フリーズの数学

総合的な探求の時間 (兵庫県立長田高等学校)

Kyo Nishiyama　西山 享 (青山学院大学)

AGU (Aoyama Gakuin Univeristy)

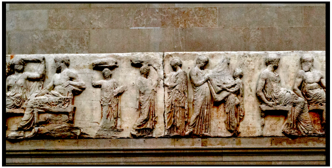
2021/03/05, Friday

コンウェイとコクセターのフリーズ I

フリーズって何だろう？　あまり聞き慣れない言葉かもしれないが，
フリーズ (frieze) というのは，建築用語である．

古典建築 (ギリシャ・ローマ) で柱や壁の上部の繰り返し装飾，転じて帯状の繰り返しのある装飾一般

パルナッソス宮殿



パンテオン

数学に現れるフリーズ

$$
\begin{array}{c}
0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\
1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \\
\cdots \quad 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2 \quad \cdots \\
1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \\
0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\
1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \\
1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 3 \\
\cdots \quad 1\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 2 \quad \cdots \\
1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \\
0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\
1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \\
1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3 \\
\cdots \quad 1\ \ 5\ \ 2\ \ 1\ \ 5\ \ 2\ \ 1\ \ 5\ \ 2\ \ 1\ \ 5\ \ 2\ \ 1\ \ 5\ \ 2\ \ 1\ \ 5\ \ 2 \quad \cdots \\
2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1 \\
1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1 \\
0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0
\end{array}
$$

ユニモジュラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない．

1. 第 1 行目には 0 を並べる
2. 第 2 行目には半分ずらせて 1 を並べる
3. 第 3 行目には種数列 (数字の列)，たとえば $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$ を周期的に並べる．
4. 第 4 行目からさきはユニモジュラー規則で計算 (!!) する
5. そうすると不思議なことに 1 の行と 0 の行が現れる

ユニモジュラー規則とは？

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array} \implies ad - bc = 1, \quad \text{つまり } c = \frac{ad-1}{b}$$

このように上の 2 行にある 3 つの数字から 4 番目の数字が決まる．

ユニモジュラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない.

1. 第 1 行目には 0 を並べる
2. 第 2 行目には半分ずらせて 1 を並べる
3. 第 3 行目には種数列 (数字の列)，たとえば $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$ を周期的に並べる.
4. 第 4 行目からさきはユニモジュラー規則で計算 (!!) する
5. そうすると不思議なことに 1 の行と 0 の行が現れる

ユニモジュラー規則とは？

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array} \implies ad - bc = 1, \qquad \text{つまり } c = \frac{ad-1}{b}$$

このように上の 2 行にある 3 つの数字から 4 番目の数字が決まる.

ユニモジュラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない.

1. 第 1 行目には 0 を並べる
2. 第 2 行目には半分ずらせて 1 を並べる
3. 第 3 行目には種数列 (数字の列)，たとえば $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$ を周期的に並べる.
4. 第 4 行目からさきはユニモジュラー規則で計算 (!!) する
5. そうすると不思議なことに 1 の行と 0 の行が現れる

ユニモジュラー規則とは？

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array} \implies ad - bc = 1, \qquad \text{つまり } c = \frac{ad-1}{b}$$

このように上の 2 行にある 3 つの数字から 4 番目の数字が決まる.

ユニモジュラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない.

1. 第 1 行目には 0 を並べる
2. 第 2 行目には半分ずらせて 1 を並べる
3. 第 3 行目には種数列 (数字の列)，たとえば $[1,2,2,3,1,2,4]$ を周期的に並べる.
4. 第 4 行目からさきはユニモジュラー規則で計算 (!!) する
5. そうすると不思議なことに 1 の行と 0 の行が現れる

ユニモジュラー規則とは？

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad ad - bc = 1, \qquad \text{つまり } c = \frac{ad-1}{b}$$

このように上の 2 行にある 3 つの数字から 4 番目の数字が決まる.

ユニモジュラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない.

1. 第 1 行目には 0 を並べる
2. 第 2 行目には半分ずらせて 1 を並べる
3. 第 3 行目には種数列 (数字の列)，たとえば $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$ を周期的に並べる.
4. 第 4 行目からさきはユニモジュラー規則で計算 (!!) する
5. そうすると不思議なことに 1 の行と 0 の行が現れる

ユニモジュラー規則とは？

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix} \implies ad - bc = 1, \quad \text{つまり } c = \frac{ad-1}{b}$$

このように上の 2 行にある 3 つの数字から 4 番目の数字が決まる.

ユニモジュラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない.

1. 第 1 行目には 0 を並べる
2. 第 2 行目には半分ずらせて 1 を並べる
3. 第 3 行目には種数列 (数字の列)，たとえば $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$ を周期的に並べる.
4. 第 4 行目からさきはユニモジュラー規則で計算 (!!) する
5. そうすると不思議なことに 1 の行と 0 の行が現れる

ユニモジュラー規則とは？

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array} \implies ad - bc = 1, \quad \text{つまり } c = \frac{ad-1}{b}$$

このように上の 2 行にある 3 つの数字から 4 番目の数字が決まる.

ユニモジュラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない.

1. 第 1 行目には 0 を並べる
2. 第 2 行目には半分ずらせて 1 を並べる
3. 第 3 行目には種数列 (数字の列), たとえば $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$ を周期的に並べる.
4. 第 4 行目からさきはユニモジュラー規則で計算 (!!) する
5. そうすると不思議なことに 1 の行と 0 の行が現れる

ユニモジュラー規則とは？

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array} \implies ad - bc = 1, \qquad \text{つまり } c = \frac{ad-1}{b}$$

このように上の 2 行にある 3 つの数字から 4 番目の数字が決まる.

試しにやってみよう

種数列は $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$ でやってみる.

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4
. . . .

$\Longrightarrow$

試しにやってみよう

種数列は $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$ でやってみる.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc}
0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 && 0 \\
& 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 && 1 \\
&& 1 && 2 && 2 && 3 && 1 && 2 && 4 && 1 && 2 && 2 && 3 && 1 && 2 && 4 && 1 && 2 && 2 && 3 && 1 && 2 && 4 \\
&&& \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot && \cdot
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$

試しにやってみよう

種数列は $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$ でやってみる.

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4

. . . .

$\Longrightarrow$

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4

1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2 1 7 3

1 7 3 1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2

2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

自由にプリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある.

- 種数列から始める（すでにやった）
- 対角線から始める．上の例では $[0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 0]$
- ジグザグ対角線から始める．(やってみよう．おもしろい．)
- 変数!! からはじめる

いつもうまく行くとは限らないが，対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く．

1 の稲妻配置:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

自由にプリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある.

- 種数列から始める（すでにやった）
- 対角線から始める．上の例では $[0,1,1,1,1,2,1,0]$
- ジグザグ対角線から始める.（やってみよう．おもしろい．）
- 変数!! からはじめる

いつもうまく行くとは限らないが，対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く.

1 の稲妻配置:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

自由にプリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある.

- 種数列から始める（すでにやった）
- 対角線から始める．上の例では $[0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 0]$
- ジグザグ対角線から始める．(やってみよう．おもしろい．)
- 変数!! からはじめる

いつもうまく行くとは限らないが，対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く．

1 の稲妻配置:

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
   1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2
  1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
   1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

自由にプリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある.

- 種数列から始める（すでにやった）
- 対角線から始める．上の例では $[0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 0]$
- ジグザグ対角線から始める．(やってみよう．おもしろい．)
- 変数!! からはじめる

いつもうまく行くとは限らないが，対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く．

1 の稲妻配置:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

自由にプリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある．

- 種数列から始める（すでにやった）
- 対角線から始める．上の例では $[0,1,1,1,1,2,1,0]$
- ジグザグ対角線から始める．(やってみよう．おもしろい．)
- 変数!! からはじめる

いつもうまく行くとは限らないが，対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く．

1 の稲妻配置:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

自由にプリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある.

