解析学 II 演習（担当：松本）問題１

2024 年 4 月 12 日

問題 1.1. 第 n 項が以下で与えられる数列は $n \to \infty$ のとき収束するか，発散するかを答えよ．収束するものは，極限を求めよ．この問題に限り，答のみの解答でよい．

(1) $\dfrac{n^2 - n}{2n^2 + 6}$ (2) $n^2 - n - 2023$ (3) $\dfrac{1}{n^a}$ (4) $(-1)^n$ (5) $\dfrac{(-1)^n}{n}$

ただし，(3) において a は実数とする．[a の値によって，場合分けをすること．]

問題 1.2. ネイピアの数 e は，自然数 N を大きくした極限 $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ で定義される実数（無理数）である．x を実数の範囲で $x \to \infty$ としても，$e = \displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ が成り立つ．次の極限を e を用いて表せ．e の定義などが使えるように変形すること．（解答は簡単な形になる）

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n$

問題 1.3. 以下の命題は正しいか．正しくない場合は，反例を挙げよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ならば，$n \to \infty$ のとき $\dfrac{a_n}{b_n}$ は収束する．
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ならば，$n \to \infty$ のとき $a_n - b_n$ は収束する．

問題 1.4. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$ とする．$\varepsilon > 0$ に対して，不等式 $|a_n| < \varepsilon$ を n について解け．
重要なコメント：問題自体は簡単．解答は $n > N$ の形で N は ε から決まる．これから，
任意の $\varepsilon > 0$ に対して N より大きいすべての n に対して $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ となる．これが ε-N 論法による $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ の証明である．ε が小さくなると，N が大きくなることに注意．

問題 1.5. $a > 1$ とする．

(1) $a = 1 + h$ とする．$(1+h)^n$ の 2 項展開を用いて，$n \geqq 3$ ならば $a^n > \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3$ であることを示せ．
(2) $\dfrac{n^2}{a^n} \to 0$ $(n \to \infty)$ を示せ．
(3) (1)，(2) を参考に，任意の自然数 k に対して $\dfrac{n^k}{a^n} \to 0$ $(n \to \infty)$ を示せ．

問題 1.6. $a > 1$ とする．

(1) $a < N < n$ を満たす自然数 N, n に対し，$\dfrac{a^n}{n!} \leqq \dfrac{a^N}{N!} \cdot \dfrac{a}{n}$ を示せ．
(2) $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$ $(n \to \infty)$ を示せ．