Reductive Dual Pair と Weil 表現
— 一方が compact の場合 —

京都大学 総合人間学部
西山 享 (kyo@math.h.kyoto-u.ac.jp)

一年ほど前になるが、津田塾大学で行なわれていた現代数学史シンポジウムの会場で高瀬幸一氏より「整数論の若手のために Weil 表現の話を表現論的観点からやって欲しい」と依頼された。本来でしゃばりな性格と、一年あれば充分に勉強と準備ができるだろうとの腹づもりもあってこれを引き受けさせていただいた。もちろんこの腹づもりはとんでもない見当違いになってしまったが。

Howe duality の一番難しい部分、つまり non-compact な pair の場合を松本君に押しつけて西山は一方がコンパクトな場合だけを扱った。この場合にはコンパクト群の表現論の古典的な結果が豊富に使えるのでかなり詳しい計算が可能になる。高瀬氏からは「コンパクトの場合なら $Sp(2n,\mathbb{R}) \times O(k)$ と $U(p,q) \times U(k)$ の場合、特に後者はあまり popular でないので K-type の分解も含めて詳しく解説して欲しい」と頼まれたのだが、時間不足と力不足が相俟って結局 $Sp \times O$ の場合だけに落ち着いてしまったことを申し訳なく思っている。

この論説は §7 を除いて [Kashiwara-Vergne] と [Howe4, Howe6] の結果や論法の紹介である。できるだけ現代的な新しい見方をするように心がけたつもりだがもちろん原論文をひもとく方がよいに決まっている。その際にこの論説がいささかの役に立てればよいと思う。また初心者のために演習問題もつけてみた。これは渡辺隆夫さんと第 3 回サマースクール報告集の落合さん (あるいは荒川さん?) の講演録の影響である。

§7 ではユニタリ最高ウェイト表現の Gelfand-Kirillov 次元、 Bernstein 次数、随伴多様体などについて述べておいた。これらの事柄は専門家にはよく知られていると思われるが具体的に書かれることが少ない。特に今回 Bernstein 次数を計算してみて Selberg 積分の類似が現れることを確認したことは筆者にとっても意外なことで有意義であった。このような機会を与えて下さり、サマースクールの世話をして下さった高瀬さんと荒川さんに感謝します。また原稿の作成に当たって落合啓之、小林俊行、早田孝博、山下博の各氏に有益な助言と誤りの指摘をしていただいた。この四人の方にも感謝したい。

1 コンパクト群の表現についての若干の復習

G : コンパクト Lie 群とする。(この節だけの記号)

G の有限次元既約表現はユニタリでそれらは最高ウェイトによって分類できることが良く知られている (Cartan-Weyl の理論)。また複素代数群で G をコンパクト実形とするような群 $G_{\mathbb{C}}$ を考えると G の有限次元表現は $G_{\mathbb{C}}$ の正則な表現として一意に拡張される[1]。この他

[1] これは Weyl のユニタリ・トリックの基となる性質で最近では Flensted-Jensen によりもっと一般的に拡張されている。これを Flensted-Jensen duality と呼ぶ。これについては例えば昨年の第 3 回サマースクール報告集の落合氏の論説を参考にされたい。

に Young 図形による最高ウェイトの記述などを説明なしに用いることがある。以上の基本的な事項については例えば [Fulton-Harris], [Knapp], [岩堀] およびこの報告集の平賀氏の論説などを参照して欲しい。

$\widehat{G}$ を G の有限次元既約ユニタリ表現の同値類の集合とする。コンパクト群の既約ユニタリ表現は有限次元になることがよく知られているが、$\lambda \in \widehat{G}$ に対してその表現空間を V_λ と表す。

一般に G の (有限次元とは限らない) ユニタリ表現 (ρ, H) の既約分解は抽象的には次のように記述できる。

$$H \simeq \sum_{\lambda \in \widehat{G}}^{\oplus} \mathrm{Hom}_G(V_\lambda, H) \otimes V_\lambda \simeq \sum_{\lambda \in \widehat{G}}^{\oplus} (H \otimes V_\lambda^*)^G \otimes V_\lambda$$

同型は具体的に

$$\sum_{\lambda \in \widehat{G}}^{\oplus} (H \otimes V_\lambda^*)^G \otimes V_\lambda \ni \sum h \otimes v^* \otimes v \mapsto v^*(v) h \in H$$

で与えられ、$(H \otimes V_\lambda^*)^G$ は V_λ の H における重複度を表わしている。

測度空間 X に G が右から作用していて G-(準) 不変な測度が存在する場合 $H = L^2(X)$ は G の右移動でユニタリ表現になる。特にこの場合には

$$\begin{aligned} (H \otimes V_\lambda^*)^G &= (L^2(X) \otimes V_{\lambda^*})^G \\ &\simeq \{ f : X \to V_{\lambda^*} \mid f(xg) = \lambda^*(g)^{-1} f(x) \ (g \in G) \} =: L^2(X; V_{\lambda^*}) \end{aligned}$$

となっていることに注意せよ。上の分解を書き直すと $L^2(X)$ の分解は次のようになる。

$$\begin{aligned} L^2(X) &\simeq \sum_{\lambda \in \widehat{G}}^{\oplus} L^2(X; V_{\lambda^*}) \otimes V_\lambda \\ &\simeq \sum_{\lambda \in \widehat{G}}^{\oplus} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}} \left(V_{\lambda^*}, L^2(X; V_{\lambda^*}) \right) \end{aligned}$$

この最後の変形によって上記分解の λ 成分への射影作用素が積分の形で次のように与えられる。

$$P_\lambda : L^2(X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}} \left(V_\lambda^*, L^2(X; V_\lambda^*) \right), \quad (P_\lambda f)(v^*)(x) = \int_G f(xg) \lambda^*(g) v^* dg$$

ここで例えば V_λ の基底を $\{ e_i^\lambda \mid 1 \le i \le \dim V_\lambda \}$、その双対基底を $\{ e_i^{\lambda^*} \mid 1 \le i \le \dim V_\lambda \} \subset V_\lambda^* = V_{\lambda^*}$ とおけば、

$$L^2(X) \ni f(x) \leftrightarrow \sum_{\lambda \in \widehat{G}} \sum_{i=1}^{\dim V_\lambda} \left(\int_G f(xg) \lambda^*(g) e_i^{\lambda^*} dg \right) \otimes e_i^\lambda \in \sum_{\lambda \in \widehat{G}} L^2(X, V_{\lambda^*}) \otimes V_\lambda$$

がわかる。この式は (行列成分の直交関係式を認めれば) 実質的に Peter-Weyl の定理とほぼ同じものである。

Exercise 1.1 (1) 上の対応が同型を与えていることを確認せよ。

(2) $X = G$ のとき $L^2(G; V_{\lambda^*})$ には左から G が作用する。この左からの作用で $L^2(G; V_{\lambda^*}) \simeq V_{\lambda^*}$ となることを示せ。これより上の分解が実質的には Peter-Weyl の定理 (の主要な一部) を与えていることを確かめよ。 Peter-Weyl の定理は $L^2(G)$ の上で $G_{左} \times {}_{右}G$ が dual pair になっていることを主張している。

2 Weil 表現の tensor 積とその分解 その 1

$Sp(2n, \mathbb{R})$ の Weil 表現を $(L, L^2(\mathbb{R}^n))$ と書く[2]。この k 階の tensor 積表現を考えることにしよう。表現論において tensor 積の分解を考える目的は歴史的には次のようなものである。

1. たくさんの unitary highest weight 表現を生産すること。これはもともと Weil 表現の K-weight が下に有界 (というよりも正) なのでそれを tensor しても同じ、したがって最高 (あるいは最低) ウェイト表現が既約成分に現れることがわかる。したがって分解は “生産的” である[3]。

2. 多重調和関数 (pluriharmonic functions) の構造の理解に役立つ。これについては一言で説明するのは難しい。この関数空間の構造が tensor 積の分解 (あるいは表現の lowest K-type) を記述することはこの後解説される。

さて tensor 積表現の表現空間は

$$\otimes^k L^2(\mathbb{R}^n) \simeq L^2(\mathbb{R}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^n) \simeq L^2(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^k) \simeq L^2(M(n, k; \mathbb{R}))$$

となり、表現の作用素は $(L, L^2(\mathbb{R}^n))$ とほぼ同じように書ける。この作用を書き下すために $Sp(2n, \mathbb{R})$ を次のように実現しておこう。

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \left\{ g \in SL(2n, \mathbb{R}) \mid {}^t g J g = J \right\}, \ J = \begin{bmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix}$$

すると表現の作用素は次のように表すことができる[4]。

$$L^{\otimes k}\left(\begin{bmatrix} a & \\ & {}^t a^{-1} \end{bmatrix}\right) f(x) = (\det a)^{k/2} f({}^t a x) \ (a \in GL(n, \mathbb{R})) \tag{2.1}$$

$$L^{\otimes k}\left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{bmatrix}\right) f(x) = \exp(-i \operatorname{Tr} {}^t x b x / 2) f(x) \ ({}^t b = b) \tag{2.2}$$

$$L^{\otimes k}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) f(x) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{nk/2} \int_{M(n,k;\mathbb{R})} \exp(i \operatorname{Tr} {}^t x y) f(y) dy \tag{2.3}$$

[2] この書き方は正確ではない。実際は二重被覆、 metaplectic 群の表現であって、この表現を決めることが theta 級数の変換公式に出てくるある種の定数の決定 (Gauss 和で書けたりする) と関係する。従って表現の構成自身、自明なものではない。この部分については高瀬氏の一連の講演で解説された。本報告集の高瀬氏の論説を参照されたい。しかしここでは敢えて $Sp(2n, \mathbb{R})$ と書き、以下記号上は二重被覆群を持ち出さないことにする。

[3] 既約なユニタリ最高ウェイト表現の分類の問題は今や完全に解決されている。これについては [EHW], [Jakobsen], [Parthasarathy] などを参照されたい。

[4] $Sp(2n, \mathbb{R})$ は次にあげる三種類の元で生成されるので、表現はこれによって完全に決定される。二ヶ所に現れる根号が $Sp(2n, \mathbb{R})$ の二重被覆の表現であることを物語っている。

このときサイズが $k \times k$ の直交群 $O(k)$ が $L^2(M(n,k;\mathbb{R}))$ に右から作用して、しかもその作用は $Sp(2n,\mathbb{R})$ の作用と可換である。この可換性は最初の二つの作用素では自明であるが、Fourier 変換との可換性も Tr が (意味を持つ限り) 行列の積の順序によらないことからすぐにわかる。実はこの $O(k)$ との可換性が表現の分解に不可欠となる。

Exercise 2.1 $O(k)$ と $Sp(2n,\mathbb{R})$ の作用の可換性を確かめよ。

Example 2.2 特に $k=1$ の時は通常の Weil 表現そのもので、このとき $O(1)=\mathbb{Z}_2$ だからこれが表現の intertwiner になっている。したがって Weil 表現は二つの既約成分に分解する。

$$L = L_+ \oplus L_-$$

この分解において $O(1)$ の $\mathbb{R}^n$ への作用は $\{\pm 1\}$ の掛け算になっているので、既約部分空間がそれぞれ偶関数・奇関数の空間になっていることは見やすい[5]。