- 種数列から始める（すでにやった）
- 対角線から始める．上の例では $[0,1,1,1,1,2,1,0]$
- ジグザグ対角線から始める．(やってみよう．おもしろい．)
- 変数!! からはじめる

いつもうまく行くとは限らないが，対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く.

1 の稲妻配置:

```
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
  1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
    1   2   3   1   2   3   1   2   3   1   2   3   1   2   3
      1   5   2   1   5   2   1   5   2   1   5   2   1   5   2
    1   2   3   1   2   3   1   2   3   1   2   3   1   2   3   1
      1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
        0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
```

変数 x, y, z で始める

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & \frac{y+1}{x} & & \frac{x+z}{y} & & \frac{y+1}{z} & & z & & \frac{xy+yz+x+z}{xyz} & & x & & \frac{y+1}{x} & & \frac{x+}{y} \\
y & & \frac{yz+x+z}{xy} & & \frac{xy+x+z}{yz} & & y & & \frac{yz+x+z}{xy} & & \frac{xy+x+z}{yz} & & y & & \frac{yz+x+z}{xy} & \\
 & z & & \frac{xy+yz+x+z}{xyz} & & x & & \frac{y+1}{x} & & \frac{x+z}{y} & & \frac{y+1}{z} & & z & & \frac{xy+yz}{xy} \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}
$$

人生，いつもうまく行くとは限らない I

出鱈目な種数列を使うともちろん (?) フリーズ模様にはならない．

出鱈目な種数列: $[2, 3, 3, 1, 4, 5]$

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

2 3 3 1 4 5 2 3 3 1 4

5 8 2 3 19 9 5 8 2 3

13 5 5 14 34 22 13 5 5 14

8 12 23 25 83 57 8 12 23

19 55 41 61 215 35 19 55 41

87 98 100 158 132 83 87 98

155 239 259 97 313 380 155 239

378 619 159 230 1433 677 378

979 380 377 1053 2553 1651 979

601 901 1726 1876 6226 4276

1425 4125 3075 4575 16125 2625

人生，いつもうまく行くとは限らない II

規則的な種数列でもダメ．

出鱈目な (!!) 規則的種数列: $[1, 2, 3, 4, 5]$

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 1 2 3

1 5 11 19 4 1 5 11 19 4 1 5 11

2 18 52 15 3 2 18 52 15 3 2 18

7 85 41 11 5 7 85 41 11 5 7 85

33 67 30 18 17 33 67 30 18 17 33

26 49 49 61 80 26 49 49 61 80 26

19 80 166 287 63 19 80 166 287 63

31 271 781 226 46 31 271 781 226 46

105 1275 615 165 75 105 1275 615 165

対角線に並べる数列も出鱈目だとダメだ．もっともこの場合には周期的にはなるが，フリーズに現れる数が自然数ではない!!

人生，いつもうまく行くとは限らない III

自然数が現れるのが当たり前だと思っていたが，実はそうではなかった!!

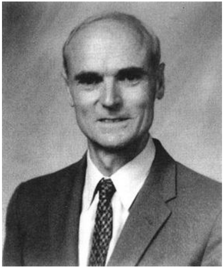
出鱈目な対角線: $[0, 1, 2, 2, 4, 3, 1, 0]$

0		0		0		0		0		0		0		0		0	
	1		1		1		1		1		1		1		1		1
		2		3/2		3		5/4		5/3		3		31/24		2	
			2		7/2		11/4		13/12		4		23/8		19/12		2
				4		23/8		19/12		2		7/2		11/4		13/12	
					3		31/24		2		3/2		3		5/4		5/3
						1		1		1		1		1		1	
							0		0		0		0		0		0

コンウェイとコクセター・写真と生年月日

フリーズに天才的な理解をもたらしたのがコクセターで，その証明には
コンウェイの天才が必要だった.

H.S.M. Coxeter (1907–2003)



John Conway (1937–2020)

[論文]：

コクセター [4] H. S. M. Coxeter, Frieze patterns, Acta Arith. 18 (1971), 297–310.

コンウェイ・コクセター [2], [3] J. H. Conway and H. S. M. Coxeter, Triangulated polygons and frieze patterns, Math. Gaz. 57 (1973), 87–94; 175–183.

コンウェイ・コクセターの定理

定理 (Conway-Coxeter)

フリーズ・パターンが出来上がるための必要十分条件は
種数列が多角形の三角形分割に付随した奇蹄列であることである.

種数列 = 奇蹄列

不思議なことに奇蹄列から始めると垂直方向にも周期的になる．では,

奇蹄列 = quiddity とは？

その前に... 三角形分割について説明しよう

コンウェイ・コクセターの定理

定理 (Conway-Coxeter)
フリーズ・パターンが出来上がるための必要十分条件は
種数列が多角形の三角形分割に付随した奇跡列であることである．

$$\text{種数列} = \text{奇跡列}$$

不思議なことに奇跡列から始めると垂直方向にも周期的になる．では，

$$\text{奇跡列} = \text{quiddity とは？}$$

その前に... 三角形分割について説明しよう

コンウェイ・コクセターの定理

定理 (Conway-Coxeter)

フリーズ・パターンが出来上がるための必要十分条件は
種数列が多角形の三角形分割に付随した奇跡列であることである．

$$\text{種数列} = \text{奇跡列}$$

不思議なことに奇跡列から始めると垂直方向にも周期的になる．では，

$$\text{奇跡列} = \text{quiddity とは？}$$

その前に... 三角形分割について説明しよう

コンウェイ・コクセターの定理

定理 (Conway-Coxeter)

フリーズ・パターンが出来上がるための必要十分条件は
種数列が多角形の三角形分割に付随した奇蹄列であることである.

$$\text{種数列} = \text{奇蹄列}$$

不思議なことに奇蹄列から始めると垂直方向にも周期的になる．では,

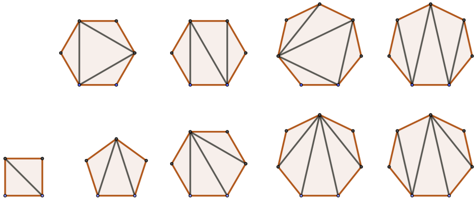
$$\text{奇蹄列} = \text{quiddity とは？}$$

その前に... 三角形分割について説明しよう

三角形分割

凸多角形の頂点同士を結んで，多角形を三角形に分割することを三角形分割という．例を見てみる．

Figure: 多角形の三角形分割



多角形の頂点ごとに，いくつの三角形が集まっているかを数えて，それを並べたものを奇蹄列と呼ぶ．

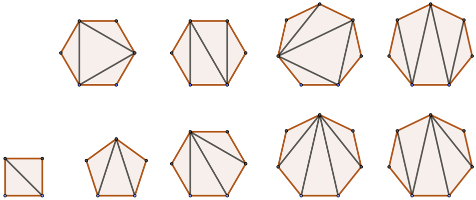
上の図の三角形分割に対する奇蹄列: 上段左から

$[1,3,1,3,1,3], [1,3,2,1,3,2], [1,2,3,1,3,1,4], [1,3,3,1,2,3,2]$

三角形分割

凸多角形の頂点同士を結んで，多角形を三角形に分割することを三角形分割という．例を見てみる．

Figure: 多角形の三角形分割

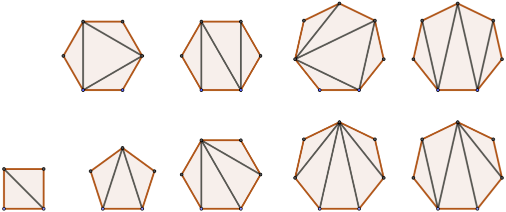


多角形の頂点ごとに，いくつの三角形が集まっているかを数えて，それを並べたものを奇蹄列と呼ぶ．
上の図の三角形分割に対する奇蹄列: 上段左から
$[1,3,1,3,1,3],[1,3,2,1,3,2],[1,2,3,1,3,1,4],[1,3,3,1,2,3,2]$

n 角形の三角形分割の性質

- 奇蹄列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は $n-2$ 個
- 奇蹄列の総和は $3(n-2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数 C_{n-2}

