C}[\mathfrak{N}] \simeq \mathcal{H}_K \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha,\beta \in \mathcal{P}_m \\ \ell(\alpha)+\ell(\beta) \leq n}} {\rho_{\alpha\odot\beta}^{(n)}}^* \boxtimes (\rho_\alpha^{(m)*} \otimes \rho_\beta^{(m)}) \tag{4.10}$$

各既約成分上では $p, q; p + q = \min\{n, 2m\}$ に応じて

$$\mathbb{C}[\mathfrak{N}_{p,q}] \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathcal{P}_p \\ \beta \in \mathcal{P}_q}} {\rho_{\alpha\odot\beta}^{(n)}}^* \boxtimes (\rho_\alpha^{(m)*} \otimes \rho_\beta^{(m)}) \tag{4.11}$$

と分解されている。

定理 4.6 (cf. [Nis00b])**.** (1) $\varphi(\mathfrak{N}) = \Theta$ と置けば、Θ の関数環は $K = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の表現として次のように分解される。

$$\mathbb{C}[\Theta] \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha,\beta \in \mathcal{P}_m \\ \ell(\alpha)+\ell(\beta) \leq n}} {\rho_{2\alpha\odot 2\beta}}^*$$

特に $m \geq n$ であれば $\mathbb{C}[\Theta] \simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{O}(n,\mathbb{C})}^{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})} \mathbf{1}$ である。ただし $\mathbf{1}$ は直交群 $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$ の自明な表現を表す。

(2) 冪零軌道 $\mathbb{O}_{p,q}$ ($p + q = \min\{n, 2m\}$) は球多様体であって、その関数環は次のように重複度自由に分解する。

$$\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_{p,q}}] \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathcal{P}_p \\ \beta \in \mathcal{P}_q}} {\rho_{2\alpha\odot 2\beta}}^*$$

注意 4.7. 簡約代数群 G が作用している代数多様体 X が 球多様体 とは、G のある Borel 部分群が X において開かつ稠密な軌道を持つときに言う。X がアフィン多様体の時にはこれは $\mathbb{C}[X]$ が G の表現として重複度自由に分解することと同値である。

証明. アフィン商の定義から $\mathbb{C}[\Theta] = \mathbb{C}[\mathfrak{N}]^{K'}$ であるが、$K' \subset H$ は対称対であること、さらに

$$(\rho_\lambda)^{\mathrm{O}(n,\mathbb{C})} = \begin{cases} \mathbb{C} & \lambda = 2\mu \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

であることを考慮すると (1) がわかる。(2) も同様である。 □

$\mathbb{O}_{p,q}$ のように冪零軌道が球多様体のとき球冪零軌道と呼ぶ。随伴表現による球冪零軌道は Panyushev [Pan99] によって、対称対の球冪零軌道は King [Kin04] によって完全に分類されている。その分類によれば、ほとんどすべての球冪零軌道は零錐からのアフィン商写像の像として得られる (つまり自明な軌道からの θ 持ち上げとして得られる) ことが分かり、そのような場合には冪零軌道の関数環が上記のように具体的に記述できる ([Nis04] 参照)。

命題 4.8. duali pair $(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}),\mathrm{O}(p,q))$ に対する冪零軌道の θ-持ち上げを $\theta_{p,q}$ で表すことにする。このとき $\mathfrak{N}$ の軌道の閉包 $\mathfrak{N}_{s,t}$ に対して、$\mathbb{O}_{s,t}=\theta_{s,t}(\{0\})$ を安定域における θ-持ち上げとすると、$\varphi(\mathfrak{N}_{s,t})=\overline{\mathbb{O}_{s,t}}$ が成り立つ。さらに

$$\varphi:\mathfrak{N}_{s,t}\longrightarrow\overline{\mathbb{O}_{s,t}}\simeq\mathfrak{N}_{s,t}/\!/K'$$

はアフィン商写像である。

このようにして $\Theta=\varphi(\mathfrak{N})$ に含まれるすべての冪零軌道は球冪零軌道であること、それらが安定域における自明な軌道の持ち上げになっていることがわかる。

5. 冪零錐の特異点解消

この節では引き続いて dual pair $(G,G')=(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}),\mathrm{O}(m,m))$ を考え、その場合に、零錐の既約成分の特異点解消と Lagrange 部分空間のなす Grasmann 多様体上の閉 K-軌道の余法束との関係を述べる。ただし技術的な問題から**この節では $m\geq n$ を常に仮定する**。

そこで $V=\mathbb{C}^n,U=\mathbb{C}^m$ とおいて $W=\mathrm{M}_{n,2m}=\mathrm{M}_{n,m}\oplus\mathrm{M}_{n,m}$ を

$$W=V\otimes U^*\oplus V^*\otimes U=\mathrm{Hom}(U,V)\oplus\mathrm{Hom}(V,U) \tag{5.1}$$