このような $O(k)$ の作用による tensor 積表現の分解をしてみようというのがこの節と次節の目標。重要なことは

$$Sp(2n,\mathbb{R}) \times O(k) \subset Sp(2nk,\mathbb{R}) \text{ が dual pair になっている}$$

ということである。

Definition 2.3 ([Howe2], [Howe4]) (reductive) dual pair とは、 $Sp(2n,\mathbb{R})$ の二つの reductive な部分群 (G,G') であって、G の $Sp(2n,\mathbb{R})$ における commutant subgroup が G'、G' の commutant subgroup が G となっている時にいう。

Remark. 現在では dual pair はもっと広い意味に使われている。ここで $Sp(2n,\mathbb{R})$ が特別に選ばれているのは Weil 表現を持つためで、本報告集の宇澤氏の論説でも出てくるようにその代わりとして『極小表現』をとりその中で dual pair を考えるような場合もある。あるいは純粋に作用素環の中で互いに commutant algebra になっているようなものを dual pair と呼ぶこともある。

抽象的なレベルで Howe correspondence について述べておこう。

Theorem 2.4 ([Howe4]) $(G,G') \subset Sp(2n,\mathbb{R})$ が dual pair で G' がコンパクトとする。このとき上の分解

$$L \simeq \sum_{\lambda \in \widehat{G'}}^{\oplus} \mathrm{Hom}_{G'}(V_\lambda, L) \otimes V_\lambda$$

において $\mathrm{Hom}_{G'}(V_\lambda, L) = L^2(\mathbb{R}^n;\lambda^*)$ は G のユニタリ表現であって既約となる。また

$$(G')^\wedge \ni \lambda \mapsto L^2(\mathbb{R}^n;\lambda^*) \in G^\wedge$$

は $L^2(\mathbb{R}^n;\lambda^*) \neq 0$ ならば単射的な対応を与える。(**Howe の対応**)

[5] ここでも $O(1)=\mathbb{Z}_2$ の metaplectic 群への引き戻しは位数 4 の巡回群 $\mathbb{Z}_4$ と同型になっているので intertwiner は形式的には 4 次元あるように見える。しかし対応する表現のうち二つは "消える"。これは例えば $f(-x)=if(x)$ を満たす L^2 関数が 0 しかないことと対応している。以下このような注意は書かないが一方がコンパクトであるような dual pair においてはコンパクト群の二重被覆群は考える必要がない。

Remark. 実は一方がコンパクトの時 G は Hermitian type であって、 $L^2(\mathbb{R}^n;\lambda^*)\neq 0$ はすべて正則関数の空間に実現できることがわかる。両方が non-compact の場合にも同様の対応が成立する ([Howe5])。松本氏の論説を参考にして欲しい。また [Howe1] では primitive な形で $O(p,q)\times SL(2,\mathbb{R})$ の場合が扱われていて理解するのに役立つだろう。

Example 2.5 $U(p,q)\times U(1)\subset Sp(2n,\mathbb{R})\quad (n=p+q, p\geq q)$ は dual pair である ($U(1)$ は $U(p,q)$ の中心)。$U(1)$ は可換群なので既約表現は全て一次元であって $U(1)\ni e^{i\theta}\mapsto e^{ik\theta}$ ($k\in\mathbb{Z}$) という形に表せる。これを λ_k と書くことにする。$Sp(2n,\mathbb{R})$ の Weil 表現 $(L,L^2(\mathbb{R}^n))$ をこの dual pair で分解すると、

$$(L,L^2(\mathbb{R}^n))\simeq \sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\oplus} L^2(\mathbb{R}^n,\lambda_{-k})\otimes\lambda_k$$

と $\mathbb{Z}$ をパラメータとして既約分解されるが、これらの既約成分はすべてゼロではなく **ladder 表現**と呼ばれている。

話を元に戻そう。$Sp(2n,\mathbb{R})$ の Weil 表現の k 階 tensor 積の分解を考えることは結局 dual pair $Sp(2n,\mathbb{R})\times O(k)\subset Sp(2nk,\mathbb{R})$ を考えて大きな Sp の Weil 表現をこの pair によって分解することと同じである。この分解を抽象的に書き下すと次のようになる。

$$L^2(M(n,k;\mathbb{R}))\simeq \sum_{\lambda\in O(k)^\wedge}^{\oplus} L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)\otimes V_{\lambda^*}$$

ここに

$$\begin{aligned}&L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)=\\ &\quad\{f:M(n,k;\mathbb{R})\to V_\lambda \mid f(xh)=\lambda(h)^{-1}f(x)\quad (x\in M(n,k;\mathbb{R}), h\in O(k))\}\end{aligned}$$

は既約な $Sp(2n,\mathbb{R})$ の表現で、その重複度が $\dim V_{\lambda^*}$ である。

3 正則関数によって実現される最高ウェイト表現

目標：上の分解に現れる $L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)$ を Siegel 上半空間上の正則関数の空間に実現し、それが最高ウェイト表現になることを確認する。

$G=Sp(2n,\mathbb{R})$ と書く。**Siegel 上半空間** $\mathfrak{H}_n$ は対称空間 $\mathfrak{H}_n\simeq G/K$ (K は極大コンパクト部分群 $\simeq U(n)$) である。ここでは極大コンパクト部分群 K は次のように実現する。

$$K=\left\{\left[\begin{array}{cc} A & B\\ -B & A\end{array}\right]\middle|\ A+iB\in U(n)\right\}$$

G の Lie 環を $\mathfrak{g}$、その複素化を $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ とおく。$\mathfrak{k},\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ なども同様とする。$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を Cartan 分解とすれば $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ には K が adjoint で作用している。$\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ は K の表現として既約ではなく、二つの既約成分 $\mathfrak{p}^\pm$ に分解する。つまり $\mathfrak{g}_\mathbb{C}=\mathfrak{p}^-\oplus\mathfrak{k}_\mathbb{C}\oplus\mathfrak{p}^+$ となっている (Exercise 7.4 参照)。

Exercise 3.1 $G/K \simeq \mathfrak{H}_n = \{z \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ であることを次のようにして示せ。
(1) $G = Sp(2n, \mathbb{R})$ は $\mathfrak{H}_n$ に次のように正則に作用する。

$$G \ni g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{に対して} \quad \mathfrak{H}_n \ni z \mapsto g \cdot z = (az + b)(cz + d)^{-1} \in \mathfrak{H}_n$$

この作用が well-defined であって、しかも推移的であることを確かめよ。(Hint) 推移的であることを示すには本質的には岩澤分解を使うことになると思う。
(2) $\sqrt{-1}\, 1_n \in \mathfrak{H}_n$ の固定部分群が K になっていることを確認せよ。したがって $G/K \simeq \mathfrak{H}_n$ が従う。同型は (1) でやったように $G/K \ni gK \leftrightarrow g \cdot \sqrt{-1}\, 1_n \in \mathfrak{H}_n$ で与えられる。

Exercise 3.2 (1) K の G における正規化部分群は K 自身に一致することを示せ。つまり $K = \{g \in G \mid gKg^{-1} = K\}$ が成り立つ。[Hint] **Cartan 分解**[6]$G = KAK$ を用いよ ([Knapp, Theorem 5.20])。ただし A は G の対角行列からなる split Cartan 部分群である。
(2) このことから次の写像が well-defined な全単射を与えることを示せ。

$$G/K \ni gK \mapsto gKg^{-1} \in \{K \text{ の } G\text{-共役部分群 }\}$$

実は任意の極大コンパクト部分群は G 共役であることが知られているので、このことは「G の極大コンパクト部分群全体の空間に複素構造を定めたもの」が Siegel 上半空間であることを示している。
(3) p-進体上の代数群の場合 Siegel 上半空間にあたるものは何か考察せよ。

$\mathfrak{H}_n$ 上の正則関数の空間に実現された $Sp(2n, \mathbb{R})$ の表現は現在では cohomological induction として書けるようだが[7]、ここでは正則な通常の誘導表現の形に書いておこう。(τ, U_τ) を $K_\mathbb{C} = GL(n, \mathbb{C})$ の正則な有限次元既約表現とする。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mathfrak{H}_n; \tau) &= \{f : G \to U_\tau : C^\infty \mid f(gk) = \tau(k^{-1}) f(g), R(X) f = 0 \ (X \in \mathfrak{p}^-)\} \\ &\simeq \{f : \mathfrak{H}_n \to U_\tau : \text{ holomorphic }\} \end{aligned}$$

ここに $R(X)$ は $X \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ による右微分を指す。すなわち $X \in \mathfrak{g}$ のとき

$$R(X) f(g) = \frac{d}{dt} f(g \exp tX)\bigg|_{t=0}$$

と微分により定義してこれを複素線型に $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ に拡張したものである。左正則表現で G は $\mathcal{O}(\mathfrak{H}_n; \tau)$ に作用する。この作用は G 上ではなく Siegel 上半空間の関数として書いておくと見なれた形になる。

$$(T(\tau)(g) f)(z) = \tau({}^t(cz + d)) f((az + b)(cz + d)^{-1}) \quad \left(z \in \mathfrak{H}_n, g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \qquad (3.1)$$

[6]Lie 環の Cartan 分解とは少し違うが、本質的には同じことである。ここで A の Lie 環が $\mathfrak{p}$ における極大可換部分環 (Cartan 部分代数) になっている。

[7]離散系列とその極限が cohomological induction として書けることはよく知られている。これについては例えば [Knapp-Vogan, Theorem 8.2], [Wallach, Theorem 6.7.6] を参照されたい。他のユニタリな特異最高ウェイト表現についても lowest K-type が 1 次元の場合には cohomological induction として書けるようである (小林俊行氏談)。lowest K-type が 1 次元でないときはまだよくわからないのが現状のようだ。
詳しくは [Adams] を参照して下さい。

Exercise 3.3 (1) $G = Sp(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})$ とする。この場合に $\mathcal{P} : C^\infty(G;\tau) \ni f \mapsto F \in \mathcal{O}(\mathfrak{H},\tau)$ を

$$F(z) = \tau(a) f\left(\left[\begin{array}{cc} a & x \\ 0 & a^{-1} \end{array}\right]\right) \ (z = ax + a^2 i \quad (a > 0))$$

で決める。ただし $\tau(e^{i\theta}) = e^{im\theta}$ のとき $\tau(a) = a^m$ $(a \in \mathbb{C}^\times)$ であって

$$C^\infty(G;\tau) = \{f : G \to U_\tau : C^\infty \mid f(gk) = \tau(k)^{-1} f(g)\}$$

さてこのとき

$$\mathfrak{k}_\mathbb{C} = \left\{\left[\begin{array}{cc} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{array}\right] \middle| \theta \in \mathbb{C}\right\},\ \mathfrak{p}^\pm = \left\{\left[\begin{array}{cc} \varphi & \pm i\varphi \\ \pm i\varphi & -\varphi \end{array}\right] \middle| \varphi \in \mathbb{C}\right\}$$