Figure: 多角形の三角形分割



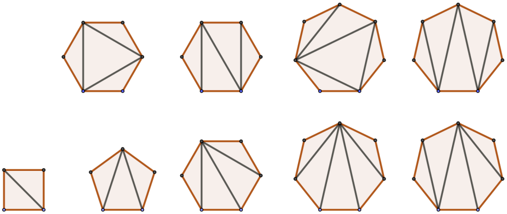
奇蹄列: 上段左から

$[1,3,1,3,1,3], [1,3,2,1,3,2], [1,2,3,1,3,1,4], [1,3,3,1,2,3,2]$

♙ n 角形の三角形分割の性質

- 奇蹄列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は $n-2$ 個
- 奇蹄列の総和は $3(n-2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数 C_{n-2}

Figure: 多角形の三角形分割



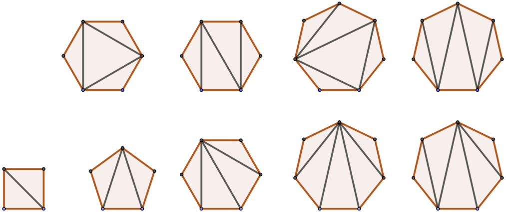
奇蹄列: 上段左から

$[1, 3, 1, 3, 1, 3], [1, 3, 2, 1, 3, 2], [1, 2, 3, 1, 3, 1, 4], [1, 3, 3, 1, 2, 3, 2]$

n 角形の三角形分割の性質

- 奇蹄列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は $n-2$ 個
- 奇蹄列の総和は $3(n-2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数 C_{n-2}

Figure: 多角形の三角形分割



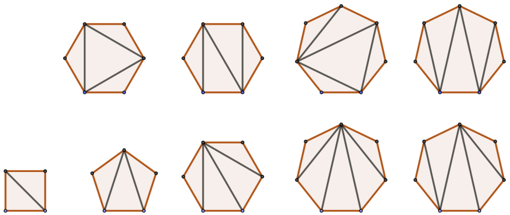
奇蹄列: 上段左から

$[1,3,1,3,1,3],[1,3,2,1,3,2],[1,2,3,1,3,1,4],[1,3,3,1,2,3,2]$

n 角形の三角形分割の性質

- 奇蹄列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は $n-2$ 個
- 奇蹄列の総和は $3(n-2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数 C_{n-2}

Figure: 多角形の三角形分割



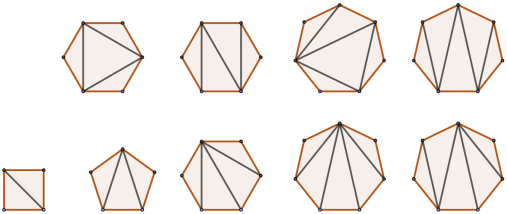
奇蹄列: 上段左から

$[1,3,1,3,1,3],[1,3,2,1,3,2],[1,2,3,1,3,1,4],[1,3,3,1,2,3,2]$

n 角形の三角形分割の性質

- 奇蹄列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は $n-2$ 個
- 奇蹄列の総和は $3(n-2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数 C_{n-2}

Figure: 多角形の三角形分割



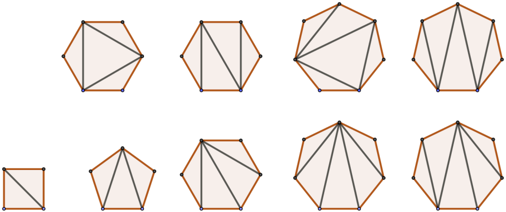
奇蹄列: 上段左から

$[1,3,1,3,1,3], [1,3,2,1,3,2], [1,2,3,1,3,1,4], [1,3,3,1,2,3,2]$

n 角形の三角形分割の性質

- 奇蹄列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は $n-2$ 個
- 奇蹄列の総和は $3(n-2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数 C_{n-2}

Figure: 多角形の三角形分割



奇蹄列: 上段左から

$[1,3,1,3,1,3], [1,3,2,1,3,2], [1,2,3,1,3,1,4], [1,3,3,1,2,3,2]$

カタラン数

Eugène Catalan (1814–1894)

カタラン数 $C_n = \dfrac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$:

$$C_0 = C_1 = 1,\ \ C_2 = 2,\ \ C_3 = 5,\ \ C_4 = 14,\ \ C_5 = 42,\ \ C_6 = 132,\ \ \ldots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

- トーナメントの組合せの総数
- n 組の括弧の入れ子の仕方の総数
  たとえば，$n = 3$ のときは，次の 5 通りある

$$((())),\ (()()),\ (())(),\ ()(()),\ ()()()$$

- 一辺が n の正方形格子上の左下隅から右上隅の頂点に向かう経路で対角線より上の点（対角線を含む）を通るものの総数
- 円周上の $2n$ 個の点を n 本のたがいに交わらない弦で結ぶ結び方の総数
- 源氏香の総数（次ページの図参照）

カタラン数

Eugène Catalan (1814–1894)

カタラン数 $C_n = \dfrac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$:

$$C_0 = C_1 = 1,\quad C_2 = 2,\quad C_3 = 5,\quad C_4 = 14,\quad C_5 = 42,\quad C_6 = 132,\quad \ldots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

カタラン数

Eugène Catalan (1814–1894)

カタラン数 $C_n = \dfrac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$:

$$C_0 = C_1 = 1,\quad C_2 = 2,\quad C_3 = 5,\quad C_4 = 14,\quad C_5 = 42,\quad C_6 = 132,\quad \dots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

1. トーナメントの組合せの総数
2. n 組の括弧の入れ子の仕方の総数
   たとえば，$n = 3$ のときは，次の 5 通りある
   $$\big((())\big),\ (()()),\ (())(),\ ()(()),\ ()()()$$
3. 一辺が n の正方形格子上の左下隅から右上隅の頂点に向かう経路で対角線より上の点（対角線を含む）を通るものの総数
4. 円周上の $2n$ 個の点を n 本のたがいに交わらない弦で結ぶ方法の総数
5. 源氏香の総数（次ページの図参照）

カタラン数

Eugène Catalan (1814–1894)

カタラン数 $C_n = \dfrac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$:

$$C_0 = C_1 = 1,\quad C_2 = 2,\quad C_3 = 5,\quad C_4 = 14,\quad C_5 = 42,\quad C_6 = 132,\quad \ldots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

1. トーナメントの組合せの総数
2. n 組の括弧の入れ子の仕方の総数
   たとえば，$n = 3$ のときは，次の 5 通りある
   $$\Big((())\Big),\quad (()()),\quad (())(),\quad ()(()),\quad ()()()$$
3. 一辺が n の正方形格子上の左下隅から右上隅の頂点に向かう経路で対角線より上の点（対角線を含む）を通るものの総数
4. 円周上の $2n$ 個の点を n 本のたがいに交わらない弦で結ぶ方法の総数
5. 源氏香の総数（次ページの図参照）

カタラン数

Eugène Catalan (1814–1894)