とみなすことにしよう。もちろん $V^*=\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$ は双対空間である。この同一視の下に $K\times H=\mathrm{GL}(V)\times(\mathrm{GL}(U)\times\mathrm{GL}(U))$ となっている。また $U\oplus U^*$ には $\mathrm{O}(m,m)$ により決まる二次形式の複素化を考え、$K'=\mathrm{O}(U)\times\mathrm{O}(U)\subset H$ とみなす。さて

$$\mathbb{V}=V\oplus V^* \tag{5.2}$$

とおき、$\mathbb{V}$ に対称な双線型形式 $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle_+$ とシンプレクティック形式 $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle_-$ を導入して(5.2) が完全極分解を与えるようにする。このとき V,V^* はどちらの形式に対しても全等方的であるから、双線型形式 $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle_\pm$ は V と V^* の間の自然な pairing によって完全に決まることに注意する。つまり

$$\langle\!\langle\xi,v\rangle\!\rangle_\pm=\xi(v)\qquad\xi\in V^*,\quad v\in V$$

とおいて、あとはこれを (反) 対称双線型形式として拡張すればよい。零錐はこの設定では

$$\mathfrak{N}=\{(f_1,f_2)\in\mathrm{Hom}(U,V)\oplus\mathrm{Hom}(V,U)\mid f_2\circ f_1=0\} \tag{5.3}$$

と表されているが、次の簡単な補題が有用である。

補題 5.1. $(f_1,f_2)\in\mathfrak{N}$ であることと $\mathrm{Im}\,f_1\oplus\mathrm{Im}\,{}^tf_2$ が双線型形式 $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle_\pm$ について同時全等方的であることは同値である。ここに $V\xrightarrow{f_2}U$ に対してその反傾を ${}^tf_2:U^*\to V^*$ と書いた。

そこで $w=(f_1,f_2)\in W$ に対して、$\zeta(w)=\mathrm{Im}\,f_1\oplus\mathrm{Im}\,{}^tf_2$ と置くことにしよう。$\zeta(w)$ は $\mathbb{V}$ の部分空間であるが、$p+q=n$ ならば $w\in\mathfrak{N}^\circ_{p,q}$ に対して $\zeta(w)\subset\mathbb{V}$ は上の補題より $\langle\!\langle\,,\,\rangle\!\rangle_\pm$ に関する同時 Lagrange 部分空間である。ここで Lagrange 部分空間とは極大全等方的な部分空間を指す。実はこの逆もまた正しい。

補題 5.2. $\mathbb{V}$ の同時 Lagrange 部分空間 $\mathbb{L}$ に対して、ある $w\in\mathfrak{N}$ があって $\zeta(w)=\mathbb{L}$ と書ける。このとき

$$\mathbb{L}=\mathbb{L}_+\oplus\mathbb{L}_-\;;\qquad\mathbb{L}_+=\mathbb{L}\cap V,\quad\mathbb{L}_-=\mathbb{L}\cap V^*$$

と直和に分解するが $p=\dim\mathbb{L}_+,\ q=\dim\mathbb{L}_-$ とおけば $w\in\mathfrak{N}^\circ_{p,q}$ である。

そこで

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{p,q} &= \zeta(\mathfrak{N}^\circ_{p,q}) \\ &= \{\mathbb{L} \subset \mathbb{V} \mid \mathbb{L} \text{ は同時 Lagrange 部分空間で } p = \dim \mathbb{L}_+,\ q = \dim \mathbb{L}_-\}\end{aligned} \tag{5.4}$$

とおこう。$\mathcal{Z}_{p,q}$ は対称形式 $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle_+$ に関する Lagrange 部分空間全体がなす Grassmann 多様体

$$\mathrm{LGr}^+(\mathbb{V}) = \mathrm{O}(\mathbb{V})/P^+ \tag{5.5}$$

の部分多様体と思ってもよいし、シンプレクティック形式 $\langle\!\langle\, , \rangle\!\rangle_-$ に関する Lagrange 部分空間全体がなす Grassmann 多様体

$$\mathrm{LGr}^-(\mathbb{V}) = \mathrm{O}(\mathbb{V})/P^- \tag{5.6}$$

の部分多様体と思ってもよい。ここに $P^\pm$ は V を安定にするような $\mathrm{O}(\mathbb{V})$ または $\mathrm{Sp}(\mathbb{V})$ の極大放物型部分群である。実はさらに両者は $\mathbb{V}$ の n 次元部分空間のなす Grassmann 多様体 $\mathrm{Grass}_n(\mathbb{V}) = \mathrm{GL}(\mathbb{V})/P$ の中に自然に埋め込めるが、次が成り立つ。

定理 5.3. (1) $\mathrm{LGr}^\pm(\mathbb{V}) \subset \mathrm{Grass}_n(\mathbb{V})$ を自然に部分多様体とみなすと、

$$\mathrm{LGr}^+(\mathbb{V}) \cap \mathrm{LGr}^-(\mathbb{V}) = \bigsqcup\nolimits_{p+q=n} \mathcal{Z}_{p,q}$$

であって、$\mathcal{Z}_{p,q}$ は $\mathrm{LGr}^\pm(\mathbb{V})$ の閉 $\mathrm{GL}(V)$-軌道である。

(2) 逆に $\mathrm{LGr}^\pm(\mathbb{V})$ の閉 $\mathrm{GL}(V)$-軌道は $\mathcal{Z}_{p,q}$ の形をしている。

(3) $\mathcal{Z}_{p,q} \ni \mathbb{L} \to \mathbb{L}_+ \in \mathrm{Grass}_p(V)$ は $\mathrm{GL}(V)$-同変な同型写像を与える。特に $\mathcal{Z}_{p,q}$ は非特異な射影多様体である。