と決めれば $R(X)f(g) = 0$ $(X \in \mathfrak{p}^-)$ であることと $F(z)$ が Cauchy-Riemann の関係式を満たすことは同値であることを示せ。

(2) 上の線型写像 $\mathcal{P}$ が G-同変になるように $\mathcal{O}(\mathfrak{H},\tau)$ 上に G の表現を構成すると作用が上に書いた式 (3.1) と一致することを示せ。

(3) $F(z) = \tau((z+i)/i)$ とおくと $F(z)$ は $X \in \mathfrak{p}^+$ の作用で消える、つまり最高ウェイトベクトルになることを示せ。

$\mathcal{O}(\mathfrak{H}_n;\tau)$ はほとんどの場合に既約で正則離散系列表現を与えることが知られている。τ の最高ウェイトが小さい時には既約とは限らないが、ただ一つの既約最高ウェイト表現を部分表現として含む[8]。この表現はユニタリで、無限小指標が特異になることから**ユニタリ特異最高ウェイト表現**などと呼ばれる。 Weil 表現の既約成分もそのようなユニタリ最高ウェイト表現の一つである。

いささか天下りだが intertwining 作用素 $\mathcal{F}_P : L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda) \to \mathcal{O}(\mathfrak{H}_n;\tau\otimes\det^{-k/2})$ を次のような形で定義しよう。

$$P : M(n,k;\mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(U_\tau, V_\lambda) \simeq U_{\tau^*}\otimes V_\lambda : \text{ 多項式写像に対して}$$
$$(\mathcal{F}_P f)(z) = \int_{M(n,k;\mathbb{R})} e^{(i/2)\ \mathrm{Tr}\,({}^t xzx)} P(x)^* f(x) dx \quad (f \in L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)) \qquad (3.2)$$

この作用素 $\mathcal{F}_P$ が $Sp(2n,\mathbb{R})$ の表現の intertwining 作用素になるためには $P(x)$ は次のような条件を満たさねばならないことがわかる。

(1) $\quad P(xh) = \lambda(h)^{-1}P(x) \quad (h \in O(k))$
(2) $\quad P(ax) = P(x)\tau(a)^{-1} \quad (a \in GL(n,\mathbb{C}))$
(3) $\quad P(x)$ は $O(k)$-harmonic である

簡単に説明しておくと、まず $P(x)^* \in U_\tau\otimes V_\lambda^* \simeq \mathrm{Hom}(V_\lambda, U_\tau)$ であるから、$\mathcal{F}_P f \in \mathcal{O}(\mathfrak{H}_n;\tau)$ となることがわかる。(1) は一般に V_λ 値の L^2 関数 $f(x)$ を考えた時、$\lambda(h)f(xh)$ –

[8] $\mathcal{O}(\mathfrak{H}_n;\tau)$ は一般化された Verma 加群の双対になっている。したがってただ一つの既約商ではなくただ一つの部分表現を持つ。この双対は次の paring によって与えられる。

$$\langle f, D\otimes v\rangle = \langle (R(D)f)(1), v\rangle_\tau \quad (f \in \mathcal{O}(\mathfrak{H}_n;\tau), D\otimes v \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\otimes_{U(\mathfrak{k}_\mathbb{C}\oplus\mathfrak{p}^-)} U_\tau)$$

$f(x)$ $(h \in O(k))$ の $\mathcal{F}_P$ による像がゼロになるための条件である。したがってその核が丁度 $L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)$ を定義する条件 $\lambda(h)f(xh) = f(x)$ に一致する。条件の (2) は次にあげる $g(a)$ のタイプの行列に関する作用と $\mathcal{F}_P$ の可換性から必要である。なお $t(b)$ とは $\mathcal{F}_P$ の定義の仕方から自然に可換になる。

$$g(a) = \begin{pmatrix} a & \\ & {}^t a^{-1} \end{pmatrix} \ (a \in GL(n,\mathbb{R})),\ t(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ & 1 \end{pmatrix} \ ({}^t b = b)$$

最後の (3) は次の元 σ の作用 (Fourier 変換であった; (2.3) 式を参照) との可換性に必要であるが、これは少し難しい。Exercise 3.5 を参考にして欲しい。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Theorem 3.4 ([Kashiwara-Vergne]) ゼロではない調和多項式 $P(x)$ が上の (1) – (3) の条件を満たしているとする。このとき

$$\mathcal{F}_P : L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{H}_n; \tau \otimes \det{}^{-k/2})$$

は intertwining 作用素であって $\mathcal{O}(\mathfrak{H}_n; \tau \otimes \det{}^{-k/2})$ のただ一つの最高ウェイトを持つ部分表現との間の単射的な同型を与える。したがって特に $L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)$ は既約である[9]。

Remark. ここで得られた既約表現 $L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)$ は $k \leq 2n-1$ なら特異無限小指標を持つ。更に次のことがわかっている。

$k \geq 2n+1 \implies L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)$ はすべて正則離散系列表現
$k = 2n \implies L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)$ は正則離散系列表現かその極限
$k \leq 2n-1 \implies L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)$ は離散系列ではない

Exercise 3.5 $\mathcal{F}_P$ が σ の作用と可換であることを次のようにして確認せよ。

(1) Parseval の等式と次の調和多項式 P に対する Fourier 変換の等式を利用して可換性を示せ。

$$\left(e^{(i/2)\mathrm{Tr}\,{}^t xzx} P(x)^*\right)^\wedge(y) = \left(\det \tfrac{z}{i}\right)^{-k/2} e^{(i/2)\mathrm{Tr}\,{}^t y(-z^{-1})y} P(-z^{-1}y)^*$$
$$(x, y \in M(n,k;\mathbb{R}), z \in \mathfrak{H}_n)$$

ただし $F^\wedge(y)$ は $\mathbb{R}^{nk} \simeq M(n,k;\mathbb{R})$ 上の通常の意味の Fourier 変換を表す。

(2) 上の等式を示すためには $z = i\alpha^2$ $({}^t\alpha = \alpha)$ の場合に示してそれを解析接続すればよい。$z = i\alpha^2$ とおくと上の等式は

$$\left(\exp\{-(1/2)\ \mathrm{Tr}\,{}^t xx\} P(x)^*\right)^\wedge(y) = \exp\{-(1/2)\ \mathrm{Tr}\,{}^t yy\} P(-iy)^*$$

[9] $L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)$ の既約性は既に dual pair の一般論 (定理 2.4) でわかっていた部分であるが、[Kashiwara-Vergne] ではこの具体的な表現の実現を用いて既約性を示している。ここでは歴史的なことも配慮して重複して述べておく。

に帰着することを示せ。
(3) 上の等式は y について解析的なので $y = i\beta$ の時に示せればよい。調和関数の平均値の定理

$$P(\beta)^* = \frac{\Gamma(nk/2)}{2\pi^{nk/2}} \int_\Omega P(r\omega + \beta)^* d\omega \ (r > 0,\ d\omega \text{ は } (nk-1)\text{-次元単位球面 } \Omega \text{ の面素})$$

を用いて (2) の式を証明せよ。

Exercise 3.6 $P(x)$ などの記号は上の通りとする。
(1) $\mathcal{C} = \{\xi \in M(n,n;\mathbb{R}) \mid {}^t\xi = \xi, \xi \geq 0\}$ を正の半定符号対称行列の錐として、$\mathcal{C}_k = \{\xi \in \mathcal{C} \mid \operatorname{rank}\xi \leq k\}$ とおく。このとき

$$\begin{array}{cccc} Q: & M(n,k;\mathbb{R})/O(k) & \longrightarrow & \mathcal{C}_k \\ & \cup & & \cup \\ & x & \longmapsto & \xi(x) = x^t x \end{array}$$

は $GL(n,\mathbb{R})$-同型になることを示せ。
(2) $f(x) \in L^2(M(n,k;\mathbb{R}); V_\lambda)$ に対して $P(x)^* f(x)$ は右移動で $O(k)$-不変であることを示せ。したがって $\varphi(x^t x) = P(x)^* f(x)$ は $\mathcal{C}_k$ 上の関数と思うことができる。
(3) $\mathcal{C}_k$ 上の測度 $d_k\xi$ を $\mathcal{C}_k$ 上の関数 φ に対して

$$\int_{\mathcal{C}_k} \varphi(\xi) d_k\xi = \int_{M(n,k;\mathbb{R})} \varphi(x^t x) dx$$

で決める。このとき

$$\mathcal{F}_P f(z) = \int_{\mathcal{C}_k} e^{(i/2)\operatorname{Tr}\xi\cdot z} \varphi(\xi) d_k\xi$$

と書ける。したがって $\mathcal{F}_P$ は $\varphi(\xi)d_k\xi$ の Fourier-Laplace 変換と思うことができる。

4 調和多項式の空間

上の定理で $\mathcal{F}_P$ の像がゼロになる、つまり自明な $P(x)$ しか存在しないと面白くない。また自明でないような調和多項式がどれくらいあるかも気になる。$\mathcal{O}(\mathfrak{H}_n;\tau)$ には部分表現がただ一つしかないので埋め込みの像は一意的である。したがってこのような調和多項式は一つしかないのではないか？という予測もつくであろう。そこでこのような多項式写像 $P(x)$ を決定するのがこの節の目標である。

$\mathcal{H} = (O(k)$-調和多項式の空間$)$ とする。一般に K をコンパクト群として、その有限次元表現 V を考える。このとき定数項のない K-不変式の表す微分作用素によって消滅するような多項式を **K-調和多項式**と呼ぶ (例えば [Helgason] を見よ; またもっと低レベルの解説が [西山 1] にある)。つまり

$$f(v) \in \mathbb{C}[V] \text{ が調和 } \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \partial(h)f = 0 \ (\forall h \in S(V)_+^K)$$

今の場合には $O(k)$ 不変式が二次式で生成されることから

$$\mathcal{H} = \left\{ f : M(n,k;\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \,\middle|\, \Delta_{i,j} f = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_{i,\nu} \partial x_{j,\nu}} f = 0 \ (1 \le i \le j \le n) \right\}$$

となっている。上の (1)–(3) を満たすような多項式写像 $P(x)$ を得るためにはこの $\mathcal{H}$ を $GL(n,\mathbb{C}) \times O(k,\mathbb{C})$ の joint action で分解すればよい。

Theorem 4.1 ([Howe6, Proposition 3.6.3]) $\mathcal{H}$ は $GL(n,\mathbb{C}) \times O(k,\mathbb{C})$ の表現として重複度 1 であって、次のように分解する。

$$\mathcal{H} = \sum_{D}^{\oplus} U_{\tau(D)} \otimes V_{\lambda(D)}$$

ただし D は Young 図形であって深さ[10]$(= \ell(D))$ は $\min\{k,n\}$ 以下、また $D = (\mu_1, \cdots, \mu_k)$ を分割とするとき、もし $\ell(D) > k/2$ なら $\mu_j = 1$ $(\ell(D) \ge j > k - \ell(D))$ を満たすものを動く。

$$\tau(D) = (\mu_1, \cdots, \mu_n), \quad \lambda(D) = \begin{cases} (\mu_1, \cdots, \mu_k) & (\ell(D) \le k/2) \\ (\mu_1, \cdots, \mu_{k-\ell(D)}) & (\ell(D) > k/2) \end{cases}$$