カタラン数 $C_n = \dfrac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$:

$$C_0 = C_1 = 1,\quad C_2 = 2,\quad C_3 = 5,\quad C_4 = 14,\quad C_5 = 42,\quad C_6 = 132,\quad \ldots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

1. トーナメントの組合せの総数
2. n 組の括弧の入れ子の仕方の総数
   たとえば，$n=3$ のときは，次の 5 通りある
   $$\Big((())\Big),\ \ (()()),\ \ (())(),\ \ ()(()),\ \ ()()()$$
3. 一辺が n の正方形格子上の左下隅から右上隅の頂点に向かう経路で対角線より上の点（対角線を含む）を通るものの総数
4. 円周上の $2n$ 個の点を n 本のたがいに交わらない弦で結ぶ方法の総数
5. 源氏香の総数（次ページの図参照）

カタラン数

Eugène Catalan (1814–1894)

カタラン数 $C_n = \dfrac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$:

$$C_0 = C_1 = 1,\quad C_2 = 2,\quad C_3 = 5,\quad C_4 = 14,\quad C_5 = 42,\quad C_6 = 132,\quad \ldots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

1. トーナメントの組合せの総数
2. n 組の括弧の入れ子の仕方の総数
   たとえば，$n = 3$ のときは，次の 5 通りある
   $$\big((())\big),\ \ (()()),\ \ (())(),\ \ ()(()),\ \ ()()()$$
3. 一辺が n の正方形格子上の左下隅から右上隅の頂点に向かう経路で対角線より上の点（対角線を含む）を通るものの総数
4. 円周上の $2n$ 個の点を n 本のたがいに交わらない弦で結ぶ方法の総数
5. 源氏香の総数（次ページの図参照）

カタラン数

Eugène Catalan (1814–1894)

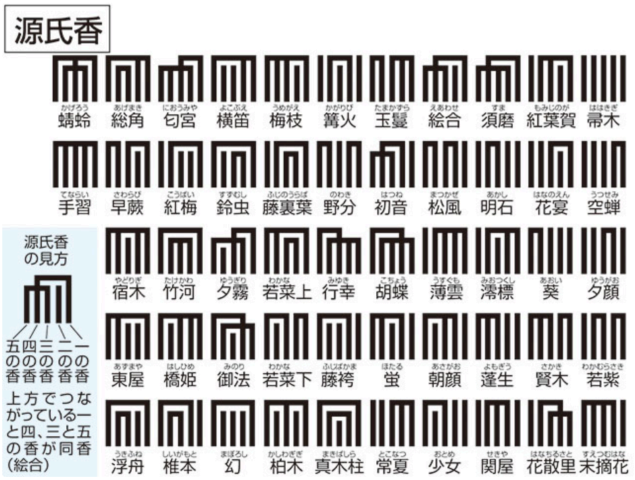
カタラン数 $C_n = \dfrac{1}{n+1}\,{}_{2n}C_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$:

$$C_0 = C_1 = 1,\quad C_2 = 2,\quad C_3 = 5,\quad C_4 = 14,\quad C_5 = 42,\quad C_6 = 132,\quad \ldots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

1. トーナメントの組合せの総数
2. n 組の括弧の入れ子の仕方の総数
   たとえば, $n = 3$ のときは, 次の 5 通りある
   $$\Big((())\Big),\quad (()()),\quad (())(),\quad ()(()),\quad ()()()$$
3. 一辺が n の正方形格子上の左下隅から右上隅の頂点に向かう経路で対角線より上の点（対角線を含む）を通るものの総数
4. 円周上の $2n$ 個の点を n 本のたがいに交わらない弦で結ぶ方法の総数
5. 源氏香の総数（次ページの図参照）

源氏香の総数（下図参照）（実は少し違う．源氏香の数は 52 で，源氏物語は 54 帖．さらにカタラン数は $C_5 = 42$ である．何がどう異なっているのかは宿題とする．）



デジタル大辞泉より

コンウェイ・コクセターのフリーズの性質

面白い性質がいくつもある!!! 発見してみよう．（すぐにわかるものから，なかなかわからないものまで．）

7 角形: $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$

```
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
  1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
    1   2   2   3   1   2   4   1   2   2   3   1   2   4   1   2   2   3   1   2   4
      1   3   5   2   1   7   3   1   3   5   2   1   7   3   1   3   5   2   1   7   3
        1   7   3   1   3   5   2   1   7   3   1   3   5   2   1   7   3   1   3   5   2
          2   4   1   2   2   3   1   2   4   1   2   2   3   1   2   4   1   2   2   3   1
            1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
              0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
```

挑戦：見つけてみよう!!

- 特徴 1: フリーズの幅が m （0, 1 の行は除く）なら種数列の周期は $m+3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性: 0 を頂点とする一辺の幅が $m+4$ の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素（平行四辺形の辺で結ばれている 2 数）
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ（あとで詳しく説明する.）
- 特徴 5: 差分方程式： $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!! $\rightsquigarrow$ フリーズ多様体

- 特徴 1: フリーズの幅が m （0, 1 の行は除く）なら種数列の周期は $m+3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性: 0 を頂点とする一辺の幅が $m+4$ の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素（平行四辺形の辺で結ばれている 2 数）
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ（あとで詳しく説明する.）
- 特徴 5: 差分方程式： $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!! $\rightsquigarrow$ フリーズ多様体

- 特徴 1: フリーズの幅が m （0, 1 の行は除く）なら種数列の周期は $m+3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性: 0 を頂点とする一辺の幅が $m+4$ の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素（平行四辺形の辺で結ばれている 2 数）
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ（あとで詳しく説明する.）
- 特徴 5: 差分方程式： $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!! $\rightsquigarrow$ フリーズ多様体

- 特徴 1: フリーズの幅が m （0, 1 の行は除く）なら種数列の周期は $m + 3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性: 0 を頂点とする一辺の幅が $m + 4$ の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素（平行四辺形の辺で結ばれている 2 数）
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ（あとで詳しく説明する.）
- 特徴 5: 差分方程式： $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!! $\rightsquigarrow$ フリーズ多様体

- 特徴 1: フリーズの幅が m（0, 1 の行は除く）なら種数列の周期は $m+3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性: 0 を頂点とする一辺の幅が $m+4$ の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素（平行四辺形の辺で結ばれている 2 数）
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ（あとで詳しく説明する.）
- 特徴 5: 差分方程式：$f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!! $\rightsquigarrow$ フリーズ多様体

- 特徴 1: フリーズの幅が m （0, 1 の行は除く）なら種数列の周期は $m+3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性: 0 を頂点とする一辺の幅が $m+4$ の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素（平行四辺形の辺で結ばれている 2 数）
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ（あとで詳しく説明する.）
- 特徴 5: 差分方程式： $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!! $\rightsquigarrow$ フリーズ多様体

- 特徴 1: フリーズの幅が m （0, 1 の行は除く）なら種数列の周期は $m+3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性: 0 を頂点とする一辺の幅が $m+4$ の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素（平行四辺形の辺で結ばれている 2 数）
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ（あとで詳しく説明する.）
- 特徴 5: 差分方程式： $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!! $\rightsquigarrow$ フリーズ多様体

連分数とフリーズ I

種数列は奇蹄列（三角形分割）だった
$\rightsquigarrow$ 対角線は奇蹄列で表せる!