今の設定では $K = \mathrm{GL}(V)$ であることに再度注意しておく。

次に写像 $\zeta : \mathfrak{N}^\circ_{p,q} \to \mathcal{Z}_{p,q}$ のファイバーを調べてみよう。任意にとった点 $\mathbb{L} \in \mathcal{Z}_{p,q}$ のファイバーは $(f_1, f_2) \in \mathfrak{N}$ であって、$\mathbb{L}_+ = \mathrm{Im}\, f_1$ および $\mathbb{L}_- = \mathrm{Im}\ {}^t f_2 = (\mathrm{Ker}\, f_2)^\perp$ が指定されたものの全体である。ところが $\mathbb{L}$ は同時 Lagrange 部分空間であるから $(\mathbb{L}_-)^\perp = \mathbb{L}_+$ である。したがってそのファイバーは

$$\zeta^{-1}(\mathbb{L}) = \mathrm{Hom}^\circ(U, \mathbb{L}_+) \oplus \mathrm{Hom}^\circ(V/\mathbb{L}_+, U)$$

に等しい。ただし Hom° は階数最大の線型写像を意味する。そこで $\mathbb{L}_+ \in \mathrm{Grass}_p(V) \simeq \mathcal{Z}_{p,q}$ と考えて、ファイバーが $\mathrm{Hom}(U, \mathbb{L}_+) \oplus \mathrm{Hom}(V/\mathbb{L}_+, U)$ であるような $\mathrm{Grass}_p(V)$ 上のベクトル束を考えよう。これは

$$\begin{array}{lll} \mathcal{T} & : & \mathrm{Grass}_p(V) \text{ 上の普遍束} \\ \mathcal{U}, \mathcal{V} & : & \text{ファイバーが } U, V \text{ の自明束} \\ \mathcal{Q} & : & \mathrm{Grass}_p(V) \text{ 上の普遍商束 } = \mathcal{V}/\mathcal{T} \end{array}$$

とおくと $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{T}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}, \mathcal{U})$ と書けるであろう。ここで普遍束 $\mathcal{T}$ は自明束 $\mathcal{V} = \mathrm{Grass}_p(V) \times V$ の部分ベクトル束で、次のように定義される。

$$\mathcal{T} = \{(\mathbb{E}, v) \in \mathrm{Grass}_p(V) \times V \mid v \in \mathbb{E}\} \tag{5.7}$$

さて、任意の点 $\mathbb{L}_+ \in \mathrm{Grass}_p(V)$ を取り $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{T}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}, \mathcal{U})$ のファイバーの点 $\alpha \oplus \beta \in \mathrm{Hom}(U, \mathbb{L}_+) \oplus \mathrm{Hom}(V/\mathbb{L}_+, U)$ を指定する。この点 $(\mathbb{L}_+; \alpha \oplus \beta)$ に対して $(f_1, f_2) \in \mathfrak{N}_{p,q}$ を

$$\begin{aligned} &f_1 : U \xrightarrow{\alpha} \mathbb{L}_+ \hookrightarrow V && \in \mathrm{Hom}(U, V) \\ &f_2 : V \twoheadrightarrow V/\mathbb{L}_+ \xrightarrow{\beta} U && \in \mathrm{Hom}(V, U) \end{aligned} \tag{5.8}$$

のようにして対応させる写像を $\nu : \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{T}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}, \mathcal{U}) \to \mathfrak{N}_{p,q}$ と書こう。
次の定理がこの節の主結果である。

定理 5.4. $p + q = n$ に対して $\mathfrak{N}_{p,q}$ を零錐 $\mathfrak{N}$ の既約成分とする。
(1) $\mathfrak{N}_{p,q}$ の特異点解消として $\mathcal{Z}_{p,q} = \mathrm{Grass}_p(V)$ 上のベクトル束 $\widetilde{\mathfrak{N}}_{p,q} = \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{T}) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{Q}, \mathcal{U})$ を取ることができる。特異点解消の写像は上で定義した $\nu : \widetilde{\mathfrak{N}}_{p,q} \to \mathfrak{N}_{p,q}$ で与えられる。
(2) 特異点解消 $\widetilde{\mathfrak{N}}_{p,q}$ には自然に $K \times H = \mathrm{GL}(V) \times (\mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(U))$ が作用しており、特に $K' = \mathrm{O}(U) \times \mathrm{O}(U)$ による圏論的商 $\widetilde{\mathfrak{N}}_{p,q}//K'$ を考えることができる。K' はファイバー方向のみに作用しているので商多様体はやはり $\mathrm{Grass}_p(V)$ 上のファイバー束

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_{p,q}//K' \to \mathcal{Z}_{p,q}$$

であるが、これは $\mathcal{Z}_{p,q} \subset \mathrm{LGr}^-(\mathbb{V})$ の余法束と K-同変同型である。さらに、この余法束は $\mathrm{Grass}_p(V)$ 上のベクトル束として $\mathrm{Sym}\,(\mathcal{T}) \oplus \mathrm{Sym}\,(\mathcal{Q}^*)$ と表すことができる。ここに Sym は二次の対称テンソル積を意味する。