は $GL(n,\mathbb{C})$ および $O(k,\mathbb{C})$ の最高ウェイトを表す[11]。

Theorem 4.2 (1) $M(n,k;\mathbb{C})$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]$ は調和多項式と $O(k,\mathbb{C})$-不変式との積で書ける:

$$\mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})] = \mathcal{H} \cdot \mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]^{O(k,\mathbb{C})}$$

このとき $\lambda \in O(k,\mathbb{C})^\wedge$ に対して $O(k,\mathbb{C})$ の右作用に関する λ 成分は

$$\mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})](\lambda) = \mathcal{H}(\lambda) \cdot \mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]^{O(k,\mathbb{C})}$$

となっているが $\mathcal{H}(\lambda)$ は前定理で述べたように $GL(n,\mathbb{C}) \times O(k,\mathbb{C})$ の作用で既約であって

$$\mathcal{H}(\lambda) = (\mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})](\lambda) \text{ の最低次数の斉次多項式全体})$$

と表すことができる。

---

[10] Young 図形の深さは行の数である。 D と分割 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_k)$ を同一視する時には $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \cdots \ge \mu_l > 0 = \mu_{l+1} = \cdots = \mu_k$ という具合に 0 を付け足すことがある。このとき $\ell(D) = \ell(\mu) = l$ (0 でない μ_i の個数) となる。

[11] $SO(k)$ の有限次元既約表現は最高ウェイトで決まるが、$O(k)$ は連結でないので少し表現の記述が厄介である。ここでは表現の記述は [Howe6, §3.6.2] によっている。$SO(k)$ への制限について書いておくと、

- $\ell(D) = l < k/2$ なら $V_{\lambda(D)}$ は $SO(k)$ に制限しても既約で、 $D = (\mu_1, \cdots, \mu_l)$ は $SO(k)$ の表現の最高ウェイトを表す。
- $\ell(D) = k/2$ なら $V_{\lambda(D)}$ を $SO(k)$ に制限したものは可約で、二つの既約成分を持つ。その二つの既約成分の最高ウェイトは $(\mu_1, \cdots, \pm\mu_{k/2})$ である。
- $\ell(D) = l > k/2$ なら $V_{\lambda(D)}$ は $SO(k)$ に制限しても既約で、 $D' = (\mu_1, \cdots, \mu_{k-l})$ は $SO(k)$ の表現の最高ウェイトを表す。またこのとき $O(k)$ の表現として $V_{\lambda(D)} = V_{\lambda(D')} \otimes \det$ である。

(2) $k > 2n$ なら上の積は tensor 積になる。

$$\mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})] = \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]^{O(k,\mathbb{C})}$$

ついでなので $O(k,\mathbb{C})$ の不変多項式環の構造についてちょっと述べておこう。

$$\widetilde{\xi}_{i,j}(x) = \sum_{\nu=1}^{k} x_{i,\nu}x_{j,\nu} \quad (x \in M(n,k;\mathbb{C}),\ 1 \le i,j \le n)$$

とおくと $\widetilde{\xi}_{i,j} \in \mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]^{O(k,\mathbb{C})}$ であって古典的な不変式論の結果よりこれらは不変式環の生成元になっている：

$$\mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]^{O(k,\mathbb{C})} = \mathbb{C}[\widetilde{\xi}_{i,j} \mid 1 \le i,j \le n]$$

$n \times k$ 行列の全体から対称行列 $\mathrm{Sym}(n)$ への写像 Q を

$$\begin{array}{cccc} Q: & M(n,k;\mathbb{C}) & \to & \mathrm{Sym}(n) \\ & \cup & & \cup \\ & x & \mapsto & x\,{}^t x \end{array}$$

で定義する (Exercise 3.6 参照)。$Q(ax) = aQ(x)^t a$ $(a \in GL(n,\mathbb{C}))$ および $Q(xh) = Q(x)$ $(h \in O(k,\mathbb{C}))$ であることに注意しよう。上の不変式環の生成元の具体的な形を見ることにより次の写像が全射であることがすぐにわかる。

$$Q^* : \mathbb{C}[\mathrm{Sym}(n)] \to \mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]^{O(k,\mathbb{C})} : \text{ surjective } GL(n,\mathbb{C})\text{-homomorphism}$$

Theorem 4.3 (1) $GL(n,\mathbb{C})$ 加群として $\mathbb{C}[\mathrm{Sym}(n)]$ および $\mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]^{O(k,\mathbb{C})}$ は次のように分解する。

$$\mathbb{C}[\mathrm{Sym}(n)] \simeq \sum_{D,\ell(D)\le n}^{\oplus} U_{\tau(2D)}, \quad \mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]^{O(k,\mathbb{C})} \simeq \sum_{E,\ell(E)\le \min\{n,k\}}^{\oplus} U_{\tau(2E)}$$

(2) $GL(n,\mathbb{C})$ 加群として

$k \ge n$ のとき　$\mathbb{C}[\mathrm{Sym}(n)] \simeq \mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]^{O(k,\mathbb{C})}$,
$k < n$ のとき　$\mathbb{C}[\mathrm{Sym}(n)] \not\simeq \mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]^{O(k,\mathbb{C})}$。

特に不変式 $\{\widetilde{\xi}_{i,j} \mid 1 \le i \le j \le n\}$ は $k \ge n$ なら代数的に独立で、 $k < n$ なら従属である。

上の定理 4.1 からほとんど明らかではあるが、最後に問題となっていた定理 3.4 に出てくる多項式写像 $P : M(n,k;\mathbb{C}) \to V_{\lambda^*} \otimes U_\tau$ についてコメントしておこう。定理 3.4 によって要求されている条件は調和性と $GL(n;\mathbb{C}) \times O(k;\mathbb{C})$ 共変性であった。つまり

$$\begin{aligned} & P \in (\mathcal{H} \otimes (V_{\lambda^*} \otimes U_\tau))^{GL(n;\mathbb{C})\times O(k;\mathbb{C})} \\ & = \sum_D \big((V_{\lambda(D)} \otimes U_{\tau(D)}) \otimes (V_{\lambda^*} \otimes U_\tau)\big)^{GL(n;\mathbb{C})\times O(k;\mathbb{C})} \\ & = \sum_D \big(V_{\lambda(D)} \otimes V_{\lambda^*}\big)^{O(k;\mathbb{C})} \otimes \big(U_{\tau(D)} \otimes U_\tau\big)^{GL(n;\mathbb{C})} \\ & \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & \text{if } \lambda = \lambda(D) \text{ and } \tau^* = \tau(D) \text{ for } \exists D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

したがって $P \neq 0$ となるような多項式が存在するのは $(\lambda^*, \tau) = (\lambda(D)^*, \tau(D)^*)$ の時で、このような P は定数倍を除いて一意的である。

5 Weil 表現の tensor 積の分解 その 2

目標： Weil 表現を infinitesimal に Lie 環の表現として考えて tensor 積を分解する。その際調和多項式の空間が表現の lowest K-type として捉えられることを示す。

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ を Schwartz 空間とする。この空間には自然に $G = Sp(2n, \mathbb{R})$ の Lie 環の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ が働くが、その作用を書き下してみる。

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \left[\begin{array}{c|c} E_{i,j} & 0 \\ \hline 0 & -{}^tE_{i,j} \end{array}\right] \longmapsto x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\delta_{i,j} \\ B_{i,j} &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & E_{i,j} + E_{j,i} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \longmapsto -\sqrt{-1}\, x_i x_j \\ C_{i,j} &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline E_{i,j} + E_{j,i} & 0 \end{array}\right] \longmapsto -\sqrt{-1}\, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

ここで $E_{i,j}$ は (i,j) 成分だけが 1 であるような行列単位を表す。

Exercise 5.1 微分表現を具体的に計算せよ。このうち $A_{i,j}, B_{i,j}$ については表現の定義式 (2.1) および (2.2) を直接微分して計算できる。 $C_{i,j}$ については

$$\mathrm{Ad}\sigma(B_{i,j}) = -C_{i,j},\ \sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であることと σ の作用、つまりフーリエ変換により多項式を掛けることと微分をすることが互いに入れ代わることに注意すればわかる。

このままでは極大コンパクト群 K の作用が見難いので更にちょっと工夫をする (例えば [Howe-Tan, §III.2.1] を見よ)。以下のような表現の実現方法は **Fock type の実現**と呼ばれる。それに対して今までやってきたような L^2 関数による実現を **Schrödinger type の実現**と呼ぶ。

$$a_i = (x_i - \partial/\partial x_i)\,,\ a_i^* = (x_i + \partial/\partial x_i)$$

と書こう。このとき $v = \exp(-|x|^2/2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して、写像 Φ を次のように定義する。

$$\Phi : \mathbb{C}[a_i \mid 1 \leq i \leq n] \ni p(a_1, \cdots, a_n) \longmapsto p(a_1, \cdots, a_n)v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

a_i^* は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に微分作用素として自然に作用しているが、この作用を Φ で引き戻すと、

$$a_i^* v = 0, \quad [a_i^*, a_j] = 2\delta_{i,j}$$

だから、 a_i^* は $\mathbb{C}[a_i \mid 1 \leq i \leq n]$ に $2\partial/\partial a_i$ として働く。以下 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の作用を $\mathbb{C}[a_i \mid 1 \leq i \leq n]$ 上の微分作用素として書き下してみよう。

$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の生成元は

(1) $A_{i,j} - A_{j,i}$ $(i \neq j)$ と
(2) $B_{i,j} - C_{i,j}$ の二通り。

(1) の場合、引き戻した多項式環 $\mathbb{C}[a_i \mid 1 \leq i \leq n]$ 上の作用は次のようになる。

$$\begin{aligned} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} &= \frac{a_i + a_i^*}{2} \cdot \frac{a_j^* - a_j}{2} \quad \text{だから} \\ x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{1}{2}(a_i a_j^* - a_i^* a_j) \leftrightarrow a_i \frac{\partial}{\partial a_j} - \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right) a_j \end{aligned}$$

(2) の場合、$B_{i,j} - C_{i,j}$ を引き戻すと、同様な計算で

$$-\sqrt{-1}\left(x_i x_j - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) \leftrightarrow -\sqrt{-1}\left(a_i \frac{\partial}{\partial a_j} + \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right) a_j\right)$$

(1), (2) より結局 $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の生成元として多項式環上の微分作用素

$$a_i \frac{\partial}{\partial a_j} + \frac{1}{2}\delta_{i,j}$$

がとれることがわかる。この微分作用素たちは $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ を生成するが、 1/2 で "繰り込まれている"(renormalized) ことに注意せよ。また $\mathfrak{k}$ の中心の元は (標準的にとれば)

$$-\sqrt{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial a_j} + \frac{n}{2}\right)$$

に対応している。

$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の生成元は

(3) $A_{i,j} + A_{j,i}$ と
(4) $B_{i,j} + C_{i,j}$ の二通り。

(3) の場合：

$$x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \leftrightarrow -\frac{1}{2} a_i a_j + 2\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}$$

