確率統計演習 No.1 解答例

1-1. (i) $P(X=0)=\dfrac{1}{6},\ P(X=1)=\dfrac{5}{18},\ P(X=2)=\dfrac{2}{9},\ P(X=3)=\dfrac{1}{6},$
$P(X=4)=\dfrac{1}{9},\ P(X=5)=\dfrac{1}{18}.$
(ii) $\dfrac{35}{18}.$

1-2. (i) 60
(ii) 偏差は，$-40,-20,0,20,40$ であり，分散は

$$\frac{(-40)^2\times 2+(-20)^2\times 4+0^2\times 7+20^2\times 6+40^2\times 1}{20}=440.$$

(iii) $\sigma^2=440$ より $\sigma=21$ として計算する．60 点の偏差値は 50 である．80 点の場合は，
$50+10\dfrac{80-60}{\sqrt{440}}\fallingdotseq 50+10\dfrac{80-60}{21}=59.5$

1-3. (1) ${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ を用いると，

$${}_nC_{r-1}+{}_nC_r=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r+1)!}\big(r+(n-r+1)\big)=\frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}$$

となって，結論を得る．
(2) $n+1$ 個の中から r 個選ぶときの選び方が，${}_{n+1}C_r$ である．このとき，特定の 1 つを選ぶ場合を考えると，残りの $r-1$ 個を特定のものを除いた n 個から選ぶことになり選び方は ${}_nC_{r-1}$ 通りである．特定の 1 つを選ばない選び方は ${}_nC_r$ 通りで，これらの和は ${}_{n+1}C_r$ に等しい．

1-4. (i) 二項定理で $x=1$ とすれば 2^n となる．
(ii) 二項定理で $x=-1$ とすれば 0 となる．
(iii),(iv) $I_3+I_4=I_1=2^n, I_3-I_4=I_2=0$ より，$I_3=I_4=2^{n-1}$.

1-5. (1) 0 回の確率，4 回の確率は $\big(\dfrac{1}{2}\big)^4=\dfrac{1}{16}$，1 回の確率，3 回の確率は ${}_4C_1\big(\dfrac{1}{2}\big)^4=\dfrac{1}{4}$，
2 回の確率は ${}_4C_2\big(\dfrac{1}{2}\big)^4=\dfrac{3}{8}$．したがって，2 回の確率が最も高い．
(2) 0 回の確率，5 回の確率は $\big(\dfrac{1}{2}\big)^5=\dfrac{1}{32}$，1 回の確率，4 回の確率は ${}_5C_1\big(\dfrac{1}{2}\big)^5=\dfrac{5}{32}$，
2 回の確率，3 回の確率は ${}_5C_2\big(\dfrac{1}{2}\big)^5=\dfrac{10}{32}$．したがって，2 回と 3 回の確率が最も高い．
(3) (1) と (2) より，n が偶数のときと奇数のときで分けて考える必要があることが分かる．
また，n 回中 r 回表が出る確率を p_r とすると，

$$\frac{p_r}{p_{r+1}}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{(r+1)!(n-r-1)!}{n!}=\frac{r+1}{n-r}$$

である．よって，$p_r<p_{r+1}$ となるのは $r+1<n-r$，つまり，$r<\dfrac{n-1}{2}$ のときである．
(i) n が偶数のとき．$p_r=p_{r+1}$ となる r は存在せず，

$$p_0<p_1<\cdots<p_{(n/2)-1}<p_{n/2}>p_{(n/2)+1}>\cdots>p_{n-1}>p_n$$

となり，$r = \dfrac{n}{2}$ のときが最大である．
(ii) n が奇数のとき．$n = 2k+1$ とすると，$p_k = p_{k+1}$ であり，

$$p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k = p_{k+1} > p_{k+2} > \cdots > p_{n-1} > p_n$$

となる．したがって，$r = \dfrac{n-1}{2}, \dfrac{n+1}{2}$ のときに最大.

1-6. $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \times (1+x)^n$ の各項に二項定理を用いると

$$\sum_{r=0}^{2n} {}_{2n}C_r x^r = \left(\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i x^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} {}_nC_j x^j \right)$$

となる．右辺の x^n の係数は，${}_nC_i x^i \times {}_nC_j x^j$ について，$i + j = n$ となるすべての場合の和をとれば

$${}_{2n}C_n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \times {}_nC_{n-i}$$

となる．${}_nC_{n-i} = {}_nC_i$ に注意すれば結論を得る．