連分数

次のような分数を連分数と呼ぶ．たとえば高木貞治の教科書 [9] 参照.

$$
\begin{aligned}
[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} \\
&= a_0 + \frac{1 \mid}{\mid a_1} + \frac{1 \mid}{\mid a_2} + \cdots + \frac{1 \mid}{\mid a_n}
\end{aligned}
$$

無限個続く極限まで許すと楽しい連分数がたくさん知られている

その例（Wikipedia より）

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\ddots}}}}}} = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ddots}}}}} = 3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{6+\ddots}}}}}$$

$$\pi = 2+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1/2+\cfrac{1}{1/3+\cfrac{1}{1/4+\ddots}}}} = 2+\cfrac{2}{1+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\ddots}}}}$$

$$\pi = 3+\cfrac{1^3}{6+\cfrac{1^3+2^3}{6+\cfrac{1^3+2^3+3^3+4^3}{6+\cfrac{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3}{6+\cfrac{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3}{6+\ddots}}}}}$$

連分因子

オイラーは連分因子 (continuant) を考えた.
ここでは少しだけ形を変えたものを紹介する.

$$a_1 - \frac{1\ |}{|\ a_2} - \frac{1\ |}{|\ a_3} - \cdots - \frac{1\ |}{|\ a_n} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\cdots - \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_n}}}}$$

$$= \frac{K_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{K_{n-1}(a_2, a_3, \ldots, a_n)}$$

たとえば

$$a_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{K_1(a_1)}{K_0(\varnothing)}$$

$$a_1 - \frac{1\ |}{|\ a_2} = \frac{a_1 a_2 - 1}{a_1} = \frac{K_2(a_1, a_2)}{K_1(a_1)}$$

$$a_1 - \frac{1\ |}{|\ a_2} - \frac{1\ |}{|\ a_3} = \frac{a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3}{a_2 a_3 - 1} = \frac{K_3(a_1, a_2, a_3)}{K_2(a_2, a_3)}$$

と計算できるから（実際にやってみて下さい，おもしろいよ）

$$
\begin{aligned}
K_1 &= a_1, \quad K_2 = a_1 a_2 - 1 \\
K_3 &= a_3 K_2 - K_1 = a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3 \\
K_4 &= a_4 K_3 - K_2 = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 - a_1 a_4 - a_3 a_4 + 1 \\
K_5 &= a_5 K_4 - K_3 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \\
&\qquad - a_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 a_5 - a_1 a_4 a_5 - a_3 a_4 a_5 + a_1 + a_3 + a_5
\end{aligned}
$$

K_5 はそうとう複雑だが，パターンはあるようだ．
よく式を見て欲しい．おわかりになっただろうか?

$$
\begin{aligned}
K_3 &= 123 - 1\cancel{2}\cancel{3} - \cancel{1}\cancel{2}3 \\
K_4 &= 1234 - 12\cancel{3}\cancel{4} - 1\cancel{2}\cancel{3}4 - \cancel{1}\cancel{2}34 + \cancel{1}\cancel{2}\bcancel{3}\bcancel{4} \\
K_5 &= 12345 - 123\cancel{4}\cancel{5} - 12\cancel{3}\cancel{4}5 - 1\cancel{2}\cancel{3}45 - \cancel{1}\cancel{2}345 \\
&\qquad + 1\cancel{2}\cancel{3}\bcancel{4}\bcancel{5} + \cancel{1}\cancel{2}3\bcancel{4}\bcancel{5} + \cancel{1}\cancel{2}\bcancel{3}\bcancel{4}5
\end{aligned}
$$

そう，K_n は $a_1 a_2 \cdots a_n$ から連続する $a_i a_{i+1}$ を可能な限り取り除くことによって得られる．そのときに取り除くペアの個数によって符号をつけることを忘れないようにする．

連分因子とフリーズ I

種数列 $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ によって構成されたフリーズの第 1 対角線を次のように書いておく.

$$f_{-1} = 0, f_0 = 1, f_1 = a_1, f_2, f_3, \ldots$$

定理 (Coxeter)

種数列を $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ とするとき，オイラーの連分因子 $K_s(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ を用いてフリーズの対角線が与えられる.

$$f_s = K_s(a_1, a_2, \ldots, a_s)$$

ただし s は周期 n で考え，$a_{n+1} = a_1$ などと解釈する.

もちろん第 2 対角線 $g_1 = a_2, g_2, g_3, \ldots$ は

$$g_s = K_s(a_2, a_3, \ldots, a_s)$$

なので,

連分因子とフリーズ II

$$\frac{f_s}{g_{s-1}} = \frac{K_s(a_1, a_2, \ldots, a_s)}{K_{s-1}(a_2, a_3, \ldots, a_s)} = a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\cdots - \cfrac{1}{a_{s-1} - \cfrac{1}{a_s}}}}$$

である!! 確認してみよう.

6 角形: $[2, 2, 1, 4, 1, 2]$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & & & & & & & & & \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & & & & & & & \\
& & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & & & & & & & & & \\
& & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 & & 3 & & & & & & & & & \\
& & & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & & & & & \\
& & & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
& & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

連分因子とフリーズ III

Leonhard Euler (1707–1783)

ファレイの迷宮へようこそ

ファレイ生年月日: John Farey Sr. (1766 – 1826)
建築家ファレイの考えた数列を紹介する．1 次から 11 次までのファレイ数列:

$$\mathfrak{F}_1 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{1})$$
$$\mathfrak{F}_2 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1})$$
$$\mathfrak{F}_3 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1})$$
$$\mathfrak{F}_4 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1})$$
$$\mathfrak{F}_5 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1})$$
$$\mathfrak{F}_6 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1})$$
$$\mathfrak{F}_7 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1})$$
$$\mathfrak{F}_8 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1})$$
$$\mathfrak{F}_9 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{1}{1})$$
$$\mathfrak{F}_{10} = (\frac{0}{1}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7},$$
$$\mathfrak{F}_{11} = (\frac{0}{1}, \frac{1}{11}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{2}{11}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}, \frac{6}{11}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8},$$

え？ なんの不思議もないつまらない数列だって？ いやいや，そうじゃないんですよ．

ファレイ数列

定義

分母が N 以下の有理数（分数）で 0 以上 1 以下のものを**すべて**小さい順に並べた数列を N 次の**ファレイ数列**と呼び $\mathfrak{F}_N$ で表す．
ただし $0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$ と記す．また分数は**既約なもの**を取る．

有理数 $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}$ を[1] 既約分数で表して

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, v_2 = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{と書いたとき} \quad d(v_1, v_2) = \left| a_1 b_2 - a_2 b_1 \right|$$

を v_1 と v_2 の**ファレイ距離**と呼ぶ．
以下，紛れがない場合にはファレイ距離を単に距離と呼ぶ

また，$v = \dfrac{a}{b}$ と書いたとき我々は常に $b \geqslant 0$ と考えることにしよう．

[1] $\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す記号である．つまり $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

ファレイ数列

定義

分母が N 以下の有理数（分数）で 0 以上 1 以下のものを**すべて**小さい順に並べた数列を N 次の**ファレイ数列**と呼び $\mathfrak{F}_N$ で表す．
ただし $0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$ と記す．また分数は**既約なもの**を取る．

有理数 $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}$ を[1] 既約分数で表して

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, v_2 = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{と書いたとき} \quad d(v_1, v_2) = \left| a_1 b_2 - a_2 b_1 \right|$$

を v_1 と v_2 の**ファレイ距離**と呼ぶ．
以下，紛れがない場合にはファレイ距離を<u>単に距離と呼ぶ</u>

また，$v = \dfrac{a}{b}$ と書いたとき我々は常に $b \geqslant 0$ と考えることにしよう．

[1] $\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す記号である．つまり $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

ファレイグラフ

数直線上に 2 つの有理数 u, v をとる

- (u, v) が辺のときに u と v を実軸上に直径を持つ半円で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る．中心は u, v の中点 $(u+v)/2$ である.
- xy 平面において x 軸を実軸とみなすのならば，半円（辺）は $y \geqslant 0$ の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが，二つの辺は決して交わることがない.

さて，このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものをファレイグラフと呼ぶ．ファレイグラフの例を $N = 1, 2, 3, \ldots, 10$ まで挙げておこう.