(4) の場合：

$$-\sqrt{-1}\left(x_i x_j + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) \leftrightarrow -\sqrt{-1}\left(\frac{1}{2} a_i a_j + 2\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}\right)$$

となるから $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の生成元として

$$a_i a_j, \quad \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j}$$

がとれることがわかる。ここで $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ のウェイトを考えれば結局

$$\mathfrak{p}^- \Leftrightarrow \{a_i a_j\}, \quad \mathfrak{p}^+ \Leftrightarrow \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} \right\} \tag{5.1}$$

となっていることがわかる。

k 階の tensor 積を作ると

$$\begin{aligned} L^2(M(n,k;\mathbb{R})) \supset \mathcal{S}(M(n,k;\mathbb{R})) \supset \mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{R})]e^{-\mathrm{Tr}\,{}^t xx/2} \\ = \Phi\left(\mathbb{C}[a_{i,j} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le k]\right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

であって $\mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{R})]e^{-\mathrm{Tr}\,{}^t xx/2}$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群になることがわかる。もちろんこの作用を引き戻して $\mathbb{C}[a_{i,j} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le k]$ も同型な $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群である。

Lemma 5.2 $Sp(2nk, \mathbb{R})$ のユニタリ表現 $L^2(M(n,k;\mathbb{R}))$ の Harish-Chandra $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群[12]は $\mathbb{C}[a_{i,j} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le k]$ に同型である。

この時

$$(\text{lowest } K\text{-type}) \Leftrightarrow \mathfrak{p}^+ \text{ の作用で消える}$$

が成立するが、Φ を用いてこれを引き戻すと

$$\mathbb{C}[a_{i,j} \mid {\scriptstyle 1 \le i \le n, 1 \le j \le k}] \text{ の元 } f \text{ が } \mathfrak{p}^+ \text{ の作用で消える} \Leftrightarrow f \text{ は } O(k)\text{-調和多項式 i.e., } f \in \mathcal{H}$$

となる。従って Theorem 4.2 により

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[a_{i,j} \mid {\scriptstyle 1 \le i \le n, 1 \le j \le k}] &= \mathcal{H} \cdot \mathbb{C}[a_{i,j} \mid {\scriptstyle 1 \le i \le n, 1 \le j \le k}]^{O(k)} \\ &= \sum_{D, \ell(D) \le \min\{n,k\}}^{\oplus} \mathcal{H}(\lambda(D)) \cdot \mathbb{C}[a_{i,j} \mid {\scriptstyle 1 \le i \le n, 1 \le j \le k}]^{O(k)} \end{aligned} \tag{5.3}$$

一方 $\mathcal{H}(\lambda(D)) \simeq V_{\lambda(D)} \otimes U_{\tau(D) + \frac{k}{2}\mathbf{1}}$ なので[13]、$U_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}}$ を lowest K-type とする $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ の既約最高ウェイト表現を $L(\tau(D) + \frac{k}{2}\mathbf{1})$ と書けば

$$\mathcal{H}(\lambda) \cdot \mathbb{C}[a_{i,j} \mid {\scriptstyle 1 \le i \le n, 1 \le j \le k}]^{O(k)} = V_\lambda \otimes L(\tau(D) + \tfrac{k}{2}\mathbf{1})$$

である。ただし $\mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1)$ と書いた。もちろん $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群として

$$L(\tau(D) + \tfrac{k}{2}\mathbf{1}) = L^2(M(n,k;\mathbb{R}) : \lambda^*)_K$$

が成り立つ[14]。ここで G の表現 V に対して V_K は V の K-有限ベクトルの全体を表す。

[12] Harish-Chandra 加群については本報告集の平賀氏の論説を参考にされたい。

[13] $K_{\mathbb{C}} \simeq GL(n, \mathbb{C})$ の作用が renormalize されているので $\frac{k}{2}\mathbf{1}$ だけのウェイトのずれが起こっている。ここで $\mathbf{1} = (1, 1, \cdots, 1)$ である。

[14] $L^2(M(n,k;\mathbb{R}); \lambda) \simeq \mathcal{O}(\mathfrak{H}_n; \tau \otimes \det^{-k/2})$ であった。ここで $\det^{-k/2}$ は $K_{\mathbb{C}}$ -weight として $-\frac{k}{2}\mathbf{1}$ ではなく $\frac{k}{2}\mathbf{1}$ を持つことに注意せよ。

今 $k>2n$ とせよ。この時は Theorem 4.2 により上の積は tensor 積になる。

$$\mathbb{C}[a_{i,j}]=\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}[a_{i,j}]^{O(k)}=\sum_{D}^{\oplus}V_{\lambda(D)}\otimes\left(U_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}}\otimes\mathbb{C}[a_{i,j}]^{O(k)}\right)$$

従って

$$\begin{aligned}L(\tau(D)+\tfrac{k}{2}\mathbf{1}) &= U_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}}\otimes\mathbb{C}[a_{i,j}]^{O(k)}\\ &= \begin{cases}U_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}}\otimes\displaystyle\sum_{E,\ell(E)\le n}^{\oplus}U_{\tau(2E)} & (K_{\mathbb{C}}=GL(n,\mathbb{C})\text{ 加群として})\\ U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\otimes_{U(\mathfrak{p}^{+}\oplus\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})}U_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}} & ((\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},K)\text{ 加群として})\end{cases}\end{aligned}$$

この場合には $L(\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1})$ は**正則離散系列表現**になることが知られている。離散系列表現に関しては [西山 2], [Schmid], [Varadarajan] とそこにあがっている文献を参照されたい。

この式から容易に正則離散系列表現の K-type が書き下せる。一般の離散系列表現の K-type を与える公式としては有名な **Blattner の公式**がある。これについては例えば [Knapp, p. 736], [Knapp-Vogan, (5.108b)], [Hecht-Schmid] などを見られたい。しかしこの公式は K-type の重複度を交代和として与えるもので実用的なものではない。上の具体的な実現では $U_{\tau(D)+\frac{k}{2}\mathbf{1}}\otimes U_{\tau(2E)}$ が分解できれば K-type が具体的に書き下せることに注意しておく[15]。

標語：調和多項式は Fock type の表現の実現をした時 lowest K-type を与える。

6　再生核

再生核は保型関数の解析的理論において重要な役割を果たす (cf. [清水, §2.2, §2.3])。ここでは再生核が結局表現の最高ウェイトベクトル (の Fourier 変換) であることを確認しておこう。

まず記号を復習する。§4 でやったように $P(x)$ を $M(n,k;\mathbb{R})$ 上の調和多項式で $O(k)\times GL(n,\mathbb{C})$ の作用に関して (λ,τ)-共変性を持つものとする。$P\neq 0$ となるためには Young 図形 D が存在して $(\lambda,\tau)=(\lambda(D),\tau(D)^{*})$ となることが必要十分であった (cf. Theorem 4.1)。この $P(x)$ に対して Fourier 変換 $\mathcal{F}_P$ を (3.2) 式のように決めておく。

Definition 6.1 $\mathfrak{H}_n\times\mathfrak{H}_n$ 上の $U_\tau^{*}\otimes U_\tau$-値関数 $K_D(z,w)$ が次の性質を持つ時に**再生核**と呼ぶ。

(1) $K_D(z,w)^{*}=K_D(w,z)$

(2) $\forall u\in U_\tau$ に対して $K_D(z,w)u$ は $z\in\mathfrak{H}_n$ の関数として U_τ-値正則関数である。つまり $K_D(z,w)u\in\mathcal{O}(\mathfrak{H}_n;\tau)$。

(3) $L_\tau=L(\tau+\frac{k}{2}\mathbf{1})\subset\mathcal{O}(\mathfrak{H}_n;\tau)$ を最高ウェイト表現とする。このとき $\forall f(z)\in L_\tau$ と $\forall u\in U_\tau$ に対して

$$\langle f(w),u\rangle_{U_\tau}=\langle f(z),K_D(z,w)u\rangle_{L_\tau}$$

[15] この差は丁度 Steinberg の公式 [Humphreys, §24.4] と Littlewood-Richardson の係数を用いた tensor 積の分解の記述 [Macdonald, §I.9] の差と同じようなものといえる。

が成り立つ。ただし L_τ のユニタリ内積 $\langle , \rangle_{L_\tau}$ は $L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)$ の標準的な L^2 内積 $\langle , \rangle_{L^2_\lambda}$ を用いて

$$\langle f(z), g(z)\rangle_{L_\tau} = \langle \mathcal{F}_P^{-1} f(x), \mathcal{F}_P^{-1} g(x)\rangle_{L^2_\lambda}$$

と決める。

Remark. [Kashiwara-Vergne] では再生核は $K_\lambda(z,w)$ と記されているが、 λ と τ は Young 図形 D を用いて同一視されるのでここでは $K_D(z,w)$ と書いた。

Exercise 6.2 再生核は unique であることを示せ。(cf. [清水, p. 51])

Theorem 6.3 上の記号の下に

$$K_D(z,w) = \int_{M(n,k;\mathbb{R})} e^{(i/2)\mathrm{Tr}\,{}^t x(z-\overline{w})x} P(x)^* P(x) dx$$

とおくとこれが再生核を与える。

Proof. (1), (2) は明らか。 (3) を確かめる。 $u \in U_\tau$ とする。 $f(z) \in L_\tau \subset \mathcal{O}(\mathfrak{H}_n;\tau)$ なので $\exists \varphi(x) \in L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)$ が存在して $\mathcal{F}_P \varphi = f$ となっている。従って

$$\begin{aligned} \langle f(z), K_D(z,w)u\rangle_{L_\tau} &= \langle (\mathcal{F}_P\varphi)(z), K_D(z,w)u\rangle_{L_\tau} \\ &= \langle \varphi(x), (\mathcal{F}_P)^{-1} K_D(z,w)u\rangle_{L^2_\lambda} \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} K_D(z,w)u &= \int_{M(n,k;\mathbb{R})} e^{(i/2)\mathrm{Tr}\,{}^t xzx} P(x)^* \left(e^{-(i/2)\mathrm{Tr}\,{}^t x\overline{w}x} P(x)u\right) dx \\ &= \mathcal{F}_P \left(e^{-(i/2)\mathrm{Tr}\,{}^t x\overline{w}x} P(x)u\right)(z) \end{aligned}$$

だから結局

$$\begin{aligned} (\text{上式}) &= \langle \varphi(x), e^{-(i/2)\mathrm{Tr}\,{}^t x\overline{w}x} P(x)u\rangle_{L^2_\lambda} \\ &= \int_{M(n,k;\mathbb{R})} e^{-(i/2)\mathrm{Tr}\,{}^t x\overline{w}x} \langle \varphi(x), P(x)u\rangle_{V_\lambda} dx \\ &= \int_{M(n,k;\mathbb{R})} e^{-(i/2)\mathrm{Tr}\,{}^t x\overline{w}x} \langle P(x)^*\varphi(x), u\rangle_{U_\tau} dx \\ &= \left\langle \int_{M(n,k;\mathbb{R})} e^{(i/2)\mathrm{Tr}\,{}^t xwx} P(x)^*\varphi(x) dx, u \right\rangle_{U_\tau} \\ &= \langle \mathcal{F}_P\varphi(w), u\rangle_{U_\tau} = \langle f(w), u\rangle_{U_\tau} \end{aligned}$$