この余法束と冪零軌道の θ-持ち上げとの関係を見ておこう。そのためにまず余法束からリー環 (の双対) へのモーメント写像の定義を思い出しておく。極大放物型部分群 $P = P^-$ のリー環を $\mathfrak{p}$ と書き

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}^+ \qquad (\text{ただし } \mathfrak{s} = \mathfrak{s}^+ \oplus \mathfrak{s}^- \text{ は } K \text{ の既約表現としての分解}) \tag{5.9}$$

を Levi 分解とする。今我々は L^+ を式 (1.4) のように定義し $V = L^+$ とみなしていることに注意しよう。$K_{\mathbb{R}} = \mathrm{U}(L^+)$ (ユニタリ群) は極大コンパクト部分群であって、その複素化が K である (したがって K は V を安定にし、P の Levi 部分群を定める)。
このとき Lagrange 部分空間のなす Grassmann 多様体 $\mathrm{LGr}(\mathbb{V}) = \mathrm{Sp}(\mathbb{V})/P$ $(P = P^-)$ の余接束は自然に

$$T^* \mathrm{LGr}(\mathbb{V}) = \mathrm{Sp}(\mathbb{V}) \times_P (\mathfrak{s}^+)^* = \mathrm{Sp}(\mathbb{V}) \times_P \mathfrak{s}^-$$

とみなすことができ、$G = \mathrm{Sp}(\mathbb{V})$ の作用を持つシンプレクティック多様体である。この同一視の下にモーメント写像 $\mu : T^* \mathrm{LGr}(\mathbb{V}) \to \mathfrak{s}$ が $[g, x] \in \mathrm{Sp}(\mathbb{V}) \times_P \mathfrak{s}^-$ に対して $\mu([g, x]) = g \cdot x$ で与えられる ($g \cdot x$ は随伴作用を表す)。モーメント写像の導出については例えば [CG97] を参照されたい。

定理 5.5. 特異点解消 $\widetilde{\mathfrak{N}}_{p,q}$ はモーメント写像および圏論的商に対して自然に振る舞う。つまり次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{\mathfrak{N}}_{p,q} \arrow[dl, "//K'"'] \arrow[d, "\nu"] \arrow[dr, "//K"] & \\
T^*_{\mathcal{Z}_{p,q}} \mathrm{LGr}(\mathbb{V}) \arrow[d, "\mu"'] & \mathfrak{N}_{p,q} \arrow[dl, "//K'"] \arrow[dr, "//K"'] & \{\mathrm{pt}\} \arrow[d] \\
\overline{\mathbb{O}_{p,q}} & & \{0\}
\end{tikzcd}$$

図式の可換性と ν が特異点解消であること $(+\alpha)$ から、モーメント写像 $\mu : T^*_{\mathcal{Z}_{p,q}} \mathrm{LGr}(\mathbb{V}) \to \overline{\mathbb{O}_{p,q}}$ が双有理射であることが従う。

6. θ-対応と θ-極大商：即成コース

この節では再びリー群は実リー群を考えることとする。もし混乱が生じるようなときには $G_{\mathbb{R}}$ のように強調して書く。

§1 のように実シンプレクティック空間 W に対してシンプレクティック群 $\mathbb{G} = \mathrm{Sp}(W)$ を取り、その (自明でない) 二重被覆を $\widetilde{\mathbb{G}} = \mathrm{Mp}(W)$ と書いてメタプレクティック群と呼ぶ。$\widetilde{\mathbb{G}}$ は Weil 表現 と呼ばれるユニタリ表現 ω を持つが、ω は二つの極小表現 $\omega^{\pm}$ の直和であり、その随伴サイクル[4]は

$$\mathcal{AC}\,(\omega^{\pm}) = [\overline{\mathbb{O}^{+}_{\mathrm{min}}}]$$

となっている。さて $\mathbb{G}$ の中で dual pair (G, G') を考えると、被覆写像 $\widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{G}$ による引き戻し $(\widetilde{G}, \widetilde{G}')$ は $\widetilde{\mathbb{G}}$ の中でふたたび dual pair をなす。Howe は [How89a], [How89b] によって $\widetilde{G}$ と $\widetilde{G}'$ の表現が Weil 表現 ω を介して対応することを示し、それを dual pair 対応、あるいは θ-対応 と呼んだ。この対応は次のようにして定義される。

まず ω^{∞} または $\omega_{\mathbb{K}}$ でそれぞれ ω の C^{∞}-ベクトルの全体および $\mathbb{K}$-有限ベクトルのなす Harish-Chandra 加群を表そう。

定義 6.1. π, π' をそれぞれ $\widetilde{G}, \widetilde{G}'$ の既約表現とする。このとき

$$\omega^{\infty} \twoheadrightarrow \pi \otimes \pi' \qquad (\widetilde{G} \times \widetilde{G}' \text{ の表現の射として})$$

となっていれば π と π' は θ-対応する という[5]。このとき対応は一対一であるので $\pi = \theta(\pi')$ または $\pi' = \theta(\pi)$ と書き、π を π' の θ-持ち上げ と呼ぶ。

