解析学IA：第１回講義 (4月８日(月))

このノートを読んで，演習問題を解くことで，2024 年度前期 (月曜１限)「解析学 IA」(担当：松本) の講義とします．今後も，話がまとまった段階で講義ノートの配信をします．

学習の際は，教科書としてあげた「解析学入門」(市原直幸，増田哲，松本裕行著，培風館) を合わせて参照してほしいと思います．青学の３人で書いた，できる限りわかりやすい記述を心がけ，図を多く入れ，演習問題の解答を詳しく書いた教科書で後期にも使用します．本の方が多くの学生には読みやすいと思うし，同じことの説明でも少しのことで理解しやすくなるものです．

「定義」というのは，数学的な概念を言葉や数式によって明瞭にするものです．まず，数学的な意味をハッキリさせることが学習の第一歩です．

第１回講義にはありませんが,「定理」とあるのは，高校で学習した平均値の定理のように，重要な数学的な事実です．定理から公式が生まれることが多いです．定理に関しては，このノートを見るだけではなく，自筆のノートを作成して，例題や応用例などを合わせてメモしてください．その際，単に写すだけではなく，自分が理解しているかどうかを考えてください．このときに，教科書があると役に立つと思います．

講義ノートには,

> 合成関数の微分 (5) は極めて重要である．理由も含めて，十分な理解が必要である．

の形の枠で囲まれた注意が数か所あります．特に，よく理解して欲しい事項です．

私から特にお願いしたいのは,

> 公式を丸覚えするのではなく，理由をつけて頭に入れてほしいということです．
> 演習問題を解く際は，公式や例題を見ながら解いてください．
> そのときも，理由付けを忘れないようにしてください．

質問は，講義後演習中はもちろんのこと，コースパワー上からも可能です．遠慮なく，どうぞ！

第1章　微分法

1.　微分の定義

f を実数全体 $\mathbf{R}$ またはその部分区間 ($[0,1], [0,\infty)$ など) の上で定義された関数とする．f が定義される区間 (集合) を関数 f の**定義域**，f の値の全体を**値域**という．

例 1.1. (1) $x^n, e^x, \sin x$ は $\mathbf{R}$ 上の関数である．
(2) $\log x$ は，$(0,\infty)$ 上で定義された関数であり，値域は $\mathbf{R}$ 全体である．
(3) $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ の定義域は $[0,1]$ であり，値域は $[0, \frac{1}{2}]$ である．
$(x(1-x) = -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4})$

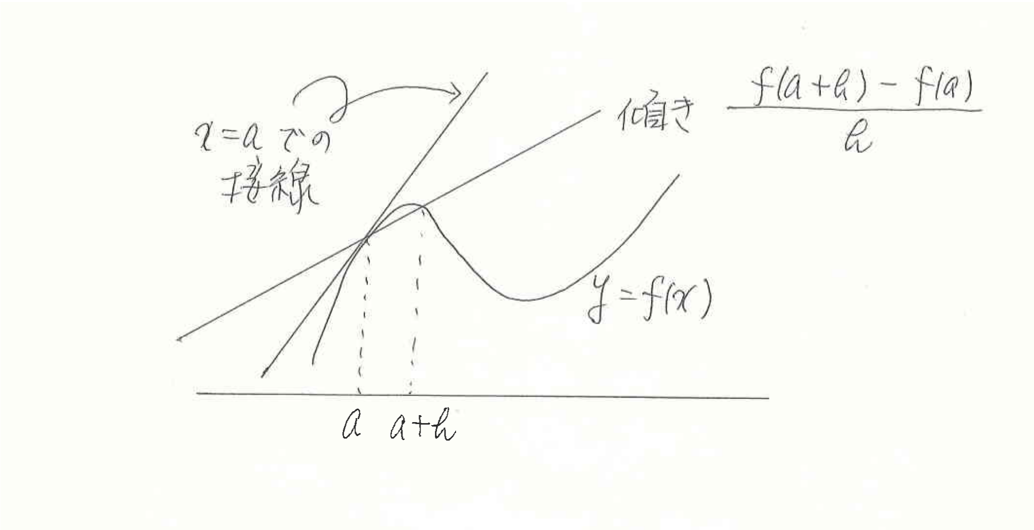
関数 $y = f(x)$ に対して $(x, f(x))$ を平面上にプロットしたのが f のグラフである．一般には，$y = f(x)$ のグラフには増減があり，その変化を扱うのが解析学である．その基本となるのが**微分法**である．