が確かめられる。(内積は第一成分について歪線型になるようにとった。) ∎

上の証明で導いたように

$$K_D(z,w)u = \mathcal{F}_P\left(e^{-(i/2)\mathrm{Tr}\,{}^t x\overline{w}x} P(x)u\right)(z)$$

である。特に $w=i$, $u=u_\tau$ を U_τ の最高ウェイトベクトルとすれば

$$K_D(z,i)u_\tau = \mathcal{F}_P\left(e^{-(1/2)\mathrm{Tr}\,{}^t xx} P(x)u_\tau\right)(z)$$

ここで $e^{-(1/2)\mathrm{Tr}\,{}^t xx}P(x)u_\tau$ は §5 の (5.2) および (5.3) 式により明らかに $L^2(M(n,k;\mathbb{R});V_\lambda)$ の最高ウェイトベクトルになる。従って $K_D(z,i)u_\tau$ は最高ウェイトベクトルの Fourier 変換として表されることがわかる。

Exercise 6.4 $w \neq i$ のとき $K_D(z,w)u_\tau$ の意味を考えよ。(cf. Exercise 3.2)

実は

$$K_D(z,w) = \alpha\,\tau\left(\frac{z-\overline{w}}{2i}\right)$$

であることがわかっている。ここに $\alpha \in \mathbb{R}$ は

$$\alpha = \frac{\|e^{-(1/2)\mathrm{Tr}\,{}^t xx}P(x)u_\tau\|^2_{L^2_\lambda}}{\|u_\tau\|^2_\tau}$$

で与えられる。

7 随伴多様体、Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数

この節では Howe の対応という主題からは少し逸れて今までの結果の表現論的な応用について述べる。数論にのみ興味を持つ読者はこの項をとばしても差し支えない。

この節では以下 $n \geq 2$ とする。($n=1$ の場合は $SL(2,\mathbb{R})$ の表現の話になるのでよく知られている)

7.1 定義と基本的な性質

前節まででユニタリ最高ウェイト表現の具体的な構成を行ってきたが、既約なユニタリ最高ウェイト表現の分類の完成によってそのような表現はここで構成したようなものですべて尽きることが知られている ([EHW], [Jakobsen], [Parthasarathy])。そこで以下ではそのような表現について表現の随伴多様体、 Gelfand-Kirillov 次元、 Bernstein 次数を求めることを考える。このような例を計算することは宇澤達氏の極小表現を扱った論説や、松本久義氏の non-compact なタイプの Howe の対応の解説を理解する上でも役に立つと思われる。

まず基本的な定義をしておこう。一般に G を半単純な Lie 群、 K をその極大コンパクト部分群とする。一般的な設定に慣れない方は前節までの記号で $G=Sp(2n,\mathbb{R})$ として差し支えない。 V を $(\mathfrak{g}_\mathbb{C},K)$ 加群で有限生成としよう。Gelfand-Kirillov 次元は V の漸近的な

『大きさ』を測るもので関数次元 (関数空間の base 空間の次元) と言ってもよい。具体的には次のように定義する。

V_0 を V の有限次元部分空間で K-不変かつ V の生成元を含むとしよう。この時展開環 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の自然な次数付け

$$U_l(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \{X \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \mid X = \sum_{t \le l} X_{i_1} \cdots X_{i_t} \ (X_{i_j} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\}$$

に対して

$$V_l = U_l(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) V_0 \quad (l \ge 0)$$

とおく。これは明らかに V の K-不変な次数付けを与えている。この次数付けから決まる次数付き加群を

$$\operatorname{gr} V = \bigoplus_{l=0}^{\infty} V_l / V_{l-1} \, (V_{-1} = (0))$$

と書く。$\operatorname{gr} V$ は自然に $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \operatorname{gr} U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-加群になっている。さて

$$h(t) = \sum_{l=0}^{t} \dim \operatorname{gr}_l V \ (t \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$$

とおくと $h(t)$ は t が十分に大きい時 t の多項式になることが Hilbert 多項式の一般論によりわかる。そこで

$$h(t) = \frac{b_d}{d!} t^d + (\text{lower terms}) \tag{7.1}$$

と書くとこの最高次の項は最初の有限次元の空間 V_0 の選び方によらずに決まる。

Definition 7.1 ([Vogan1]) 式 (7.1) で決まる d を V の **Gelfand-Kirillov 次元**と呼び $d = \operatorname{Dim} V$ と表す。また b_d を V の **Bernstein 次数**と呼んで $\operatorname{Deg} V$ と表す。

Remark. Gelfand-Kirillov 次元を表す記号 $\operatorname{Dim} V$ はかなり一般的に使われているが Bernstein 次数を表す記号 $\operatorname{Deg} V$ はこの論説だけで使うもので一般的ではない。また Bernstein 次数のことを**重複度**ということもある。

Gelfand-Kirillov 次元は定義より非負整数であるが、 Bernstein 次数も正整数になることが知られている (例えば [堀田, 系 27.1] 参照)。

次に随伴多様体を定義しよう。$\operatorname{gr} V$ は $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-加群なのでその零化イデアルを $\operatorname{Ann}(\operatorname{gr} V)$ と書く。

$$\operatorname{Ann}(\operatorname{gr} V) = \{X \in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \mid X \cdot \operatorname{gr} V = (0)\}$$

Definition 7.2 ([Vogan2], [Joseph]) 対称代数 $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ 上の多項式環と同一視して $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ における $\operatorname{Ann}(\operatorname{gr} V)$ の共通零点集合を (V_0 の取り方によらずに決まるので) $\operatorname{Ass} V = \{f \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \mid X(f) = 0 \ (\forall X \in \operatorname{Ann}(\operatorname{gr} V))\}$ と書き、 V の**随伴多様体**と呼ぶ。

以下 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ と $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は Killing 形式によって同一視して $\operatorname{Ass} V \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ とみなすことにする。また一般に $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分集合 $\mathfrak{s}$ に対して $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$ で $\mathfrak{s}$ に含まれるべき零元の全体を表すことにする。すると $\operatorname{gr} V$ の作り方から次のことが成立する。

Theorem 7.3 ([Vogan2, Th. 8.4]) V を既約 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群、 V の定める原始イデアルを I とし、 I の随伴多様体を $\operatorname{Ass} I$ と書く。

(1) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ を Cartan 分解とする時 $\operatorname{Ass} V$ は $\mathcal{N}_{\mathfrak{p}_C}$ の有限個の $K_{\mathbb{C}}$-軌道の和である。

(2) $\operatorname{Ass} I \cap \mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}} \supset \operatorname{Ass} V$ である。

(3) $\operatorname{Ass} I$ は $G_{\mathbb{C}}$ のある巾零軌道 $\mathcal{O}$ の閉包になっていることが知られているが、$\mathcal{O} \cap \mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}} = \coprod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_i$ を $K_{\mathbb{C}}$ 軌道への分解とした時 $\operatorname{Ass} V$ の最大次元の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道は $\{\mathcal{O}_i \ (1 \le i \le r)\}$ に含まれる。

(4) $1 \le \forall i \le r$ に対して $\dim \mathcal{O} = 2 \dim \mathcal{O}_i = 2 \operatorname{Dim} V$ が成り立つ。

V がここで扱うユニタリ最高ウェイト表現の場合は $\exists \mathcal{O}_V \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}}$: $K_{\mathbb{C}}$-軌道が存在して $\operatorname{Ass} V = \overline{\mathcal{O}_V}$ が成り立つことが (計算してみれば) わかる。そこで我々はこの $\mathcal{O}_V$ を V **に対応する巾零** $K_{\mathbb{C}}$**-軌道**と呼ぶ。

随伴多様体の一般論については [Vogan2], [Ohta], [松本] などを参照されたい。また離散系列表現の随伴多様体、 Gelfand-Kirillov 次元については [Yamashita] が参考になるだろう。

7.2 Weil 表現の Gelfand-Kirillov 次元・ Bernstein 次数と随伴多様体

さていよいよ上に挙げた不変量を実際に計算してみよう。次節で一般的にユニタリ最高ウェイト表現について計算するがこの節では理解しやすいように一番慣れ親しんだ (?) Weil 表現について計算しておく。

まず Weil 表現の $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群は Fock type の実現を使うと多項式環 $\mathbb{C}[a_i \mid 1 \le i \le n]$ 上に実現できていたことを思い出そう。このとき

$$(L_+)_K = (\text{偶数次数多項式}),\ (L_-)_K = (\text{奇数次数多項式})$$

となっている。ただし $(L_\pm)_K$ は K-有限ベクトルの全体を表し、 $L_\pm$ の Harish-Chandra $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群になっている。このとき前節で用いた K-不変な生成部分空間としては

$$(L_+)_{K,0} = \mathbb{C} = (\text{定数多項式}),\ (L_-)_{K,0} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} a_i$$

がとれる。同じことなので以下 $V = (L_+)_K$ の場合のみを考えよう。今の場合 V_0 は $\mathfrak{p}^+$ の作用 (二階の微分作用素であった) で消えているので V_l を定義するのに $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ ではなく $U(\mathfrak{p}^-) = S(\mathfrak{p}^-)$ を考えれば十分である。 $\mathfrak{p}^-$ の元は L_K 上に二次の多項式の掛け算として作用するので

$$V_l = U_l(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) V_0 = U_l(\mathfrak{p}^-) V_0 = (2l \text{ 次以下の多項式}) \cap V$$

となっている。したがって $\mathrm{gr}_l V = (2l$ 次斉次の多項式$)$ となる。

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad h(t) &= \sum_{l=0}^{t} \mathrm{gr}_l V = \sum_{l=0}^{t} \binom{n+2l-1}{n-1} \\ &= \frac{2^{n-1}}{n!} t^n + O(t^{n-1}) \end{aligned}$$

これより $\mathrm{Dim}\, L_+ = n,\ \mathrm{Deg}\, L_+ = 2^{n-1}$ である。一方同様の計算で $\mathrm{Dim}\, L = \mathrm{Dim}(L_+ \oplus L_-) = n,\ \mathrm{Deg}(L_+ \oplus L_-) = 2^n$ なので $\mathrm{Dim}\, L_- = n,\ \mathrm{Deg}\, L_- = 2^{n-1}$ もわかる。

次に $\mathrm{Ass}(L_\pm)$ を求めてみよう。まず $V = (L_+)_K$ から考える。上でやったように $V_0 =$ (定数関数) と取ることにしよう。さて $\mathrm{gr}\, V$ を $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 加群と考える時、$\mathfrak{p}^+$ および $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ は $\mathrm{gr}\, V$ 上ゼロとして作用する。実際次数 l の部分空間 V_l は定義の仕方から明らかに $\mathfrak{p}^+$ および $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ で不変であるが、本来 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の作用は V_l から V_{l+1} への線型写像を引き起こしている。$\mathrm{gr}\, V$ を構成する時にはこの作用を $\mod V_l$ で考えるから $\mathfrak{p}^+$ および $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ の作用はゼロとなる。以上の考察から $\mathrm{Ass}\, V$ を計算するためには結局 $U(\mathfrak{p}^-) = S(\mathfrak{p}^-)$ の作用だけを考えればよいことがわかる。