定義から明らかなように π と π' が対応していれば、π, π' は ω^{∞} の既約商表現として実現されていなければならない。したがって、かならずしも $\widetilde{G}, \widetilde{G}'$ の表現すべてが対応に現れるわけではない。特に π は被覆写像 $\widetilde{G} \to G$ の核 $(\simeq \mathbb{Z}_2)$ 上で自明ではなく、そのような表現を genuine な表現と呼ぶ (もちろん π' についても事情は同じである)。

さて $\pi = \theta(\pi')$ となっているとき、

$$\Phi_{\pi'} = \{\varphi : \omega_{\mathbb{K}} \twoheadrightarrow \pi' : (\mathfrak{g}', \widetilde{K}')\text{-同変}\} = \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g}', \widetilde{K}')}(\omega_{\mathbb{K}}, \pi')$$

とおけば、$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ の表現として

$$\omega_{\mathbb{K}} \Big/ \bigcap_{\varphi \in \Phi_{\pi'}} \mathrm{Ker}\,\varphi = \Omega(\pi') \otimes \pi' \tag{6.1}$$

と分解され、$\Omega(\pi')$ は Harish-Chandra $(\mathfrak{g}, \widetilde{K})$-加群となる。この $\Omega(\pi')$ を θ-極大商と呼ぶ。以下に $\Omega(\pi')$ の性質を列挙しておく ([How89b])。

(1) $\Omega(\pi')$ は巡回的に生成される Harish-Chandra 加群であって、有限個の既約部分商表現を持つ。
(2) $\Omega(\pi')$ は唯一つの既約商表現を持ち、それは $\pi = \theta(\pi')$ と同型である。
(3) $\Omega(\pi')$ は包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の中心の同時固有空間である。(つまり無限小指標を持つ。)

以上 θ-対応にまつわる定義や対応の性質を概観したが、より詳しくは Howe の原論文やその解説 [SSS4] (特に松本久義氏による解説) を参考にして欲しい。

---

[4]随伴サイクルは随伴多様体の各既約成分に重複度を込めて考えたものである。

[5]ここでは C^{∞} 版を考えているが、全く同様に $\omega_{\mathbb{K}}$ を用いて Harish-Chandra $(\mathfrak{g}, K)$-加群の圏で考えることもできる。どちらで考えても対応する表現は同じである。

7. 自明な表現の θ-極大商と零錐

一般に $\widetilde{G}'$ は G' の非自明な被覆であるが、$\widetilde{G}' = G' \times \mathbb{Z}_2$ と直積に分解することがある。このとき $\widetilde{G}'$ は split しているという。$\widetilde{G}'$ が split している時 π' は G' の既約表現と $\mathbb{Z}_2$ の非自明な指標のテンソル積である。そこで G' の自明な表現をとり、対応する $\widetilde{G}'$ の genuine な表現を $\mathbf{1}^{\sim}$ とすると、その θ-極大商 $\Omega(\mathbf{1}^{\sim})$ を考えることができる。

この $\Omega(\mathbf{1}^{\sim})$ は零錐の代数幾何的な性質と密接な関係を持っているのだが、特に次の定理が成り立つ。

定理 7.1. dual pair (G, G') を $(\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}), \mathrm{O}(p,q))$ または $p+q$ が偶数であって $(\mathrm{O}(p,q), \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}))$ であるとする。このとき $\widetilde{G}'$ は split しているので θ-極大商 $\Omega(\mathbf{1}^{\sim})$ を考えることができる。また $\mathfrak{N}$ をこの dual pair に附随する零錐とし、$\Theta = \mathfrak{N}/\!/K'_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{s}$ を零錐のモーメント写像による像とする。

(1) $\Omega(\mathbf{1}^{\sim})$ の随伴多様体 $\mathcal{AV}(\Omega(\mathbf{1}^{\sim}))$ は Θ に一致する。

(2) $\Omega(\mathbf{1}^{\sim})$ の既約部分商表現を π とすると $\mathcal{AV}(\pi) \subset \Theta$ であって、Gelfand-Kirillov 次元 $\mathrm{Dim}\,\pi$ が既約成分の中で最大ならば随伴サイクル $\mathcal{AC}(\pi)$ における各サイクルの重複度は 1 である。特に $\pi = \theta(\mathbf{1}^{\sim})$ ととれば、$\mathcal{AV}(\theta(\mathbf{1}^{\sim})) \subset \Theta$ が成り立つ。

注意 7.2. この定理は (G, G') が Hermite 対称対型の既約な dual pair であって、さらに $\widetilde{G}'$ が split していれば成り立つ。ここで dual pair が Hermite 対称対型であるとは G または G' が Hermite 対称対型の非コンパクトリー群になっているときに言う。dual pair として現れる Hermite 対称対型のリー群は $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(r,s)$, $\mathrm{O}^*(2n)$, $\mathrm{O}(2,n)$ であるから、G, G' の一方がこれらの群であればよい。

証明. 証明のアイデアのみを紹介する。

まず $\widetilde{K}$ の表現として $\Omega(\mathbf{1}^{\sim}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{K'_{\mathbb{C}}}$ であることが自然に導かれる。定理の仮定の下で $K \times K'$ の表現として $\mathbb{C}[\mathfrak{N}] \simeq \mathcal{H}$ であるが、上の $\widetilde{K}$ 同型を利用して適当な次数付を構成し $(S(\mathfrak{g}), \widetilde{K})$ 加群としての同型 $\mathrm{gr}\,\Omega(\mathbf{1}^{\sim}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathfrak{N}]^{K'_{\mathbb{C}}}$ を証明すればよい。$\mathbb{C}[\mathfrak{N}]^{K'_{\mathbb{C}}}$ はアフィン商の定義から $\mathfrak{N}/\!/K'_{\mathbb{C}} = \Theta$ の関数環であることに注意しよう。これで (1) が証明される。

