解析学Ⅱ：第１回講義 (4月11日(木))

今回の目標

(1) 数列の収束，発散についての復習,.

(2) 数列に関する既習事項では不十分であることの認識と，ε-N 論法についての学習.

宿題．定理 2.1 を理解し，証明を試みること．

この講義ノートを読み，演習問題を解答することで受講したとする．参考書としてあげた「解析学入門」(市原，増田，松本著) を合わせて，活用してもらえると幸いである．

講義ノートを単に読むのではなく，一部はノートに，自分が理解しているかどうか確認しながら，メモしながら読むことが大切である．

講義全体の目的は，数列と無限級数の収束・発散，連続関数の定積分・広義積分の詳しい学習を通して，上限，下限，上極限，下極限，ε-δ 論法などの新しい概念，未知の議論を学び，数学を学習するための基礎的事項，論理的思考力を習得することである．

多くの話が不等式でこれまでの数学とは感じが違うかもしれない．

内容的には難しいことではないが，

単に公式を用いるという態度では理解できないと思います．

- 概念の意味を自分で考えること；
- 具体例を必ず念頭において，
  講義や教科書で学習したことの真似を問題演習において自ら行うこと；
- 数列なら初めの幾つかを計算して数直線上にプロットする，
  関数ならグラフの概形を描くなどにより自分で視覚化すること；

などを実行して欲しい．

このノートには，このような枠で囲んだ注意が何か所かある．多くの学生が誤解する事項の解説を含み，ここは，特によく理解して欲しいポイントである．

なお，講義ノートは松本が個人的に作成したものである．大きな議論の誤りはないと思うが，タイプミスや計算間違いがあると思われる．見つけた人は遠慮なく，直接，またはコースパワーの質問やメールで教えてください．

第1章 数列

1　数列の収束

$a_1, a_2, \dots$ と実数を並べたものを**実数列**または**数列**と呼び，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ または $\{a_n\}$ と書く．また，$a_0, a_1, a_2, \dots$ と a_0 から始める場合は $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$，一般に，$a_k, a_{k+1}, \dots$ と a_k から始める場合は $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ などと書く．いずれの場合も，a_n を**一般項**と呼ぶ.

$\{a_n\}$ の一部，つまり，$\{n_i\}$ を $n_1 < n_2 < \dots$ をみたす自然数からなる数列として，$\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ の形の数列を考えることもある．このような数列を $\{a_n\}$ の**部分列**と呼ぶ．例えば，$\{a_{2n}\}$ は $\{a_n\}$ の部分列の一つである.

例 1.1. (1) $a_n = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ とおくと，n を大きくすると a_n は 0 に近づく.
(2) $b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ とおくと，n を大きくすると b_n は，正の値と負の値を交互にとりながら 0 に近づく.
(3) p を $|p| < 1$ である実数とし $c_n = p^n$ とおくと，n を大きくすると c_n は 0 に近づく.
(4) p を $|p| < 1$ である実数とし，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$S_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n$$

と定める．$S_n = \dfrac{1 - p^{n+1}}{1 - p}$ であり，$\{S_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{1-p}$ に収束する.

(4) で述べた等比数列の和の公式は次のように考えると，容易に理解される．まず，因数分解の公式，$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$，さらには

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1), \qquad x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

を思い出す．これから，$1 + x = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{1 - x^2}{1 - x}$，さらには

$$1 + x + x^2 = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^3}{1 - x}, \qquad 1 + x + x^2 + x^3 = \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^4}{1 - x}$$

となる．一般には，$x^{n+1} - 1 = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1)$ であり

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{が成り立つ.}$$

数列の極限

定義 1. n を大きくすると a_n の値が定数 α に近づくとき，数列 $\{a_n\}$ は α に**収束**するといって

$$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty) \quad \text{または} \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

などと表し，α を $\{a_n\}$ の**極限**または**極限値**という．

演習 1.1. (1) $n \to \infty$ のとき $x^n \to 0$ となる実数 x の範囲は何か．
(2) $n \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{n^a} \to 0$ となる a の範囲は何か．

数列は収束するとは限らない．収束・発散を考える場合は a_n に関する計算，議論を行って

$$a_n = \cdots \to \alpha \quad (n \to \infty) \quad \text{または} \quad a_n = \cdots \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

と書くことを勧める．たとえば，数列 $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 へ収束するが，これは

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0 \ (n \to \infty)\end{aligned}$$

とすれば示すことができるし，分かりやすい．

また，$a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ の極限を考える．これは，区分求積法により（積分計算は略）

$$\begin{aligned}\log a_n &= \log(n!)^{\frac{1}{n}} - \log n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log k - \log n \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\log k - \log n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log\frac{k}{n} \to \int_0^1 \log x dx = -1\end{aligned}$$

となり，$a_n \to e^{-1}$ となる．いきなり $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ と書いても話は進まないであろう．