ファレイグラフ

数直線上に 2 つの有理数 u, v をとる

- (u, v) が辺のときに u と v を実軸上に直径を持つ半円で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る．中心は u, v の中点 $(u+v)/2$ である.
- xy 平面において x 軸を実軸とみなすのならば，半円（辺）は $y \geqslant 0$ の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが，二つの辺は決して交わることがない.

さて，このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものをファレイグラフと呼ぶ．ファレイグラフの例を $N = 1, 2, 3, \ldots, 10$ まで挙げておこう.

ファレイグラフ

数直線上に 2 つの有理数 u, v をとる

- (u, v) が辺のときに u と v を実軸上に直径を持つ半円で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る．中心は u, v の中点 $(u+v)/2$ である.
- xy 平面において x 軸を実軸とみなすのならば，半円（辺）は $y \geqslant 0$ の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが，二つの辺は決して交わることがない.

さて，このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものをファレイグラフと呼ぶ．ファレイグラフの例を $N = 1, 2, 3, \ldots, 10$ まで挙げておこう.

ファレイグラフ

数直線上に 2 つの有理数 u, v をとる

- (u, v) が辺のときに u と v を実軸上に直径を持つ半円で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る．中心は u, v の中点 $(u+v)/2$ である.
- xy 平面において x 軸を実軸とみなすのならば，半円（辺）は $y \geqslant 0$ の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが，二つの辺は決して交わることがない.

さて，このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものをファレイグラフと呼ぶ．ファレイグラフの例を $N = 1, 2, 3, \ldots, 10$ まで挙げておこう.

ファレイグラフ

数直線上に 2 つの有理数 u, v をとる

- (u, v) が辺のときに u と v を実軸上に直径を持つ半円で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る．中心は u, v の中点 $(u+v)/2$ である.
- xy 平面において x 軸を実軸とみなすのならば，半円（辺）は $y \geqslant 0$ の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが，二つの辺は決して交わることがない.

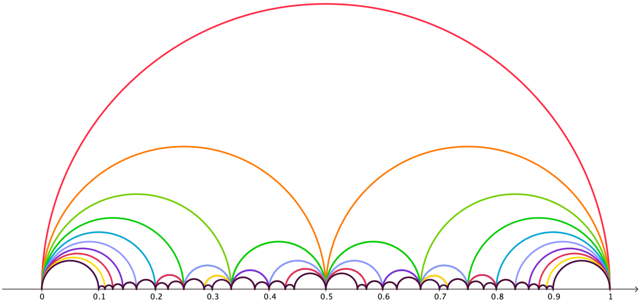
さて，このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものをファレイグラフと呼ぶ．ファレイグラフの例を $N = 1, 2, 3, \ldots, 10$ まで挙げておこう.

ファレイグラフ

数直線上に 2 つの有理数 u, v をとる

- (u, v) が辺のときに u と v を実軸上に直径を持つ半円で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る．中心は u, v の中点 $(u+v)/2$ である.
- xy 平面において x 軸を実軸とみなすのならば，半円（辺）は $y \geqslant 0$ の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが，二つの辺は決して交わることがない.

さて，このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものをファレイグラフと呼ぶ．ファレイグラフの例を $N = 1, 2, 3, \ldots, 10$ まで挙げておこう.



以下，ファレイ数列とファレイグラフを区別しないでどちらも $\mathfrak{F}_N$ で表すことにする.

ファレイ数列（ファレイグラフ） $\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った 2 つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- N を増やしたとき，$\mathfrak{F}_N$ の隣接する 2 点 v_1, v_2 の間に付け加わる分数 v_3 は

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

の形をしている．また，この 3 点はファレイ三角形をなす．

- ファレイ多角形 $\mathfrak{F}_N$ はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ

ファレイ数列（ファレイグラフ） $\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った 2 つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- N を増やしたとき，$\mathfrak{F}_N$ の隣接する 2 点 v_1, v_2 の間に付け加わる分数 v_3 は

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

の形をしている．また，この 3 点はファレイ三角形をなす．

- ファレイ多角形 $\mathfrak{F}_N$ はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ

ファレイ数列（ファレイグラフ）$\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った 2 つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- N を増やしたとき，$\mathfrak{F}_N$ の隣接する 2 点 v_1, v_2 の間に付け加わる分数 v_3 は

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

  の形をしている．また，この 3 点はファレイ三角形をなす．
- ファレイ多角形 $\mathfrak{F}_N$ はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ

ファレイ数列（ファレイグラフ）$\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った 2 つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- N を増やしたとき，$\mathfrak{F}_N$ の隣接する 2 点 v_1, v_2 の間に付け加わる分数 v_3 は

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

  の形をしている．また，この 3 点はファレイ三角形をなす．
- ファレイ多角形 $\mathfrak{F}_N$ はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ

ファレイ数列（ファレイグラフ） $\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った 2 つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- N を増やしたとき，$\mathfrak{F}_N$ の隣接する 2 点 v_1, v_2 の間に付け加わる分数 v_3 は

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

  の形をしている．また，この 3 点はファレイ三角形をなす．
- ファレイ多角形 $\mathfrak{F}_N$ はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ

ファレイ数列（ファレイグラフ）$\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った 2 つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- N を増やしたとき，$\mathfrak{F}_N$ の隣接する 2 点 v_1, v_2 の間に付け加わる分数 v_3 は
$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$
の形をしている．また，この 3 点はファレイ三角形をなす．
- ファレイ多角形 $\mathfrak{F}_N$ はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ

フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる

フリーズの第 1 対角線を $f_1, f_2, f_3, \ldots$, 第 2 対角線を $g_1, g_2, g_3, \ldots$ と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる．ナント!!!
これはファレイ三角形の並びと同じである．

定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第 *1* 対角線と第 *2* 対角線を上のように書いておき，$v_s = g_{s-1}/f_s$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ とおく．

- 奇蹄列が 1 で終わっているときは $\{v_0 = 0, v_2, \ldots, v_{n-2} = 1\}$ は区間 $[0, 1]$ に含まれる．
- これと $\infty = \dfrac{1}{0}$ を合わせるとファレイ n 角形になり，そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する．

例で確かめてみよう．

フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる
フリーズの第 1 対角線を $f_1, f_2, f_3, \dots,$ 第 2 対角線を $g_1, g_2, g_3, \dots$ と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる. ナント!!!
これはファレイ三角形の並びと同じである.

定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第 *1* 対角線と第 *2* 対角線を上のように書いておき, $v_s = g_{s-1}/f_s$, $s = 0, 1, 2, \dots$ とおく.

- 奇蹄列が 1 で終わっているときは $\{v_0 = 0, v_2, \dots, v_{n-2} = 1\}$ は区間 $[0, 1]$ に含まれる.
- これと $\infty = \dfrac{1}{0}$ を合わせるとファレイ n 角形になり, そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する.

例で確かめてみよう.

フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる
フリーズの第 1 対角線を $f_1, f_2, f_3, \ldots$，第 2 対角線を $g_1, g_2, g_3, \ldots$ と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる．ナント!!!
これはファレイ三角形の並びと同じである．

定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第 1 対角線と第 2 対角線を上のように書いておき，$v_s = g_{s-1}/f_s$，$s = 0, 1, 2, \ldots$ とおく．

- 奇蹄列が 1 で終わっているときは $\{v_0 = 0, v_2, \ldots, v_{n-2} = 1\}$ は区間 $[0, 1]$ に含まれる．
- これと $\infty = \dfrac{1}{0}$ を合わせるとファレイ n 角形になり，そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する．

例で確かめてみよう．

フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる
フリーズの第 1 対角線を $f_1, f_2, f_3, \ldots$，第 2 対角線を $g_1, g_2, g_3, \ldots$ と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる．ナント!!!
これはファレイ三角形の並びと同じである．

定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第 *1* 対角線と第 *2* 対角線を上のように書いておき，$v_s = g_{s-1}/f_s$，$s = 0, 1, 2, \ldots$ とおく．

1. 奇蹄列が 1 で終わっているときは $\{v_0 = 0, v_2, \ldots, v_{n-2} = 1\}$ は区間 $[0, 1]$ に含まれる．
2. これと $\infty = \frac{1}{0}$ を合わせるとファレイ n 角形になり，そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する．

例で確かめてみよう．

フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる
フリーズの第 1 対角線を $f_1, f_2, f_3, \ldots$，第 2 対角線を $g_1, g_2, g_3, \ldots$ と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる．ナント!!!
これはファレイ三角形の並びと同じである．

定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第 *1* 対角線と第 *2* 対角線を上のように書いておき，$v_s = g_{s-1}/f_s$，$s = 0, 1, 2, \ldots$ とおく．

1. 奇蹄列が 1 で終わっているときは $\{v_0 = 0, v_2, \ldots, v_{n-2} = 1\}$ は区間 $[0, 1]$ に含まれる．
2. これと $\infty = \dfrac{1}{0}$ を合わせるとファレイ n 角形になり，そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する．

例で確かめてみよう．

フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる
フリーズの第 1 対角線を $f_1, f_2, f_3, \ldots,$ 第 2 対角線を $g_1, g_2, g_3, \ldots$ と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる．ナント!!!
これはファレイ三角形の並びと同じである．

定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第 *1* 対角線と第 *2* 対角線を上のように書いておき，$v_s = g_{s-1}/f_s$，$s = 0, 1, 2, \ldots$ とおく．

1. 奇蹄列が 1 で終わっているときは $\{v_0 = 0, v_2, \ldots, v_{n-2} = 1\}$ は区間 $[0, 1]$ に含まれる．
2. これと $\infty = \dfrac{1}{0}$ を合わせるとファレイ n 角形になり，そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する．

例で確かめてみよう．

フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる
フリーズの第 1 対角線を $f_1, f_2, f_3, \ldots,$ 第 2 対角線を $g_1, g_2, g_3, \ldots$ と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる．ナント!!!
これはファレイ三角形の並びと同じである．

定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第 *1* 対角線と第 *2* 対角線を上のように書いておき，$v_s = g_{s-1}/f_s$，$s = 0, 1, 2, \ldots$ とおく．

1. 奇蹄列が 1 で終わっているときは $\{v_0 = 0, v_2, \ldots, v_{n-2} = 1\}$ は区間 $[0, 1]$ に含まれる．
2. これと $\infty = \dfrac{1}{0}$ を合わせるとファレイ n 角形になり，そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する．

例で確かめてみよう．

フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる
フリーズの第 1 対角線を $f_1, f_2, f_3, \ldots$，第 2 対角線を $g_1, g_2, g_3, \ldots$ と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

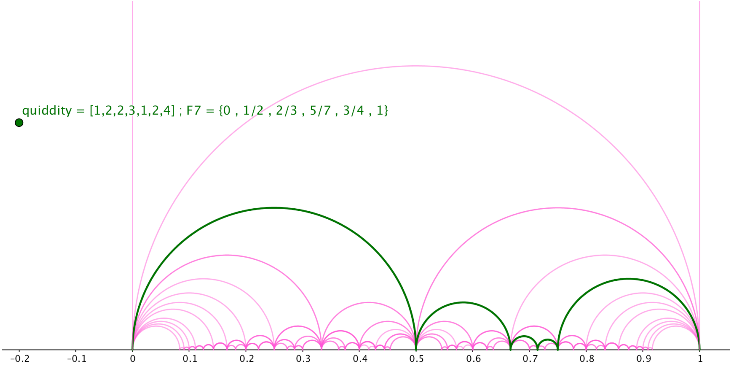
と並んでいる．ナント!!!
これはファレイ三角形の並びと同じである．

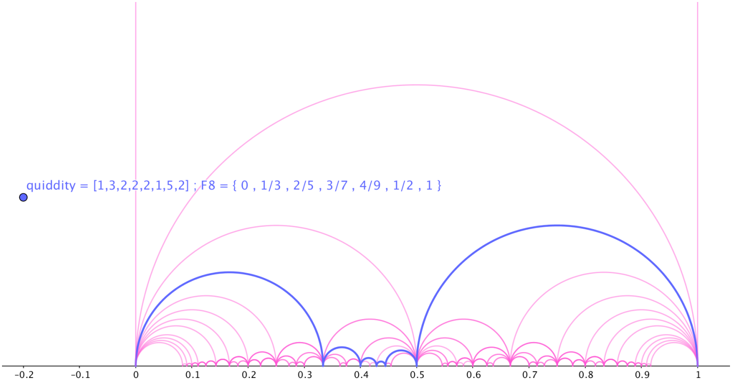
定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第 *1* 対角線と第 *2* 対角線を上のように書いておき，$v_s = g_{s-1}/f_s$，$s = 0, 1, 2, \ldots$ とおく．

1. 奇蹄列が 1 で終わっているときは $\{v_0 = 0, v_2, \ldots, v_{n-2} = 1\}$ は区間 $[0, 1]$ に含まれる．
2. これと $\infty = \dfrac{1}{0}$ を合わせるとファレイ n 角形になり，そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する．

例で確かめてみよう．


quiddity = [1,2,2,3,1,2,4] ; F7 = {0 , 1/2 , 2/3 , 5/7 , 3/4 , 1}
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


quiddity = [1,3,2,2,2,1,5,2] ; F8 = { 0 , 1/3 , 2/5 , 3/7 , 4/9 , 1/2 , 1 }
−0.2
−0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

ファレイ多角形からフリーズへ

ファレイ多角形を用いてフリーズの各成分を与えることもできる

- フリーズの第 i 行目，第 j 番目の対角線にある数字を $c_{i,j}$ と書く
- ファレイ多角形の頂点を $v_s = g_{s-1}/f_s$ とする
- ファレイ距離 $d(a/b, c/d) = |ad - bc|$ を用いると $c_{i,j}$ は

$$c_{i,j} = d(v_{j-2}, v_{i+j-1}) = |g_{i+j-2}f_{j-2} - g_{j-3}f_{i+j-1}|$$

ホントにそうなっているだろうか??? 8 角形: [1,2,3,2,2,1,4,3]

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	2	2	1	4	3	1	2	3	2	2	1	4	3
1	5	5	3	1	3	11	2	1	5	5	3	1	3	11	2
2	8	7	1	2	8	7	1	2	8	7	1	2	8	7	1
3	11	2	1	5	5	3	1	3	11	2	1	5	5	3	1
4	3	1	2	3	2	2	1	4	3	1	2	3	2	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3
−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2
−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1
−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1
−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

ファレイ多角形からフリーズへ

ファレイ多角形を用いてフリーズの各成分を与えることもできる

- フリーズの第 i 行目，第 j 番目の対角線にある数字を $c_{i,j}$ と書く
- ファレイ多角形の頂点を $v_s = g_{s-1}/f_s$ とする
- ファレイ距離 $d(a/b, c/d) = |ad - bc|$ を用いると $c_{i,j}$ は

$$c_{i,j} = d(v_{j-2}, v_{i+j-1}) = |g_{i+j-2}f_{j-2} - g_{j-3}f_{i+j-1}|$$

ホントにそうなっているだろうか??? 8 角形: [1,2,3,2,2,1,4,3]