一方 π が既約部分商であれば、π から巡回的に生成される $\Omega(\mathbf{1}^{\sim})$ の部分表現 X_π を取り、$\mathrm{gr}\,X_\pi \hookrightarrow \mathrm{gr}\,\Omega(\mathbf{1}^{\sim}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathfrak{N}]^{K'_{\mathbb{C}}}$ を考えることにより随伴多様体は Θ に含まれることがわかる。ところが $\mathbb{C}[\mathfrak{N}]^{K'_{\mathbb{C}}} \simeq \mathcal{H}^{K'_{\mathbb{C}}}$ は $\widetilde{K}$ の表現としては重複度自由であることがわかるので重複度は 1 を越えない。このことと $\mathrm{Dim}\,\pi$ の最大性から Hilbert 多項式の最高次項は冪零軌道のそれと一致することが分かり、随伴サイクルに関する主張が従う。これで (2) が示された。 □

なお、安定域においては自明な表現のみでなく、既約な随伴多様体を持つような π' に対して

$$\mathcal{AV}(\theta(\pi')) \subset \overline{\theta(\mathbb{O}')} \qquad (\text{ただし } \mathcal{AV}(\pi') = \overline{\mathbb{O}'} \text{ とおいた}) \tag{7.1}$$

が成り立つ。これについては [NZ04, Proposition 3.12] を参照されたい。

8. 退化主系列表現と θ-極大商

この節では<u>n **を偶数として**</u> dual pair $(G, G') = (\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}), \mathrm{O}(m,m))$ の場合に退化主系列表現と θ-極大商、そして零錐の関係を述べる。もちろん他の dual pair や n が奇数の時についても同様の理論が成り立つことが期待されるが、まだ十分に解析が進んでいない。ただし他の dual pair について新手法が必要というわけではなく、単に計算をまだ行っていないだけの話である。特に

Hermite 対称対型の dual pair に対してはほぼ何の変更もなくここに書いたことが適用できるはずである。

n の偶奇にかかわらず dual pair $(G, G') = (\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(m, m))$ の場合には、二重被覆 $\widetilde{G}, \widetilde{G}'$ は共に split しており、前節で定義した θ-対応に現れる π, π' を G, G' に制限することにより G, G' の表現の対応を得ることができる。そこで最初から π, π' は G, G' の表現とし、θ-対応や θ-極大商についても G, G' の表現の範囲で考えることにする。

さて $V = \mathbb{R}^{2n}$ をシンプレクティック空間、$V = V_1 \oplus V_2$ を完全極分解とする。また $P = P_{\mathbb{R}} = \mathrm{Stab}_G(V_1)$ を V_1 を安定にする G の極大放物型部分群としよう[6]。P の Levi 分解は $P = \mathrm{GL}(V_1) \ltimes \mathrm{Sym}\,(V_1)$ で与えられることに注意する。そこで Levi 部分群 $\mathrm{GL}(V_1) \simeq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ の指標 $|a|^\nu = |\det a|^\nu$ $(a \in \mathrm{GL}(V_1))$ および $\mathrm{sgn}(a) = \mathrm{sgn}(\det a)$ $(a \in \mathrm{GL}(V_1))$ を取り、これを冪単根基に自明に拡張して P の指標とみなす。このとき $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ および $\nu \in \mathbb{C}$ に対して退化主系列表現

$$I^\varepsilon(\nu) = \{f : G \to \mathbb{C} : C^\infty \mid f(pg) = \mathrm{sgn}(p)^\varepsilon |p|^\nu f(g)\ (p \in P, g \in G)\}$$

が決まる (正規化されていない誘導)。G は右移動でこの主系列表現の空間に作用する。以下 $I^0(\nu) = I(\nu)$ と書くことにしよう。

次の Lee-Zhu による定理は退化主系列表現と θ-極大商の間の関係を与えてくれる。

定理 8.1 ([LZ97]). $\pi' = \mathbf{1}$ を $\mathrm{O}(m, m)$ の自明な表現とする。

(1) 安定域 $(2m \leq n)$ においては $\Omega(\mathbf{1})$ は既約であり、$\pi = \theta(\mathbf{1}) = \Omega(\mathbf{1})$ が成り立つ。

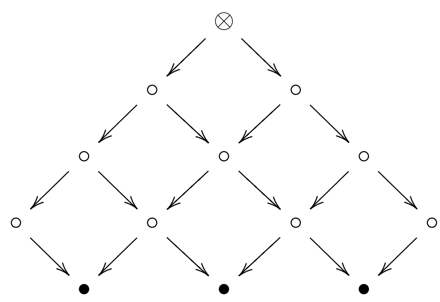
(2) $n \leq m$ のとき[7]、$\Omega(\mathbf{1})$ は P から誘導された退化主系列表現 $I(m)$ に一致する。この場合 $\Omega(\mathbf{1})$ は既約でなく、その既約部分表現の個数は

$$\begin{cases} n/2 \text{ 個} & m \text{ が奇数の時} \\ n/2 + 1 \text{ 個} & m \text{ が偶数の時} \end{cases}$$