さて $\mathfrak{p}^-$ は二次の多項式を掛け算することで作用していることを思い出しておこう。また §4 の記号で $S(\mathfrak{p}^-) \simeq \mathbb{C}[\mathrm{Sym}(n)]$ とみなすことができ、その作用は Q^* $(k=1)$ によって引き起こされることがすぐにわかる。したがって

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{gr}\ V) = S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\mathfrak{p}^+ + S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\mathfrak{k}_\mathbb{C} + \ker(Q : \mathbb{C}^n \ni x \mapsto x^t x \in \mathrm{Sym}(n))^*$$

である。さて最後の $\ker Q^*$ であるが、すぐにわかるようにこれは階数が 1 の対称行列上消えているような多項式の全体である。階数が 1 の対称行列の全体は丁度一つの $K_\mathbb{C}$-軌道になっていて

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -i & & 1 & \\ & 0_{n-1} & & 0_{n-1} \\ \hline 1 & & i & \\ & 0_{n-1} & & 0_{n-1} \end{array}\right] \in \mathfrak{p}^+$$

を通る $K_\mathbb{C}$ 軌道と一致する。(Killing 形式により $(\mathfrak{p}^-)^* = \mathfrak{p}^+$ であることに注意せよ) この閉包が L_+ の随伴多様体である。

Exercise 7.4 (1) 式 (5.1) を用いて

$$\mathfrak{p}^\pm = \left\{ \left[\begin{array}{cc} \mp iA & A \\ A & \pm iA \end{array} \right] \middle| \ {}^t A = A \right\}$$

であることを示せ。

(2) $\mathbf{c} \in Sp(2n, \mathbb{C})$ を次のように決める (Cayley 変換と呼ばれる)。

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{cc} 1_n & i1_n \\ i1_n & 1_n \end{array} \right]$$

この時次の等式を示せ。

$$\mathfrak{p}^+ = \mathrm{Ad}\mathbf{c} \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0_n & A \\ 0_n & 0_n \end{array} \right] \middle| \ {}^t A = A \right\},\ \mathfrak{p}^- = \mathrm{Ad}\mathbf{c} \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0_n & 0_n \\ A & 0_n \end{array} \right] \middle| \ {}^t A = A \right\}$$

さて L_- の方は事情は若干複雑ではあるが、

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{gr}\ (L_-)_K) = S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{p}^+ + S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} + \mathrm{Ann}(\mathrm{gr}\ V) \cap U(\mathfrak{p}^-)$$

となることは問題がない。したがって $\mathrm{Ann}(\mathrm{gr}\ V) \cap U(\mathfrak{p}^-)$ さえわかれば良いが、 $\mathfrak{p}^-$ の作用が多項式による掛け算なので結局 $\mathrm{Ann}(\mathrm{gr}\ (L_-)_K) = \mathrm{Ann}(\mathrm{gr}\ (L_+)_K)$ であることがわかる[16]。

7.3 一般のユニタリ最高ウェイト表現の場合

まず最高ウェイトが $-\frac{k}{2}\mathbf{1}$ の既約最高ウェイト表現 $L(\frac{k}{2}\mathbf{1})$ の場合を調べよう。 Theorem 4.2 により $L(\frac{k}{2}\mathbf{1})$ は定数調和多項式を lowest K-type に持つから Theorem 4.3 の結果と合わせて

$$\begin{aligned} L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1}) &\simeq U_{\tau(\frac{k}{2}\mathbf{1})} \otimes \mathbb{C}[M(n,k;\mathbb{C})]^{O(k,\mathbb{C})} \\ &= \bigoplus_{\ell(\mu)\le\min\{n,k\}} U_{\tau(\frac{k}{2}\mathbf{1}+2\mu)} \end{aligned}$$

が K-加群としての分解を与える。これより $k \ge n$ のとき、Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数は $k = n$ の時のそれに一致することがわかる。従って以下では $k \le n$ の場合にのみ考えることにしよう。

前節と同様に $V = L(\frac{k}{2}\mathbf{1})_K$ と書いて V の生成部分空間を $V_0 = U_{\tau(\frac{k}{2}\mathbf{1})} =$ (定数関数)ととる。すると

$$V_t = U_t(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})V_0 = \bigoplus_{\ell(\mu)\le\min\{n,k\},|\mu|\le t} U_{\tau(\frac{k}{2}\mathbf{1}+2\mu)}$$

であることがわかる ($|\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_k$)。この次元を計算すればよいが、

$$\dim U_{\tau(\frac{k}{2}\mathbf{1}+2\mu)} = \dim U_{\tau(2\mu)}$$

だから結局

$$\dim V_t = \sum_{\ell(\mu)\le\min\{n,k\},|\mu|\le t} \dim U_{\tau(2\mu)}$$

となることがわかる。ここで Weyl の次元公式を用いると

$$\begin{aligned} \dim U_{\tau(2\mu)} &= \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(2\mu_i - 2\mu_j + j - i)}{\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)} \\ &= \frac{2^{nk-k(k+1)/2}}{\prod_{l=1}^{k}(n-l)!} \cdot \prod_{1\le i<j\le k}(\mu_i - \mu_j) \left(\prod_{1\le i\le k} \mu_i\right)^{n-k} + (\mu \text{ の低次の項}) \end{aligned}$$

[16] もちろんこれは $\mathrm{Ann}(L_-)_K = \mathrm{Ann}(L_+)_K$ を意味しない。詳しくは次節を参照されたい。

と書けている。ただし $\mu_i = 0$ $(k < i \leq n)$ を用いた。従って

$$\begin{aligned}\dim V_t &= \frac{2^{nk-k(k+1)/2}}{\prod_{l=1}^{k}(n-l)!} \times \\ &\int_{\substack{1\geq x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_k\geq 0,\\ 1\geq x_1+\cdots+x_k\geq 0}} \prod_{1\leq i<j\leq k}(x_i-x_j)\left(\prod_{1\leq i\leq k} x_i\right)^{n-k} dx_1\cdots dx_k \cdot t^{k(k-1)/2+k(n-k)+k} \\ &\qquad +(t\text{ の低次の項})\end{aligned}$$

が成立する。この式より

$$\mathrm{Dim}\, L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1}) = k(k-1)/2 + k(n-k) + k = nk - \frac{k(k-1)}{2}$$

および

$$\begin{aligned}\mathrm{Deg}\, L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1}) &= \frac{2^{nk-k(k+1)/2}}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(nk-\frac{k(k-1)}{2}+1)}{\prod_{l=1}^{k}\Gamma(n-l+1)} \times \\ &\int_{\Omega_k} \prod_{1\leq i<j\leq k} |x_i-x_j|\,(x_1x_2\cdots x_k)^{n-k}\, dx_1\cdots dx_k \end{aligned} \tag{7.2}$$

がわかる。積分領域は

$$\Omega_k = \{(x_1,\cdots,x_k)\in[0,1]^k \mid x_1+\cdots+x_k\leq 1\} \tag{7.3}$$

である。この積分の値は計算可能かと思われるが現在のところ筆者はまだ計算できていない。ただし次の積分

$$\int_{[0,1]^k} \prod_{1\leq i<j\leq k} |x_i-x_j|\,(x_1x_2\cdots x_k)^{n-k}\, dx_1\cdots dx_k$$

は **Selberg 積分**と呼ばれており、よく知られている。例えば [青本-喜多, 付録 2] を参照せられたい。

Exercise 7.5 $k=2$ とすることにより $\mathrm{Deg}\, L(\mathbf{1}) = \frac{1}{2}\binom{2n-2}{n-1}$ であることを示せ。

さて他の最高ウェイト表現についてはどうか？ Bernstein 次数の計算は難しいが Gelfand-Kirillov 次元は同様にして計算できる。結果だけ書いておくと、$\tau = \tau(D)$ が Theorem 4.1 の条件を満たしている時

$$\mathrm{Dim}\, L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1}+\tau) = \mathrm{Dim}\, L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1}) = nk - \frac{k(k-1)}{2}$$

が成り立つ。まとめておこう。

Theorem 7.6 (1) $1 \le k \le n$ として $\tau = \tau(D)$ が Theorem 4.1 の条件を満たすとする。このとき

$$\operatorname{Dim} L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1} + \tau) = nk - \frac{k(k-1)}{2}$$

である。また $\tau = 0$ ならば $\operatorname{Deg} L(\frac{k}{2}\mathbf{1})$ は式 (7.2) で与えられる。

(2) $k \ge n$ とする。このとき Gelfand-Kirillov 次元および Bernstein 次数は

$$\operatorname{Dim} L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1} + \tau) = \frac{n(n+1)}{2}, \ \operatorname{Deg} L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1} + \tau) = \dim U_\tau$$

で与えられる。但し $\operatorname{Deg} L(\frac{k}{2}\mathbf{1} + \tau)$ については $n < k \le 2n$ のとき $\tau = 0$ とする[17]。特に正則離散系列表現の Gelfand-Kirillov 次元と Bernstein 次数は上の式で与えられる。

Proof. (2) の $\operatorname{Deg} L$ についてはこれまで述べていなかったが、(2) の仮定の下に K の表現としては $L(\frac{k}{2}\mathbf{1} + \tau) \simeq U_{\frac{k}{2}\mathbf{1}+\tau} \otimes U(\mathfrak{p}^-)$ であって、$U(\mathfrak{p}^-)$ は $n(n+1)/2$ 変数の多項式環になるから Bernstein 次数は $\dim U_{\frac{k}{2}\mathbf{1}+\tau} = \dim U_\tau$ に一致する。 ∎

上で得られた Bernstein 次数に関する積分の式と上の Theorem 7.6 の (2) 式を比較すれば次の積分の値がわかる。

Corollary 7.7 Ω_n を式 (7.3) で与えられた積分領域で $n \ge 2$ とすると

$$\int_{\Omega_n} \prod_{1 \le i < j \le n} |x_i - x_j| dx_1 \cdots dx_n = \frac{\prod_{l=0}^{n} \Gamma(l+1)}{2^{n(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right)}$$

が成り立つ。

さて最後に $L(\frac{k}{2}\mathbf{1} + \tau)$ の随伴多様体を計算しておこう。ここでも $k \le n$ と仮定しよう。まず $L(\frac{k}{2}\mathbf{1})$ の時に計算する。 $V = L(\frac{k}{2}\mathbf{1})_K$ とおくと Weil 表現の場合と全く同様にして

$$\operatorname{Ann}(\operatorname{gr} V) = S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{p}^+ + S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} + \ker(Q : M(n,k;\mathbb{C}) \ni x \mapsto x^t x \in \operatorname{Sym}(n))^*$$

