

2023年度 学問入門講座

フリーズの数学

青山学院大学 理工学部

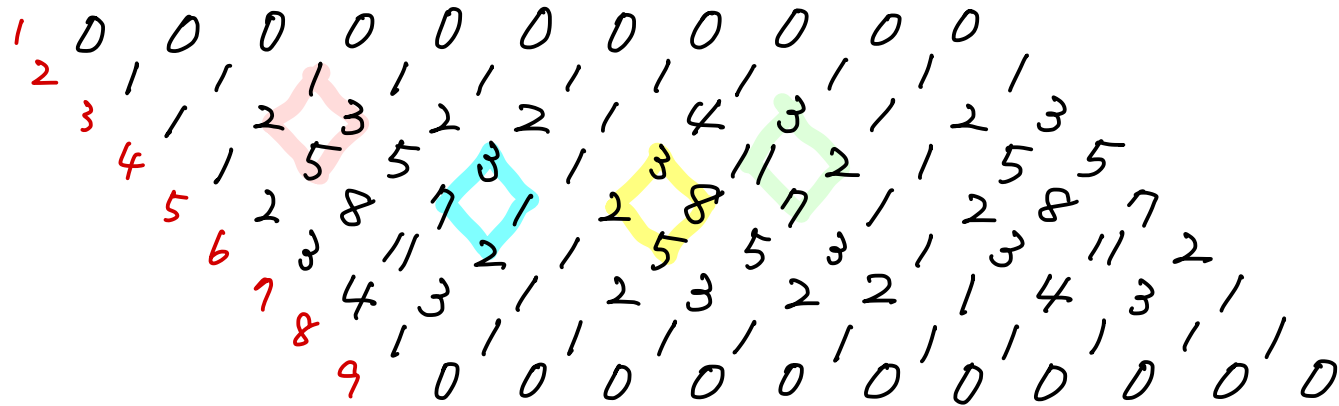
数理サイエンス学科

西山 享

2023年3月1日(水)

ユ=モジュラー規則

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \rightsquigarrow \Delta = ad - bc = 1 \quad \begin{cases} \text{ユ} = \dots 1 \\ \text{モジュラー} \dots \text{ユ=ット} \\ \text{単位} \end{cases}$$



どこのところでもユ=モジュラー. 二れで 最初の3行

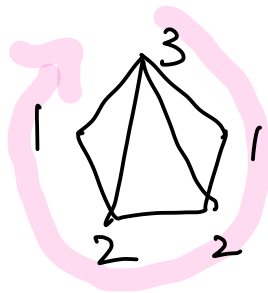
ユ=モ規則 → おんなの行が計算できる.

おんな... あ〜ら不思議!! 8行目は1に, 9行目は0に なる!!

もっせやってみる.

0 0 0 0 0 0 0 0 0
 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 3 1 2 2 1 3 1 2 2
 2 1 3 1 2 2 1 3
 1 1 1 1 1 1 1 1
 0 0 0 0 0 0 0 0

おっおっ



0 0 0 0 0 0 0 0 0
 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 1 2 3 1 2 3 1 2 3
 1 5 2 1 5 2 1 5 2
 2 3 1 2 3 1 2 3 1
 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 0 0 0 0 0 0 0 0 0

おっお

おん?

0 0 0 0 0 0 0 0 0
 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 3 2 3 2 3 2 3 2
 5 5 5 5 5 5
 12 8 12 8 12 8
 19 19 19 19 19
 45 30 45 30 45

→ x

x を計算してみる

$$x = \frac{45 \cdot 30 - 1}{19} = \frac{(2 \cdot 19 + 7) \cdot 30 - 1}{19} = 60 + \frac{210 - 1}{19} = 60 + \frac{190 + 19}{19}$$