となっており、すべてユニタリ表現である。

退化主系列 $I(m)$ の部分表現のなす Hasse 図式をここに書いておく ([Lee96] 参照[8])。

$n = 6$: $m \geq 7$ が奇数の時



$\bullet$: unitary , $\circ$: non-unitary , $\otimes$: unitary iff $m = n + 1$

[6] この放物型部分群の複素化と §5 で出てきた複素放物型部分群 $P^- = P^-_{\mathbb{C}}$ はもちろん $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ によって共役であるが、$P^- \cap \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = U(n)$ であり、ここで定義した $P_{\mathbb{R}}$ を実形としては持たない。

[7] これは逆方向の安定域である。

[8] [Lee96] では正規化された誘導による退化主系列を扱っているのでこの報告の $I(m)$ とはパラメータにズレがある。

$n=6$: $m \geq 6$ が偶数の時

$$\begin{tikzcd}
& & & \otimes \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
& & \circ \arrow[dl] \arrow[dr] & & \circ \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& \circ \arrow[dl] \arrow[dr] & & \circ \arrow[dl] \arrow[dr] & & \circ \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet
\end{tikzcd}$$

$\bullet$: unitary , $\circ$: non-unitary , $\otimes$: unitary iff $m=n$

退化主系列 $I(m)$ の構造は $m \geq n$ であれば $n=6$ の場合とほぼ同じで、m が偶数ならば底辺に $(n/2+1)$ 個の表現が並ぶピラミッド型、m が奇数ならば偶数の場合のピラミッドの最下行にもう一行 $n/2$ 個の表現を付け足したものになる。そこで、各既約部分商表現に次のように番号をふることにする。

まず m が奇数の時。ピラミッドの頂上 (第一行) を $\pi_{0,0}$ とおき、第 $(t+1)$ 行目に並んでいる表現を左から $\pi_{0,2t}, \pi_{2,2t-2}, \ldots, \pi_{2t,0}$ とおく。最後に、ピラミッドの最下段を越えてつけ加えた行 (第 $(n/2+2)$ 行目) の表現は左から $\pi_{1,n-1}, \pi_{3,n-3}, \ldots, \pi_{n-1,1}$ とする。

次に m が偶数の時。ピラミッドの頂上 (第一行) を $\pi_{1,1}$ とおき、$t \leq n/2$ に対しては、第 t 行目に並んでいる表現を左から $\pi_{1,2t-1}, \pi_{3,2t-3}, \ldots, \pi_{2t-1,1}$ とおく。ピラミッドの最下段、つまり $(n/2+1)$ 行目の表現は左から $\pi_{0,n}, \pi_{2,n-2}, \ldots, \pi_{n,0}$ とする。

もちろんこのようにして決まった表現 $\pi_{s,t}$ は m に依存していることに注意されたい。それを強調するときには $\pi^m_{s,t}$ で表すことにする。

定理 8.2. 退化主系列 $I(m)$ の既約部分商表現を上のように番号を付して $\{\pi_{s,t}\}$ とおく。

(1) 各既約成分の随伴多様体は既約であって $\mathcal{AV}(\pi_{s,t}) = \overline{\mathbb{O}_{s,t}}$ となる。特に m が奇数の時 $\mathcal{AV}(\theta(\mathbf{1})) = \{0\}$ (有限次元表現)、偶数の時 $\mathcal{AV}(\theta(\mathbf{1})) = \overline{\mathbb{O}_{1,1}}$ である。

(2) $p+q=n$ のとき、$\pi_{p,q}$ の随伴サイクルは重複度 1 であり、$\mathcal{AC}(\pi_{p,q}) = [\overline{\mathbb{O}_{p,q}}]$ となる。

$n=6$ の場合に、上に示した $I(m)$ の部分表現の構造を表す Hasse 図式に随伴多様体に対応する冪零軌道を上書きしたのが次の図である。

$n=6$: $m \geq 7$ が奇数の時

$$\begin{tikzcd}
& & & \mathbb{O}_{0,0} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
& & \mathbb{O}_{0,2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathbb{O}_{2,0} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& \mathbb{O}_{0,4} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathbb{O}_{2,2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathbb{O}_{4,0} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{O}_{0,6} \arrow[dr] & & \mathbb{O}_{2,4} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathbb{O}_{4,2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathbb{O}_{6,0} \arrow[dl] \\
& \mathbb{O}_{1,5} & & \mathbb{O}_{3,3} & & \mathbb{O}_{5,3} &
\end{tikzcd}$$

$n = 6 : m \geq 6$ が偶数の時

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbb{O}_{1,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
 & & \mathbb{O}_{1,3} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathbb{O}_{3,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \mathbb{O}_{1,5} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathbb{O}_{3,3} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathbb{O}_{5,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{O}_{0,6} & & \mathbb{O}_{2,4} & & \mathbb{O}_{4,2} & & \mathbb{O}_{6,0}
\end{tikzcd}$$

零錐の軌道の閉包関係を表す Hasse 図式との類似性は明らかであるが、m の偶奇にかかわらず最下段の 2 行だけが閉包関係 (の双対) とは異なる構造を示している。この最下段の 2 行に現れる表現は $I(m) = \Omega(\mathbf{1})$ の極大な Gelfand-Kirillov 次元を持つ表現達に一致しており、ちょうど Θ の既約分解の各成分に対応していることに注意しておく。

References

[CG97] Neil Chriss and Victor Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.

