

1-1. (1) $\frac{7}{7x-23}$ (2) $-\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$ (3) $-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$ (4) $\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

1-2. (1) $\frac{d}{dx}(x \log x) = 1 + \log x$.

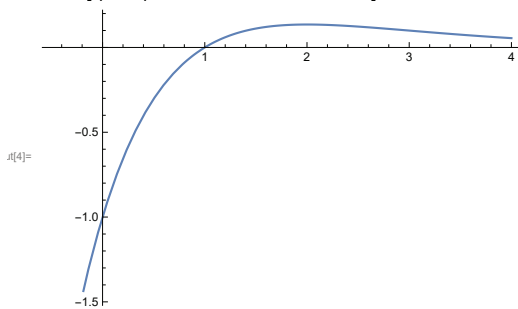
(2) $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 + \log x$ より, $f'(x) = x^x(1 + \log x)$.

(3) 合成関数の微分の公式より $f'(x) = e^{x \log x}(x \log x)' = x^x(1 + \log x)$.

1-3. $y' = (-x+2)e^{-x}$ より y は $x < 2$ で単調増加, $x > 2$ で単調減少である. $x = 2$ において極大値 e^{-2} をとる. $(0, -1), (1, 0)$ を通ることは明記すべきである. $x \rightarrow -\infty$ のとき $y \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ のとき y は減少しながら $y \rightarrow 0$ であることに注意して, グラフを描くこと.

x	2	
f'	+	-
f	↗	↘

Plot[(x-1) Exp[-x], {x, -0.5, 4}]



計算機に書かせたグラフで, 原点, 極大点などが上のグラフにはなくて悪い例になっています. 各自, 補って下さい.

1-4. (1) $2f(x)f'(x)$.

(2) 関係式の両辺を x で微分すると, $\frac{x}{2} + yy' = 0$. よって, $y' = -\frac{x}{2y}$,

(3) 接線の傾きは, $(x, y) = (1, \sqrt{\frac{3}{2}})$ を (2) の結果に代入して $-\frac{1}{\sqrt{6}}$. よって, 接線の方程式は

$y = -\frac{1}{\sqrt{6}}(x-1) + \sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. (カッコを展開していない答案もOK. むしろ, 展開しない方がよい.)

1-5. (1) 関係式の両辺を x で微分すると, $(xy)' = y + xy', (y^2)' = 2yy'$ より $x + y + xy' + 4yy' = 0$ となる. これから, $y' = -\frac{x+y}{x+4y}$ となる.

(2) $y' = 0$ とすると $x + y = 0$. これと $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$ とから $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. (このとき, $y = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$.)

(3) (1) で得た $x + y + xy' + 4yy' = 0$ の両辺を x で微分すると, $1 + 2y' + xy'' + 4(y')^2 + 4yy'' = 0$ となる.

(i) $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ のとき, さらに $y' = 0$ を用いると $y'' = \frac{1}{\sqrt{3}}$ が得られる.

(ii) $(x, y) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ のとき, 同様に $y'' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(実はこの y'' の符号から, $x = 1/\sqrt{3}$ のとき極小, $x = -1/\sqrt{3}$ のとき極大であることが分かる.)

1-6. (1) は省略する. (2) 関数 $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n+1}$ は連続関数である. $a_0 > 0$ だから, x が十分大きいとき $f(x) > 0$ であり, x が負でその絶対値が十分大きいときは $f(x) < 0$ である. したがって, $f(x)$ の連続性より $f(x) = 0$ となる x が少なくとも 1 つ存在する. (中間値の定理を用いている.)

1-7. (1) 前者は定義より簡単. 後者は, 右辺を変形すればよい.

(2) $(\sinh(x))' = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$. 同様に, $(\cosh(x))' = \sinh(x)$.

$(\tanh(x))' = (\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)})' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$.