数学演習 A 問題（解析 1A） No.1

2024 年 4 月 15 日

“解答への道筋や必要な計算を解答用紙に書き残すこと.

1-1. 次の x の関数の導関数を求めよ．ただし，(1) は $7x-23>0$ の範囲で考える．

(1) $\log(7x-23)$ (2) $\dfrac{2x}{x^2-1}$ (3) $\mathrm{cosec}(x)\Big(=\dfrac{1}{\sin(x)}\Big)$ (4) $\sec(x)\Big(=\dfrac{1}{\cos(x)}\Big)$

(3),(4) は $\sin(x), \cos(x)$ の逆数を $\mathrm{cosec}(x), \sec(x)$ と書くということである．それぞれ，コセカント，セカントと読む.

1-2. $f(x)=x^x$ $(x>0)$ とおく．

(1) $\dfrac{d}{dx}\Big(\log f(x)\Big)$ を求めよ.

(2) $\dfrac{d}{dx}\Big(\log f(x)\Big)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ であることを用いて $f'(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)=e^{x\log x}$ と変形して $f'(x)$ を求めよ.

1-3. 関数 f を $f(x)=(x-1)e^{-x}$ で定めるとき，f の増減表を書き，$y=f(x)$ のグラフを描け．ただし，グラフの凹凸は調べなくてもよいが，グラフの通る点が簡単に分かる場合は明記すること，また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ は証明なしで用いてよい.

1-4. (1) $(f(x))^2$ の x に関する導関数を求めよ.

(2) 関係式 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ によって y を x の関数と見なすとき，導関数 $y'=\dfrac{dy}{dx}$ を x, y を用いて表せ.

(3) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ の点 $\Big(1, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\Big)$ における接線の方程式を求めよ.

1-5. 関係式 $x^2+2xy+4y^2=1$ によって y を x の関数と見なす.

(1) y の導関数 $y'=\dfrac{dy}{dx}$ を x, y を用いて表せ.

(2) $y'=0$ をみたす x をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた x における y の 2 階導関数 y'' の値を求めよ.

1-6. (1) p, q, r を実数とするとき，3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ が少なくとも 1 つの実根 (実解) をもつことを示せ.

(2) n を自然数，$a_0, a_1, ..., a_{2n+1}$ は実数で $a_0>0$ とするとき，奇数次の代数方程式

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

は，少なくとも 1 つの実根 (実解) をもつことを示せ.

1-7. 次で定義される関数を双曲線関数という．ハイパーボリックサインまたはサインハイパーボリックなどと読む.

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad \tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

(1) 次を示せ．ただし，三角関数と同様に $(\sinh(x))^2$ を $\sinh^2(x)$ などと書く.

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1, \qquad \sinh(x+y)=\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y).$$

(2) $\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x)$ の導関数を双曲線関数を用いて表せ.