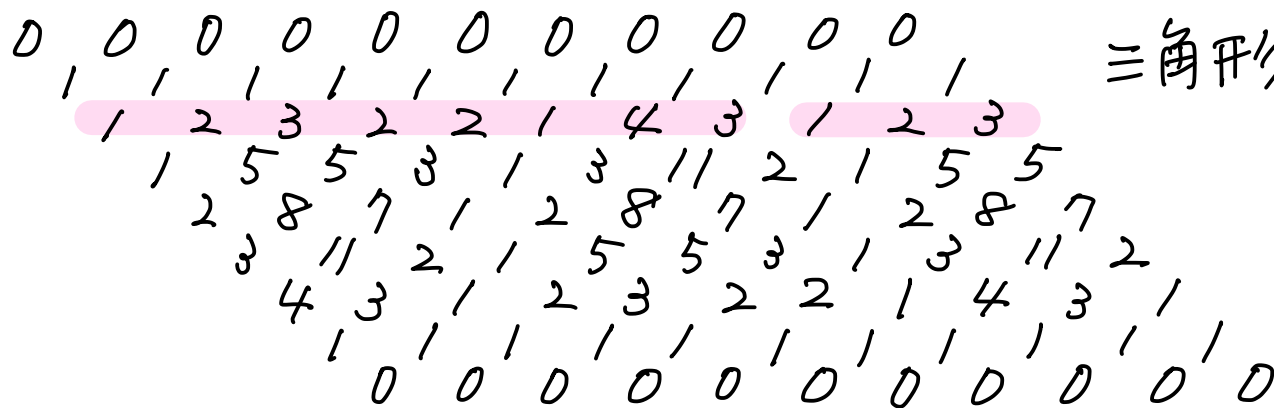
$$45 \times 30 - 19 \times x = 1 \quad = 60 + 11 = 71$$

おんは 10:19:11 算 11:19:11

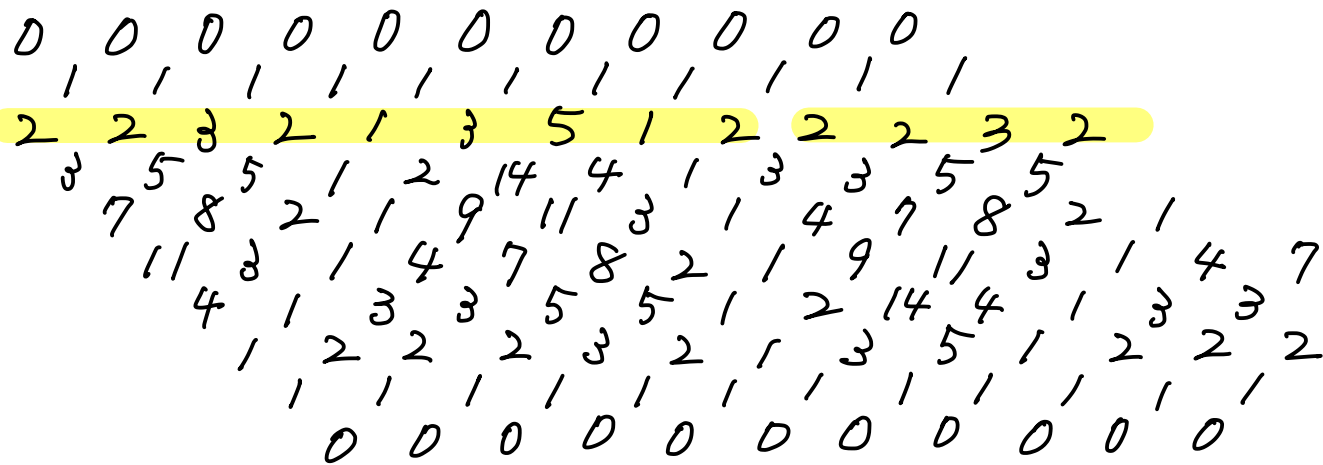
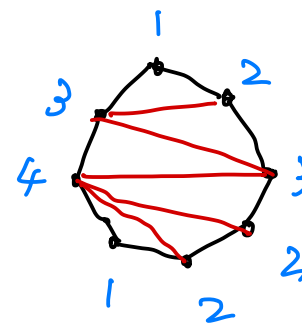
不思議なこともあった”

11:13 試してみる!!

