解析学 II 演習（担当：松本）問題１解答例

注意　以下はあくまで解答例で，解答は一つとは限らない．誤植も含め，解答に誤りがあるかもしれないので，各自で検証すること．**コメント，質問を大歓迎します．**

問題 1.1. (1) $\frac{1}{2}$ (2) ∞ に発散 (3) $a>0$ のとき 0，$a=0$ のとき 1，$a<0$ のとき ∞ に発散 (4) 発散（振動）(5) 0

問題 1.2. (1) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2$ と変形．これは，$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \to e$ より，e^2 に収束．
(2) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$ と変形する．$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to e$，$\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \to 1$ より，$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \to e$.
(3) $\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2}$ より，e に収束．

問題 1.3. (2) のみ正しい．(1),(3) とも，$a_n = n^2, b_n = n$ など，発散の「早さ」が違う数列を考えれば反例となる．他にも多数ある．

問題 1.4. $n > \dfrac{\log(1/\varepsilon)}{\log 2}$

問題 1.5. (1) $h>0$ だから，$n \geqq 3$ ならば，

$$\begin{aligned} a^n &= (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 + \cdots \\ &> \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3. \end{aligned}$$

(2) (1) より $0 < \dfrac{n^2}{a^n} < \dfrac{6}{h^3}\dfrac{n^2}{n(n-1)(n-2)}$ である．$\dfrac{n^2}{n(n-1)(n-2)} \to 0$ より $\dfrac{n^2}{a^n} \to 0$ である．
(3) $n \geqq k+1$ ならば $a^n = (1+h)^n > {}_nC_{k+1}h^{k+1}$ である．よって，

$$(\#) \quad 0 < \frac{n^k}{a^n} < \frac{n^k}{{}_nC_{k+1}}\ \frac{1}{h^{k+1}}$$

が成り立つ．

$$\frac{n^k}{{}_nC_{k+1}} = \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)/(k+1)!} = (k+1)! \times \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)}$$

であり，右辺の分母は n について $k+1$ 次の多項式だから $\dfrac{n^k}{{}_nC_{k+1}} \to 0$ となる．よって，$(\#)$ の右辺が 0 に収束するので，$\dfrac{n^k}{a^n}$ も 0 に収束する．

問題 1.6. (1) $\dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a^N}{N!}\cdot\dfrac{a}{N+1}\cdots\dfrac{a}{n-1}\cdot\dfrac{a}{n} \leqq \dfrac{a^N}{N!}\cdot 1\cdots 1\cdot\dfrac{a}{n} = \dfrac{a^N}{N!}\cdot\dfrac{a}{n}$
(2) (1) より $0 < \dfrac{a^n}{n!} \leqq \dfrac{a^{N+1}}{N!}\cdot\dfrac{1}{n}$ である．$\dfrac{1}{n} \to 0$ より，$\dfrac{a^n}{n!} \to 0$ である．