確率統計演習 No.1

2024 年 4 月 12 日 (金)

1-1. 2 個のサイコロを同時にふるとき，出る目の差の大きさを X とする．

(i) X のとりうる値とその確率を求めよ．
(ii) X の平均の値を求めよ．

1-2. ある 20 人のクラスの数学の試験の結果が次のようであった．

点	20	40	60	80	100	計
人数	2	4	7	6	1	20

(i) 平均 m を求めよ．
(ii) 各得点の平均との差を偏差と呼ぶ．例えば，80 点の偏差は $80-m$ である．そして，偏差の二乗の平均を分散と呼ぶ．上の結果の分散の値を求めよ．
(iii) 分散の値を σ^2 とするとき，得点 a に対して $50+10\times\dfrac{a-m}{\sigma}$ を得点 a の偏差値という．得点 $60, 80$ の偏差値を求めよ．ただし，σ は (ii) の結果から得られる整数の近似値を用いよ．

1-3. (1) 二項係数について，$n \geqq r$ に対して ${}_{n+1}C_r = {}_nC_{r-1} + {}_nC_r$ が成り立つことを，計算によって示せ．
(2) ${}_{n+1}C_r = {}_nC_{r-1} + {}_nC_r$ が成り立つことを，二項係数の意味に基づいて証明せよ．

1-4. 二項定理

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + \cdots + {}_nC_{n-1}x^{n-1} + {}_nC_n x^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^r$$

を用いて，次の値を求めよ．ただし，$r > n$ のとき ${}_nC_r = 0$ とする．

(i) $I_1 = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r = {}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n$
(ii) $I_2 = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\,{}_nC_r = {}_nC_0 - {}_nC_1 + \cdots + (-1)^n\,{}_nC_n$
(iii) $I_3 = {}_nC_0 + {}_nC_2 + \cdots$
(iv) $I_4 = {}_nC_1 + {}_nC_3 + \cdots$

1-5. (1) コインを 4 回投げるとき，表が何回出る確率が最も大きいか．
(2) コインを 5 回投げるとき，表が何回出る確率が最も大きいか．
(3) コインを n 回投げるとき，表が何回出る確率が最も大きいか．
(ヒント：表が r 回出る確率を p_r として，$p_r < p_{r+1}$ となる r の範囲を求める．)

1-6. $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} ({}_nC_r)^2 = ({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + \cdots + ({}_nC_n)^2 = {}_{2n}C_n$ を示せ．
(ヒント：$(1+x)^{2n} = (1+x)^n \times (1+x)^n$ と書いて両辺の x^n の項の係数を考える．)