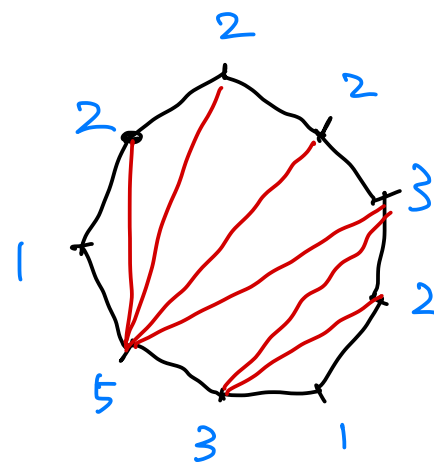
種明かし



8角形の
三角形分割



9角形



三角形分割から決まる種数数列 = 奇蹄列

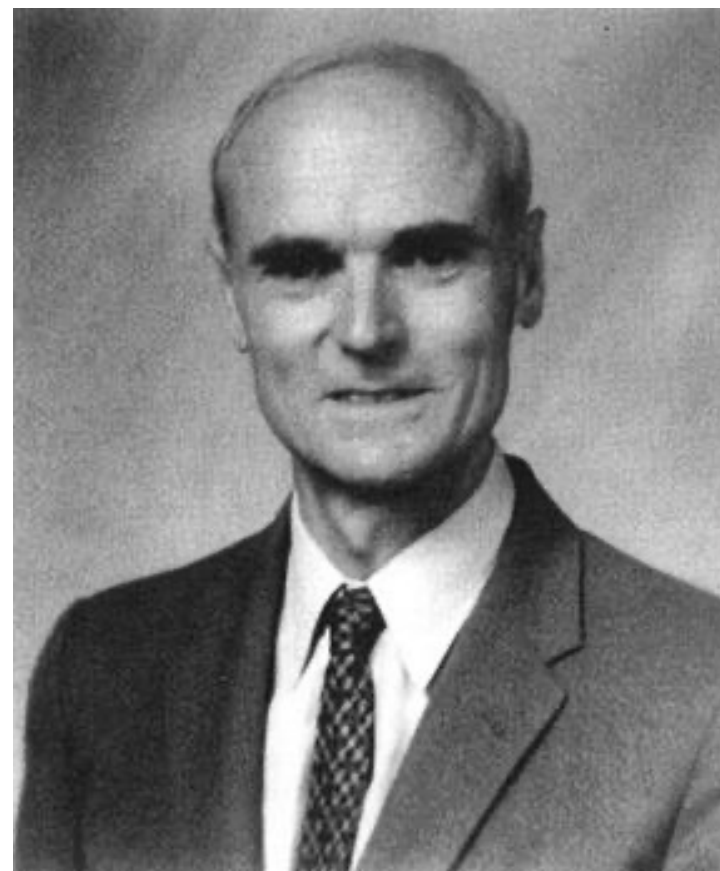
⇒ 0 と 1 にほぞりを入れた「きれいな」模様ができる!