微分係数

定義 1. $(a, f(a))$ と $(a+h, f(a+h))$ を結ぶ直線の傾き $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が $h \to 0$ のとき収束するならば，f は $x = a$ で微分可能であるといって，極限を $f'(a)$ と書き，f の $x = a$ における微分係数とよぶ：

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{*}$$

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は，グラフ上の 2 点 $(a, f(a)), (a+h, f(a+h))$ を結ぶ直線の傾きである．次の図から，h を 0 に近づけたときの様子を想像してほしい．



注意 1.2. (1) f の定義域が区間 $[a,b]$ のとき，右からの極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在するならば，f は $x=a$ で微分可能という．$x=b$ での微分も同様に考える．
(2) $x=a$ における接線の方程式は $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ となることは知っていると思います．この形で，直線の傾きが $f'(a)$ で点 $(a,f(a))$ を通ることが直ぐ分かる．
$\boxed{\text{展開しない方が後の話に繋がって良い！}}$ 次はその一例である．
(3) (*) は，x が a に近いとき，$f(x)$ の値は $f(a)+f'(a)(x-a)$ と近いことを意味する．たとえば，$f(x)=\sqrt{x}$，$a=1$ であれば，$f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$，$f'(1)=\dfrac{1}{2}$ だから

$$x\fallingdotseq 1 \text{ のとき}\quad f(x)\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}(x-1)$$

である．$\sqrt{1.02}\fallingdotseq 1+\dfrac{0.02}{2}=1.01$ と書いてみると理解しやすい．

ちなみに，電卓によると $\sqrt{1.02}=1.00995...$ である．

次の導関数の定義は，よく知っていることと思う．

導関数

定義 2. f がその定義域の各点で微分可能のとき，x に x における微分係数 $f'(x)$ の値を対応させる関数を f の**導関数**とよび f' または $\dfrac{df}{dx}$ と書く：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{\#}$$

前ページの注意でも述べたことだが，(#) は $|h|$ が小さいならば $f(x+h)-f(x) \fallingdotseq f'(x)h$ であること，つまり，x が $x+h$ に変化したとき，f の値が $f'(x)h$ ほど変化することを示している．これが「微分」の考えである．そして，

$$df = f'(x)dx$$

と書いて，df を f の**微分**という．df は，x の微小変化に対応する関数 f の値の微小変化を表す.

例 1.3. (1) $f(x) = \pi x^2$ のとき，$f'(x) = 2\pi x$．$h > 0$ ならば，$\pi(x+h)^2 - \pi x^2$ は半径 $x+h$ の円から，同じ中心をもつ半径 x の円を除いた円環の面積である．これを h で割ると円周の長さに近い.

自分で図を書いて理解することは難しくないと思う．教科書 44 ページ例 3.3 に図とともに解説がある.

(2) $f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ のとき，$f'(x) = 4\pi x^2$．つまり，球の体積を半径に関して微分すると，球面の面積が得られる.

2.　基本的な関数の導関数

次の初等関数の導関数に関する公式は，既知とする.