数列の発散

定義 2. 数列 $\{a_n\}$ がどんな実数にも収束しないとき，$\{a_n\}$ は**発散**するという．

例 1.2. (1) $\{n\}, \{n^2\}, \{n^a\}$ $(a > 0), \{e^n\}$ などのように，n を大きくすると a_n がいくらでも大きくなるとき $\{a_n\}$ は **∞(無限大) に発散する**といって

$$a_n \to \infty \quad (n \to \infty) \quad \text{または} \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

などと表す．
(2) $-\infty$ に発散することも同様に定義する．
(3) 発散する数列 $\{a_n\}$ が ∞ にも $-\infty$ にも発散しないとき，**振動**するという．たとえば，次が振動する数列の例である．

$$\{(-1)^n\}, \qquad \{(-1)^n n\}, \qquad \{(-2)^n\}.$$

収束する数列の性質

定理 1.3. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のとき，それぞれ α, β に収束すると仮定すると次が成り立つ．
(1) $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n b_n\}$ も収束して，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \pm \beta, \qquad \text{(複合同順)}$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha\beta.$$

さらに，$b_n \neq 0$ $(n = 1, 2, ...)$ かつ $\beta \neq 0$ ならば，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ も収束して極限値は $\dfrac{\alpha}{\beta}$ である．
(2) $a_n \leqq b_n$ であれば，$\alpha \leqq \beta$ が成り立つ．
(3) **(はさみうちの原理)(非常に重要)** $\alpha = \beta$ のとき，数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ $(n = 1, 2, ...)$ が成り立つならば，$\{c_n\}$ も同じ極限値 α に収束する．

(1) $a_n < b_n$ $(n = 1, 2, ...)$ であっても極限値 α, β に対して $\alpha < \beta$ とは限らず，一致することもある．たとえば，

$$a_n = \frac{1}{n},\ b_n = \frac{2}{n} \qquad \text{または} \qquad a_n = -\frac{1}{n},\ b_n = \frac{1}{n}$$

とすると，いずれの場合も $a_n < b_n$ だが共に 0 に収束する．
(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ がともに発散するときは，$\{a_n b_n\}, \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ の収束，発散について様々なことが起きる．**ケースバイケースなので，その都度，考えること．**

はさみうちの原理を用いた議論の例をあげる．

例題 1.4. (1) $\dfrac{n^2}{2^n} \to 0 \ (n \to \infty)$ が成り立つことを示せ．

(2) $a > 1$ であるすべての実数，自然数 k に対して $\dfrac{n^k}{a^n} \to 0 \ (n \to \infty)$ が成り立つことを示せ．

$a > 1$ に対して a^n のような増大の仕方を**指数増大**といい，n^c のような増大の仕方を**多項式増大**という．1 年生の解析で，ロピタルの定理を用いて $\dfrac{x^c}{e^x} \to 0 \ (x \to \infty)$ がすべての $c > 0$ に対して成り立つことを示した．いずれにしても，「指数増大の方が多項式増大よりも**はるかに早く**増大する」．これは，数学に限らず，様々なところで重要である．

解答例. (1) $0 < \dfrac{n^2}{2^n} < b_n$ かつ $b_n \to 0 \ (n \to \infty)$ をみたす $\{b_n\}$ を見つければよい．そこで，b_n として $\boxed{\dfrac{n^2}{(n \text{ の } 3 \text{ 次式})}}$ の形であれば，と考えてみる．

二項定理

$$(x+y)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1}y + \cdots + {}_nC_{n-1}xy^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k y^{n-k}$$

を用いると，$x = y = 1$ として

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k > {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \qquad (n = 3, 4, ...)$$

が分かる．これから，

$$0 < \frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{{}_nC_3} = 3! \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる．したがって，はさみうちの原理により $\dfrac{n^2}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty)$ が成り立つ．

(2) アイディアは (1) と同じである．解析学 II 演習の問題とする． □

注意 1.5. ここでは簡単のため，3 次式を考えた．次数が高ければ何でもよいことが分かるであろう．これは，(2) のヒントになる．

ネイピアの数

命題 1.6. x が実数の範囲で大きくするときも $x \to \infty$ とかく．$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{N}\right)^n$ をネイピアの数とするとき，$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ を示せ．

証明. n を $n \leqq x < n+1$ をみたす自然数とすると，$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{n}$ だから

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \qquad \text{（注：考察対象を中心に！）}$$

が成り立つ．e の定義が使えるように，左辺を下から，右辺を上から評価すると，

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x \geqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1},\\ &\left(1+\frac{1}{n}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

となるから，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$$

が成り立つ．この右辺も，左辺も $n\to\infty$ のとき e に収束することから結論を得る． □

注意 1.7. 上と同様に，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = e$ も示すことができる．

演習 1.2. 次の数列の数列の収束，発散を判定せよ．収束する場合は，極限値を求めよ．

(1) $\dfrac{3n+1234}{n^2}$ (2) $\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ (3) $\dfrac{n^3-8}{n^2+1}$ (4) $\dfrac{3^n}{5^n+1}$ (5) $\dfrac{3^n}{(-5)^n+1}$