この点とエドゲージ-が見 (1973) **7-rees** と名付けられた。

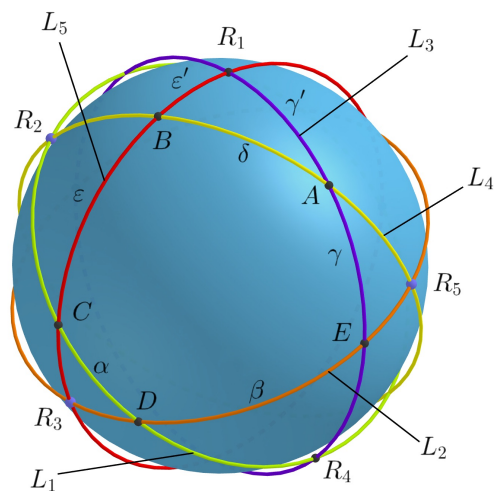


「リス」の産みの親
コンウェイとコクセター

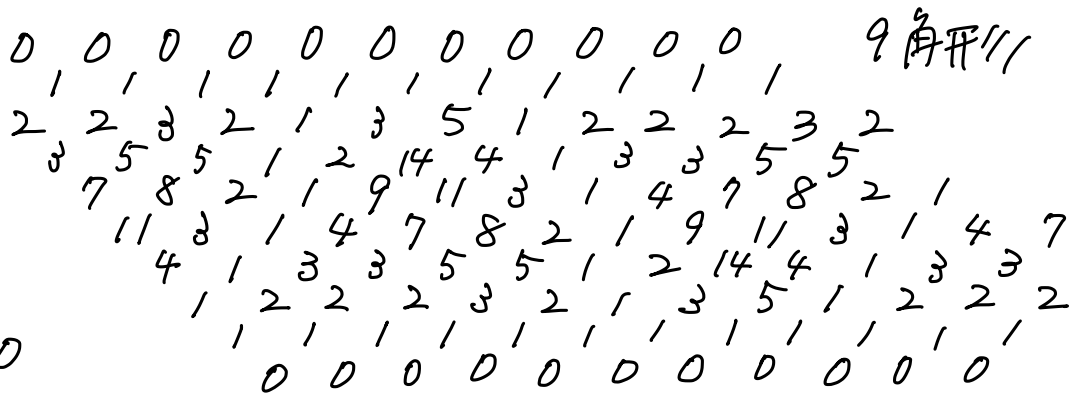
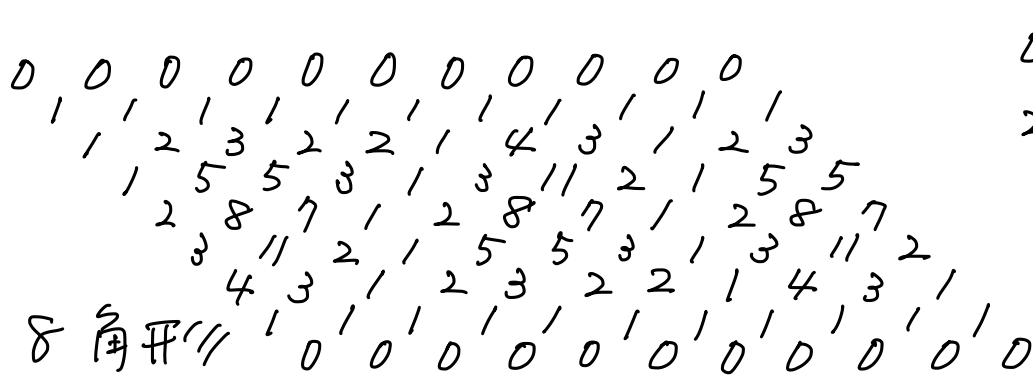
コクセター H. S. M. Coxeter (1907–2003)



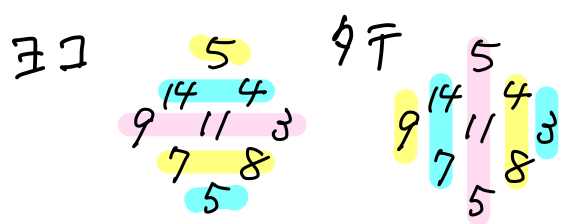
ジョン・コンウェイ John Conway (1937–2020)



711-ズ'には驚ろくよう性質が他にもたくさんある。さか'してみよう!



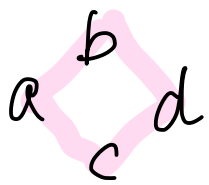
- ① エニモジユラー未見則 (あたり前?)
- ② 現われる数字はすべて自然数 (ゼロが出現するまでは、その後は整数)
- ③ 余計め上と余計め下の数字の \wedge は互いに素
- ④ 繰り返しのパターンは $\triangle \nabla \triangle \nabla \triangle \dots$ の形 (逆方向もOK)
- ⑤ 余計めに連続する3つの数 $a \quad b \quad c$ ($a+c$) は b で割り切れる
- ⑥ 1つだけ菱形の形: $\exists 1$



$$\begin{aligned}
 & 9 \cdot 11 \cdot 3 + 7 \cdot 8 \cdot 5 + 5 \cdot 14 \cdot 4 \\
 = & 5 \cdot 11 \cdot 5 + 4 \cdot 8 \cdot 9 + 3 \cdot 14 \cdot 7 (=857) \quad \text{たぶん!!}
 \end{aligned}$$

① (数学では) 起こることすべてに理由がある ← 理解してみる.