(1) $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = \pm1, \pm2, ...)$

(2) $(e^x)' = e^x$

(3) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0.$

(4) $(\sin x)' = \cos x$

(5) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) の証明を述べる．まず,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}$$

に注意する．$n \to \infty$ は自然数 n を大きくすること，$t \to \infty$ は実数 t を大きくすることを表す．初めの等式が e の定義である．3 番目は,

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} &= \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \left(\frac{t}{t-1}\right)^t \\ &= \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t = \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \times \left(1+\frac{1}{t-1}\right)\end{aligned}$$

と変形すれば分かる．

よって，(3) は

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}=\frac{1}{x}\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\to\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x}$$

から得られる．

演習 2.1. 曲線 $y=\sin x$ 上の点 $(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$ における接線の方程式を求めよ．

3.　微分法の基本公式

公式を記憶しておくことは必要だが，理由または証明のカギを合わせて理解して欲しい．

(1) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$

(2) $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$(\because)\quad \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

(3) $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$　証明は数学演習の問題とする．

(4) $\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)'=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f(x)^2}$

$(\because)$ (2) と (3) より

$$\left(g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\right)'=g'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}+g(x)\cdot\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=g'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}+g(x)\frac{-f'(x)}{f(x)^2}$$
$$=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f(x)^2}.$$

(5) $\big(f(g(x))\big)'=f'(g(x))g'(x)$

$(\because)$　$g(x+h)-g(x)=k$ とおくと，$h\to 0$ のとき $k\to 0$ であり，

$$\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=\frac{f(g(x)+k)-f(g(x))}{k}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\to f'(g(x))g'(x).$$

(5) は $k=0$ の場合もあるので少し乱暴な理由付けだが，このことが本質でありここではこれで十分だと思う．詳しいことが知りたい人は，教科書 45 ページ，定理 3.2 の証明を参照．

(5) を応用すると，$(e^x)'=e^x$ を「証明」することができる．前節で，$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ を示した．$g(x)=e^x$ とおくと $\log g(x)=x$ なので，両辺を微分して

$$(\log g(x))'=\frac{g(x)}{g'(x)}=1$$

となり，$(e^x)'=e^x$ を得る．

演習 3.1. 次の関数の導関数を求めよ．ただし，(7),(8) では $|x| < 1$ とする．

(1) $(2x+3)^5$　(2) $(x^2+1)^4$　(3) $\sin^2 x$　(4) $\tan x$

(5) $\dfrac{x-1}{x^2+1}$　(6) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$　(7) $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$　(8) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

解析学 IA：第 1 回講義演習問題解答，コメント

注意． 解答への道は一つとは限らない．解答の表示も一つは限らない．ただし，常識的な表現というものはある．また，このノートは松本が個人的に作成したもので，細かい計算ミスやタイプミスがあると思う．そのようなものを見つけたら，遠慮なく知らせてほしい．

演習 2.1． $y' = \cos x$ で $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ だから，求める接線の方程式は

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$$

である．

> 講義ノートでも触れたが，カッコを展開しない方が，通る点 (接点) の座標が見えて良い．逆に言うなら，展開をすると接点が見えなくなる．y 切片が必要な場合など，展開する必要があるなら展開すればよい．前半の重要事項であるテイラー展開は，接点の近くにおける「関数の近似」に端を発するので，この場合も展開は意味を失わせる．

演習 3.1． どの公式を用いたかを，確認することが重要である．

(1) $\left((2x+3)^5\right)' = 5(2x+3)^4 \times (2x+3)' = 10(2x+3)^4$.

(2) $\left((x^2+1)^4\right)' = 4(x^2+1)^3 \times (x^2+1)' = 8x(x^2+1)^3$.

(3) $(\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x \cos x$.

(4) $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

(5) $\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$.

(6) $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より (ノートでは未出だけど，既習事項と思います)

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - (x+1)'\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

(7) $\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(8) $\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)' = \dfrac{\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} \times (-1)}{(\sqrt{1-x})^2} = \dfrac{(1-x)+(1+x)}{2\sqrt{((1+x)(1-x)^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{((1+x)(1-x)^3}}$