であることがわかる。このとき $\operatorname{Im} Q = \{X \in \operatorname{Sym}(n) \mid \operatorname{rank} X \le k\}$ なので、結局

$$\begin{aligned} \operatorname{Ass} V &= \{X \in \mathfrak{p}^+ \mid \operatorname{rank} X \le k\} = \overline{\mathcal{O}_k}, \\ \mathcal{O}_k &= \operatorname{Ad} K_{\mathbb{C}} \left[\begin{array}{cc|cc} -i1_k & & 1_k & \\ & 0_{n-k} & & 0_{n-k} \\ \hline 1_k & & i1_k & \\ & 0_{n-k} & & 0_{n-k} \end{array} \right] \subset \mathfrak{p}^+ \end{aligned} \tag{7.4}$$

となる。さて一般の $V = L(\frac{k}{2}\mathbf{1} + \tau)_K$ については次のように考えればよい。Weil 表現の場合に注意したように明らかに $\mathfrak{p}^+, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \subset \operatorname{Ann}(\operatorname{gr} V)$ である。したがって $U(\mathfrak{p}^-) \cap \operatorname{Ann}(\operatorname{gr} V)$ さ

[17] $n < k \le 2n$ の時の制限は不必要であると思われるが、筆者は未だ自信がないのでこうしておく。

え決まればよい。$\mathfrak{p}^-$ の表現は多項式の掛け算で行なわれるので結局 $U(\mathfrak{p}^-) \cap \mathrm{Ann}(\mathrm{gr}\, V)$ は最高ウェイトベクトル (の $\mathrm{gr}\, V$ での像) を消していればよいことがわかるが、多項式環は整域であるからこれは定数多項式を消す作用と全く一致する。したがって

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ann}(\mathrm{gr}\, L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1} + \tau)_K) = \mathrm{Ann}(\mathrm{gr}\, L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1})_K), \\ \Longrightarrow \quad &\mathrm{Ass}\, L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1} + \tau) = \mathrm{Ass}\, L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1})_K = \overline{\mathcal{O}_k} \end{aligned}$$

となる。もちろんこのことは $\mathrm{Ann}\, L(\frac{k}{2}\mathbf{1} + \tau)_K = \mathrm{Ann}\, L(\frac{k}{2}\mathbf{1})_K$ を意味しない ([松本, 命題 1.5.5] 参照)。

Theorem 7.8 (1) $1 \leq k \leq n$ として $\tau = \tau(D)$ が Theorem 4.1 の条件を満たすとする。このとき

$$\mathrm{Ass}\, L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1} + \tau) = \overline{\mathcal{O}_k}$$

である。ただし $K_{\mathbb{C}}$-巾零軌道 $\mathcal{O}_k$ は式 (7.4) で与えられる。

(2) $k \geq n$ とする。このとき

$$\mathrm{Ass}\, L(\tfrac{k}{2}\mathbf{1} + \tau) = \overline{\mathcal{O}_n} = \mathfrak{p}^+$$

である。

Corollary 7.9 (1) $1 \leq k \leq n$ として $\tau = \tau(D)$ が Theorem 4.1 の条件を満たすとする。このとき $L(\frac{k}{2}\mathbf{1} + \tau)$ の原始イデアルの随伴多様体はすべて同じで

$$\mathrm{Ad} G_{\mathbb{C}} \left[\begin{array}{cc|cc} -i1_k & & 1_k & \\ & 0_{n-k} & & 0_{n-k} \\ \hline 1_k & & i1_k & \\ & 0_{n-k} & & 0_{n-k} \end{array} \right] = \mathrm{Ad} G_{\mathbb{C}} \left[\begin{array}{c|cc} \multirow{2}{*}{0_n} & 1_k & \\ & & 0_{n-k} \\ \hline 0_n & \multicolumn{2}{c}{0_n} \end{array} \right]$$

の閉包になる。

(2) $k \geq n$ とする。このとき $L(\frac{k}{2}\mathbf{1} + \tau)$ の原始イデアルの随伴多様体はすべて同じで $\mathrm{Ad} G_{\mathbb{C}}(\mathfrak{p}^+)$ の閉包になる。

この系は Theorem 7.3 より簡単にわかる ([Yamashita, Th. 3.2] 参照)。また [Kobayashi, Theorems 3.1 & 3.7] には一方がコンパクトな場合の dual pair に関する分解について Gelfand-Kirillov 次元、随伴多様体についての一般的な記述がある。

最後に少しだけコメントをしておく。上の随伴多様体の計算は定義に忠実に行なった。しかし $\dim \mathrm{Ass}\, V = \mathrm{Dim}\, V$ であることを用いれば、 $\mathrm{Ass}\, V \subset \mathfrak{p}^+$ であることはすぐにわかるので $\mathfrak{p}^+$ の $K_{\mathbb{C}}$-軌道分解 $\mathfrak{p}^+ = \coprod_{k=0}^n \mathcal{O}_k$ より次元を比較すれば $\mathrm{Ass}\, V$ は特定できる。証明としてはこの方が簡潔だろう。

Exercise 7.10 $\dim \mathcal{O}_k$ を計算せよ。

[Howe3] において表現の**階数 (rank)** が定義されている。今の場合階数は $\operatorname{Ass} V = \overline{\mathcal{O}_k}$ のとき $\operatorname{Rank} V = k$ となっていて丁度巾零軌道の元の (行列としての) 階数と一致している。更にこれは Weil 表現の何階の tensor 積に表現が初めて現れるかという意味の階数とも一致している。確かにユニタリ最高ウェイト表現の場合階数を考えることは自然に思えるが、その後このような議論はあまり見受けられない。

$\operatorname{Ass} V$ 以外にも**波面集合 (wave front set)** を用いた G-軌道への表現の対応もある (cf. Exercise 3.6)。これについては**関口対応** ([Sekiguchi]) を通じて $\operatorname{Ass} V$ と関係しているはずだが筆者の力不足のためここでは扱うことができなかった。

References

[Adams] J. Adamas, Unitary highest weight modules, *Adv. in Math.*, **63**(1987), 113 – 137.

[青本-喜多] 青本和彦/喜多通武, 超幾何関数論, シュプリンガー現代数学シリーズ, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994.

[EHW] T. Enright, R. Howe and N. Wallach, A classification of unitary highest weight modules, in *Representation theory of reductive groups*, Progress in Math. **40**, Birkhäuser, 1983, pp. 97 – 143.

[Fulton-Harris] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory – A First Course*, GTM (RIM) 129, Springer-Verlag, 1991.

[Hecht-Schmid] H. Hecht and W. Schmid, A proof of Blattner's conjecture, *Invent. Math.*, **31**(1975), 129 – 154.

[Helgason] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, 1984.

[堀田] 堀田 良之, 代数入門 – 群と加群 –, 裳華房, 1987.

[Howe1] R. Howe, On some results of Strichartz and of Rallis and Schiffman (ママ), *J. Funct. Anal.*, **32**(1979), 297 – 303.

[Howe2] R. Howe, Dual pairs in physics: Harmonic oscillators, photons, electrons, and singletons, in *Applications of Group Theory in Physics and Mathematical Physics*, Lectures in Applied Mathematics vol. 21, AMS, 1985, pp. 179 – 207.

[Howe3] R. Howe, Small unitary representations of classical groups, in *Group representations, ergodic theory, operator algebras, and mathematical physics*, MSRI Publications vol. 6, Springer-Verlag, 1987, pp. 121 – 150.

[Howe4] R. Howe, Remarks on classical invariant theory, *Trans. AMS*, **313**(1989), 539 – 570.

[Howe5] R. Howe, Transcending classical invariant theory, *Journ. AMS*, **2**(1989), 535 – 552.

[Howe6] R. Howe, Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity free actions and beyond, in *The Schur Lectures (1992)*, Israel Mathematical Conference Proceedings **8**, Bar-Ilan Univ., 1995, pp. 1 – 182.

[Howe-Tan] R. Howe and E. C. Tan, *Non-Abelian Harmonic Analysis, Applications of* $SL(2,\mathbb{R})$, Universitext, Springer-Verlag, 1992.

[Humphreys] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, GTM 9, Springer-Verlag, 1972.

[岩堀] 岩堀長慶, 対称群と一般線形群の表現論, 岩波講座基礎数学, 岩波書店.

[Jakobsen] H. Jakobsen, Hermitian symmetric spaces and their unitary highest weight modules, *J. Func. Anal.*, **52**(1983), 385 – 412.

[Joseph] A. Joseph, On the associated variety of a primitive ideal, *J. Alg.*, **93**(1985), 509 – 523.

[Kashiwara-Vergne] M. Kashiwara and M. Vergne, On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, *Invent. Math.*, **44**(1978), 1 – 47.

[Knapp] A. W. Knapp, *Representation theory of semisimple Lie group — An overview based on examples*, Princeton Univ. Press, 1986.

[Knapp-Vogan] A. W. Knapp and D. A. Vogan, Jr., *Cohomological Induction and Unitary Representations*, Princeton Univ. Press, 1995.

[Kobayashi] T. Kobayashi, Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups III, preprint 1996.

[Macdonald] I. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.* Clarendon Press, 1979.

[松本] 松本 久義, Enveloping algebra 入門, 東京大学数理科学セミナリーノート **11**, 1995.

[西山 1] 西山 享, 対称式と交代式 /L'estro armonico, 数学セミナー 1995 年 7 月号, 42 – 49.

[西山 2] 西山 享, 半単純群の Discrete Series について, 数理解析研究所講究録 615 「非 I 型群のユニタリー表現論」(1987.3), 211 – 227.

[Ohta] T. Ohta, Associated varieties of standard representations for real reductive groups and induction of nilpotent orbits, preprint 1996.

[Parthasarathy] R. Parthasarathy, Criteria for the unitarizability of some highest weight modules, *Proc. Indian Acad. Sci.*, **89**(1980), 1 – 24.

[Schmid] W. Schmid, On the characters of discrete series (the Hermitian symmetric case), *Invent. Math.*, **30**(1975), 47 – 144.

[Sekiguchi] J. Sekiguchi, Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair, *J. Math. Soc. Japan*, **39**(1987), 127 – 138.

[清水] 清水英男, 保型関数, 岩波書店, 1992.

[Varadarajan] V. S. Varadarajan, Infinitesimal theory of representations of semisimple groups, in *Harmonic analysis and representations of semisimple Lie groups*, edited by J. A. Wolf et al., Reidel, 1980, pp. 131 – 255.

[Vogan1] D. A. Vogan, Gelfand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules, *Invent. Math.*, **48**(1978), 75 – 98.

[Vogan2] D. A. Vogan, Associated varieties and unipotent representations, in *Harmonic analysis on reductive groups*, edited by W. Barker and P. Sally, Birkhäuser, 1991, pp. 315 – 388.

[Wallach] N. R. Wallach, *Real reductive groups I*, Pure and Appl. Math. **132**, Academic Press, 1988.

[Yamashita] H. Yamashita, Associated varieties and Gelfand-Kirillov dimensions for the discrete series of a semisimple Lie group, preprint 1993. [http://w3rep.math.h.kyoto-u.ac.jp/paper.html]

Ver. 1.0 [00/11/25 10:29], originally dated 1996/12/4.
This file is compiled on November 25, 2000.