③ 斜め上と斜め下の数字の \wedge は互いに素



ユークリッド-ユークリッド規則 $ad - bc = 1$

a と b の最大公約数 $\leq p$ と可なり $a = a'p, b = b'p$

$\therefore ad - bc = (a'd - b'c)p = 1 \quad \therefore p = 1 \quad \text{QED}$

(ユークリッド) 規則は非常に強力

⑤ 斜めに連続する3つの数 a, b, c $(a+c)$ は b で割り切れる

実はもっと詳しい性質がある!!

⑤ 斜めに連続する3つの数 a b c $(a+c)$ は b で割り切れる

← 実はもっと詳しい性質がある

$$\text{差分方程式 } f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$$

$(1 \leq i \leq n)$

(a_1, a_2, \dots, a_n) は種数列

g_i, h_i, k_i も同様に定めると $\square \Rightarrow$ 規則を満たす.

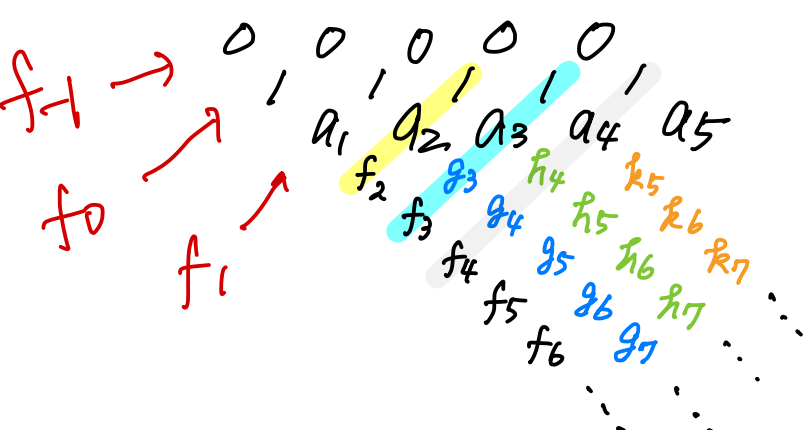
QED !! what???

すなわち $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$

$\leadsto a_i = \frac{f_i + f_{i-2}}{f_{i-1}}$ は整数 OK

元の種数列 \nearrow
 \therefore 整数

\nwarrow $\left(\frac{a+c}{b} \right)$



連分數

$$a_1, a_1 - \frac{1}{a_2}, a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3}}, a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \frac{1}{a_4}}} \dots$$

$$1 = 1$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

$$1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}}} = \frac{3}{8}$$

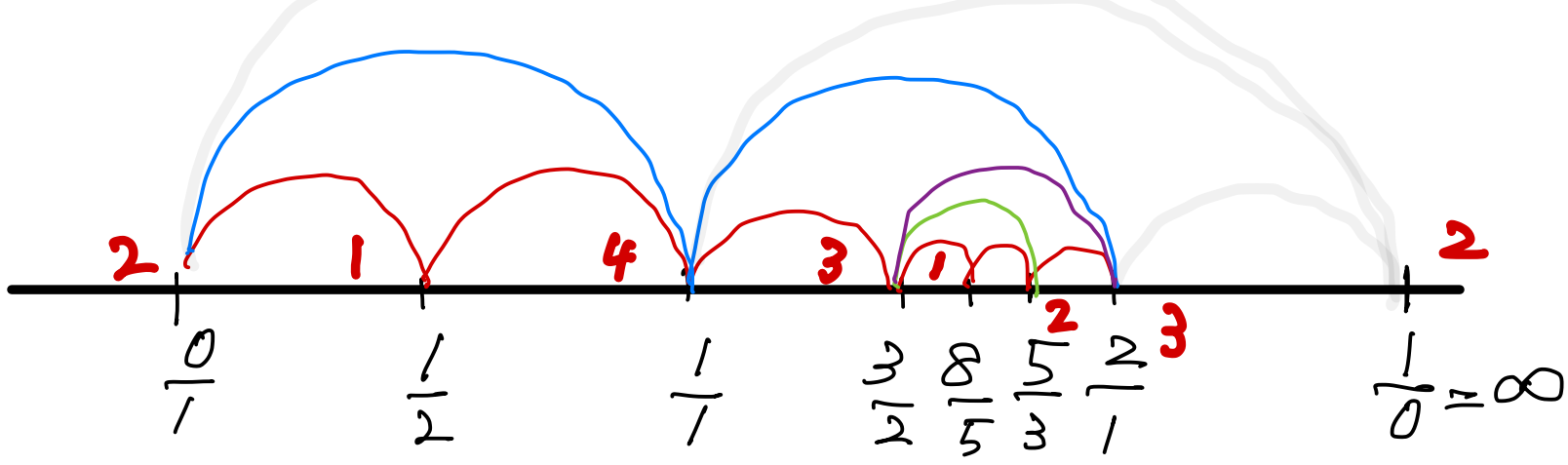
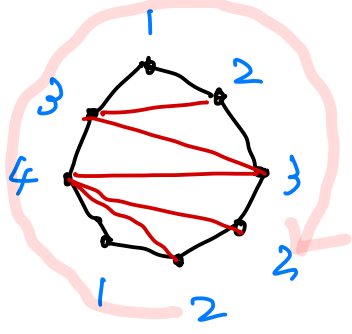
$$1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}} = \frac{4}{11}$$