(6) $\dfrac{(-5)^n}{3^n+27}$ (7) $\sqrt{n+88}-\sqrt{n}$ (8) $\dfrac{3^n}{n!}$ (9) $\dfrac{8^n}{n!}$ (10) $\dfrac{2^n}{e^n}$

演習 1.3. (1) ∞ に発散する数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ で，$\{a_n-b_n\}$ も ∞ に発散する例をあげよ．
(2) ∞ に発散する数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ で，$\{a_n-b_n\}$ が収束する例をあげよ．

以下の問題は参考までに付ける．しばらく時間がたってから考えてみてください．

演習 1.4. 2 の n 乗根 $\sqrt[n]{2}$ に対して，$\sqrt[n]{2}=1+h_n$ とおく．$n\geqq 2$ に対して $nh_n<1$ が成り立つこと，$\sqrt[n]{2}\to 1\ (n\to\infty)$ が成り立つことを示せ．

演習 1.5. c を正の数とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c^n-c^{-n}}{c^n+c^{-n}}$ を，c の値で場合分けをして，求めよ．

2　ε-N 論法

数列の収束の数学的な「定義」を与える．意味を理解をし自分でも使えるようになることが目的である．

動機付けとして，次を考える．意味を各自よく考えて欲しい．

収束する数列の平均の収束 (チェザロ和)

定理 2.1. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のとき α に収束するなら，$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ も α に収束する．つまり，次が成り立つ：

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha = \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} \to 0.$$

直感的には「n が大きいとき，$a_1, a_2, ..., a_n$ のほとんどは α に近いのだから，その平均も α に近い」ということである．これは，試験の結果が全員 80 点なら平均も 80 点で，全員でなくても 80 点と違う人が多くないなら平均は「ほぼ 80 点」ということと本質的に同じことである．

しかし，上の定理を厳密に証明するにはどうすれば良いだろうか？このために，そして数学の多くの場面で，便利なのが，ここで述べる ε-δ 論法である．ε-δ 論法というのは，ここで述べるような論法の総称である．分かり易いように，本節の論法を δ-N 論法と呼ぶことにする．

数列の収束の定義

定義 3. (1) 数列 $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のとき実数 α に**収束**するとは，
任意の $\varepsilon > 0$ に対して自然数 N が存在して，$n \geqq N$ であれば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となることである．
(2) $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のとき ∞ に発散するとは，
任意の実数 R に対して自然数 N が存在して，$n \geqq N$ ならば $a_n > R$ となることである．

注意 2.2. (1) 十分大きい n に対して $a_n \fallingdotseq \alpha$ が成り立つということを，論理的に述べている．たとえば，$a_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ であれば，a_n が 3 になることはないが，ε ほど (少し) 幅を持たせるとある番号 N から先の a_n は $3 \pm \varepsilon$ の中に入っている ($|a_n - 3| < \varepsilon$ となる) ということである．
(2) N は ε に応じて決める．例えば，$a_n = \dfrac{1}{n^2}$ であれば，$\varepsilon > 0$ に対して N を $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ より大きな整数とすれば良い．ギリギリの N が必要ならば，$[x]$ を x 以下の最大の整数 (ガウス記号) として，$N = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$ とすれば $\dfrac{1}{N^2} < \varepsilon$ であり，$n \geqq N$ ならば

$$a_n = \frac{1}{n^2} \leqq \frac{1}{N^2} < \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon$$

より，$a_n < \varepsilon$ となる．

演習 1.1 の解答． (1) $|x| < 1$　(2) $a > 0$

演習 1.2 の解答． (1) 0 に収束 (2) 1 に収束 (3) ∞ に発散 (4) 0 に収束
(5) 0 に収束 (6) 振動する (7) 0 に収束
(8) (9) ともに 0 に収束．(10) $e \fallingdotseq 2.71828$ だから 0 に収束．

演習 1.3 の解答． (1) 容易なので省略するが，自分で必ず例を見つけること．
(2) (i) $a_n = \sqrt{n+1},\ b_n = \sqrt{n}$　(ii) $a_n = \log n,\ b_n = \log \dfrac{n}{2}$　(iii) $b_n = a_n - 1$ のとき，など多数．

演習 1.4． $2 = (1 + h_n)^n > 1 + nh_n$ に注意すればよい．

演習 1.5． (1) $0 < c < 1$ のとき，分母，分子に c^n を掛けると $c^{2n} \to 0$ $(n \to \infty)$ より

$$\frac{c^n - c^{-n}}{c^n + c^{-n}} = \frac{c^{2n} - 1}{c^{2n} + 1} \to -1.$$

(2) $c = 1$ のときは 0.
(3) $c > 1$ のとき，分母，分子を c^n で割ると $c^{-2n} \to 0$ $(n \to \infty)$ より

$$\frac{c^n - c^{-n}}{c^n + c^{-n}} = \frac{1 - c^{-2n}}{1 + c^{-2n}} \to 1.$$