[DKP02] Andrzej Daszkiewicz, Witold Kraśkiewicz, and Tomasz Przebinda, *Dual pairs and Kostant-Sekiguchi correspondence. I*, J. Algebra **250** (2002), no. 2, 408–426.

[DKP05] Andrzej Daszkiewicz, Witold Kraśkiewicz, and Tomasz Przebinda, *Dual pairs and Kostant-Sekiguchi correspondence. II. Classification of nilpotent elements*, Cent. Eur. J. Math. **3** (2005), no. 3, 430–474 (electronic).

[Hel00] Sigurdur Helgason, *Groups and geometric analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 83, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions, Corrected reprint of the 1984 original.

[How83] Roger Howe, *Reciprocity laws in the theory of dual pairs*, Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982), Progr. Math., vol. 40, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 159–175.

[How89a] Roger Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), no. 2, 539–570.

[How89b] Roger Howe, *Transcending classical invariant theory*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), no. 3, 535–552.

[How95] Roger Howe, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond*, The Schur lectures (1992) (Tel Aviv), Israel Math. Conf. Proc., vol. 8, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1995, pp. 1–182.

[Kin04] Donald R. King, *Classification of spherical nilpotent orbits in complex symmetric space*, J. Lie Theory **14** (2004), no. 2, 339–370.

[Kos63] Bertram Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. **85** (1963), 327–404.

[KP79] Hanspeter Kraft and Claudio Procesi, *Closures of conjugacy classes of matrices are normal*, Invent. Math. **53** (1979), no. 3, 227–247.

[KP81] Hanspeter Kraft and Claudio Procesi, *Minimal singularities in* GL_n, Invent. Math. **62** (1981), no. 3, 503–515.

[KR71] B. Kostant and S. Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971), 753–809.

[KR90] Stephen S. Kudla and Stephen Rallis, *Degenerate principal series and invariant distributions*, Israel J. Math. **69** (1990), no. 1, 25–45.

[KV78] M. Kashiwara and M. Vergne, *On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials*, Invent. Math. **44** (1978), no. 1, 1–47.

[Lee96] Soo Teck Lee, *Degenerate principal series representations of* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$, Compositio Math. **103** (1996), no. 2, 123–151.

[Li89] Jian-Shu Li, *Singular unitary representations of classical groups*, Invent. Math. **97** (1989), no. 2, 237–255.

[LZ97] Soo Teck Lee and Chen-Bo Zhu, *Degenerate principal series and local theta correspondence. II*, Israel J. Math. **100** (1997), 29–59.

[LZ98] Soo Teck Lee and Chen-Bo Zhu, *Degenerate principal series and local theta correspondence*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 12, 5017–5046.

[Nis00a] Kyo Nishiyama, *Multiplicity-free actions and the geometry of nilpotent orbits*, Math. Ann. **318** (2000), no. 4, 777–793.

[Nis00b] Kyo Nishiyama, *Theta lifting of two-step nilpotent orbits for the pair* $\mathrm{O}(p,q) \times \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, Infinite dimensional harmonic analysis (Kyoto, 1999), Gräbner, Altendorf, 2000, pp. 278–289.

[Nis04] Kyo Nishiyama, *Classification of spherical nilpotent orbits for* $\mathrm{U}(p,p)$, J. Math. Kyoto Univ. **44** (2004), no. 1, 203–215.

[Nis05] Kyo Nishiyama, *A note on affine quotients and equivariant double fibrations*, Infinite dimensional harmonic analysis III, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005, pp. 197–212.

[NOZ06] Kyo Nishiyama, Hiroyuki Ochiai, and Chen-Bo Zhu, *Theta lifting of nilpotent orbits for symmetric pairs*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), no. 6, 2713–2734 (electronic).

[NZ04] Kyo Nishiyama and Chen-Bo Zhu, *Theta lifting of unitary lowest weight modules and their associated cycles*, Duke Math. J. **125** (2004), no. 3, 415–465.

[Oht05] Takuya Ohta, *Nilpotent orbits of* Z_4*-graded Lie algebra and geometry of moment maps associated to the dual pair* $(\mathrm{U}(p,q), \mathrm{U}(r,s))$, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), no. 3, 723–756.

[Pan99] Dmitri I. Panyushev, *On spherical nilpotent orbits and beyond*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (1999), no. 5, 1453–1476.

[VP94] È. B. Vinberg and V. L. Popov, *Invariant theory*, Algebraic geometry. IV (I. R. Shafarevich, ed.), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 55, Springer-Verlag, Berlin, 1994, pp. 123–278.

[SSS4] 第 4 回整数論サマースクール報告集 [高瀬幸一 (編)], **Weil 表現入門**, 1996.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University, Sakyo, Kyoto 606-8502, Japan

E-mail address: `kyo@math.kyoto-u.ac.jp`