種數列 a_1, a_2, a_3, \dots



ファライ數列

八角形

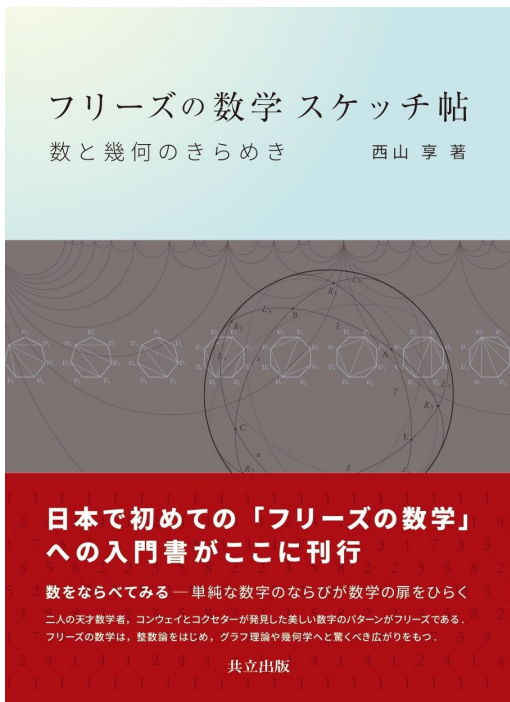


他にも

① コクセター・リグジンの公式

② コクセターの行列式表示 について まだまだ多くの性質が
あります。

詳しく知りたい人のために本を書きました!!



フリーズの数学 スケッチ帖

— 数と幾何のきらめき —

発売日：2022年07月11日

ISBN9784320114715

体裁A5・312頁

共立出版

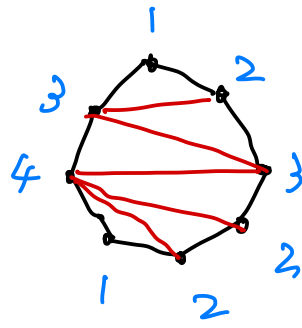
Mathematics of Frieze Patterns

A glimpse of geometry and algebra

電子版もあります。

8 角形 //

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	2	2	1	4	3	1	2	3	
1	5	5	3	1	3	11	2	1	5	5	
2	8	7	1	2	8	7	1	2	8	7	
3	11	2	1	5	5	3	1	3	11	2	
4	3	1	2	3	2	2	1	4	3	1	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



9 角形 //

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
2	2	3	2	1	3	5	1	2	2	2	3	2	
3	5	5	1	2	14	4	1	3	3	5	5		
7	8	2	1	9	11	3	1	4	7	8	2	1	
11	3	1	4	7	8	2	1	9	11	3	1	4	7
4	1	3	3	5	5	1	2	14	4	1	3	3	
1	2	2	2	3	2	1	3	5	1	2	2	2	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