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	2	2	1	4	3	1	2	3	2	2	1	4	3
1	5	5	3	1	3	11	2	1	5	5	3	1	3	11	2
2	8	7	1	2	8	7	1	2	8	7	1	2	8	7	1
3	11	2	1	5	5	3	1	3	11	2	1	5	5	3	1
4	3	1	2	3	2	2	1	4	3	1	2	3	2	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3
−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2
−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1
−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1
−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

ファレイ多角形からフリーズへ

ファレイ多角形を用いてフリーズの各成分を与えることもできる

- フリーズの第 i 行目，第 j 番目の対角線にある数字を $c_{i,j}$ と書く
- ファレイ多角形の頂点を $v_s = g_{s-1}/f_s$ とする
- ファレイ距離 $d(a/b, c/d) = |ad - bc|$ を用いると $c_{i,j}$ は

$$c_{i,j} = d(v_{j-2}, v_{i+j-1}) = |g_{i+j-2}f_{j-2} - g_{j-3}f_{i+j-1}|$$

ホントにそうなっているだろうか??? 8 角形:　[1,2,3,2,2,1,4,3]

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	2	2	1	4	3	1	2	3	2	2	1	4	3
1	5	5	3	1	3	11	2	1	5	5	3	1	3	11	2
2	8	7	1	2	8	7	1	2	8	7	1	2	8	7	1
3	11	2	1	5	5	3	1	3	11	2	1	5	5	3	1
4	3	1	2	3	2	2	1	4	3	1	2	3	2	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3
−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2
−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1
−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1
−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

ファレイ多角形からフリーズへ

ファレイ多角形を用いてフリーズの各成分を与えることもできる

- フリーズの第 i 行目，第 j 番目の対角線にある数字を $c_{i,j}$ と書く
- ファレイ多角形の頂点を $v_s = g_{s-1}/f_s$ とする
- ファレイ距離 $d(a/b, c/d) = |ad - bc|$ を用いると $c_{i,j}$ は

$$c_{i,j} = d(v_{j-2}, v_{i+j-1}) = |g_{i+j-2}f_{j-2} - g_{j-3}f_{i+j-1}|$$

ホントにそうなっているだろうか??? 8 角形:　[1,2,3,2,2,1,4,3]

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	2	2	1	4	3	1	2	3	2	2	1	4	3
1	5	5	3	1	3	11	2	1	5	5	3	1	3	11	2
2	8	7	1	2	8	7	1	2	8	7	1	2	8	7	1
3	11	2	1	5	5	3	1	3	11	2	1	5	5	3	1
4	3	1	2	3	2	2	1	4	3	1	2	3	2	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3
−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2
−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1
−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1
−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

ファレイ多角形からフリーズへ

ファレイ多角形を用いてフリーズの各成分を与えることもできる

- フリーズの第 i 行目，第 j 番目の対角線にある数字を $c_{i,j}$ と書く
- ファレイ多角形の頂点を $v_s = g_{s-1}/f_s$ とする
- ファレイ距離 $d(a/b, c/d) = |ad - bc|$ を用いると $c_{i,j}$ は

$$c_{i,j} = d(v_{j-2}, v_{i+j-1}) = |g_{i+j-2}f_{j-2} - g_{j-3}f_{i+j-1}|$$

ホントにそうなっているだろうか??? **8 角形:**　[1,2,3,2,2,1,4,3]

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	2	2	1	4	3	1	2	3	2	2	1	4	3
1	5	5	3	1	3	11	2	1	5	5	3	1	3	11	2
2	8	7	1	2	8	7	1	2	8	7	1	2	8	7	1
3	11	2	1	5	5	3	1	3	11	2	1	5	5	3	1
4	3	1	2	3	2	2	1	4	3	1	2	3	2	2	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3
−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2
−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1	−2	−8	−7	−1
−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1	−3	−11	−2	−1	−5	−5	−3	−1
−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1	−4	−3	−1	−2	−3	−2	−2	−1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1

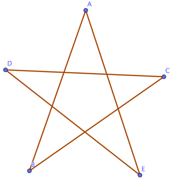
ガウスの奇蹟の五芒星 I

最後にコクセターがフリーズを研究するきっかけとなったガウスの五芒星の話をしよう [5, p.484].

球面五芒星

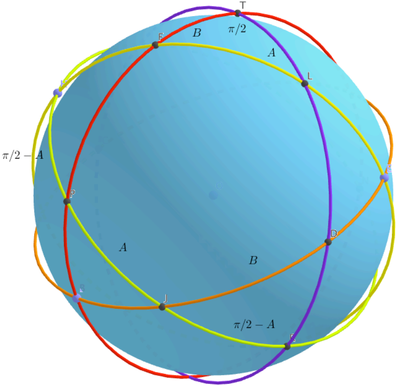
ガウスは単位球面上の五芒星（ペンタグラム）で星の各尖点が直角のものを研究していた．五芒星の中には五角形が現れる．

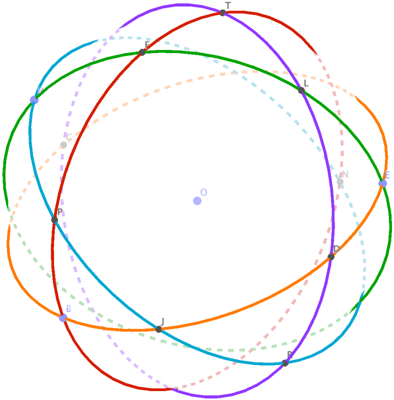
平面五芒星：



もちろん平面上では五つの星の尖点がすべて直角であることなどあり得ないが単位球面ではそれが可能である．

単位球面上の五芒星:





ちなみに単位球面の 2 点を結ぶ線分はその 2 点を結ぶ最短距離の曲線で，大円の一部である．（大円とは球の中心を通る平面と球面の共通部分になっているような円を指す．）

球面幾何学は大変おもしろいのでぜひ研究してみて欲しいが，今はその暇はない．

五芒星とフリーズ

結果だけ記すと，ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形（図では $\triangle TFL$）で決まること,
- その 3 角形は直角以外の 2 角の大きさ $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$ で決まることを発見し,
- 内部の五角形の辺の長さを a, b で表した.

他の 3 辺の長さを c, d, e と記すと実はこの 5 つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
& a & b & c & d & e & a & b & c & d & e & a & b & c & d & e & & \\
& & d & e & a & b & c & d & e & a & b & c & d & e & a & b & c & \\
& & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \quad 1 + b = de, \quad 1 + c = ea, \quad 1 + d = ab, \quad 1 + e = bc$$

が成り立っている.

五芒星とフリーズ

結果だけ記すと，ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形（図では $\triangle TFL$）で決まること，
- その3角形は直角以外の2角の大きさ $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$ で決まることを発見し，
- 内部の五角形の辺の長さを a, b で表した．

他の3辺の長さを c, d, e と記すと実はこの5つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
& a & b & c & d & e & a & b & c & d & e & a & b & c & d & e & & & \\
& & d & e & a & b & c & d & e & a & b & c & d & e & a & b & c & & \\
& & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \quad 1 + b = de, \quad 1 + c = ea, \quad 1 + d = ab, \quad 1 + e = bc$$

が成り立っている．

五芒星とフリーズ

結果だけ記すと，ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形（図では $\triangle TFL$）で決まること，
- その 3 角形は直角以外の 2 角の大きさ $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$ で決まることを発見し，
- 内部の五角形の辺の長さを a, b で表した．

他の 3 辺の長さを c, d, e と記すと実はこの 5 つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
a & b & c & d & e & a & b & c & d & e & a & b & c & d & e \\
d & e & a & b & c & d & e & a & b & c & d & e & a & b & c \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \quad 1 + b = de, \quad 1 + c = ea, \quad 1 + d = ab, \quad 1 + e = bc$$

が成り立っている．

五芒星とフリーズ

結果だけ記すと，ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形（図では $\triangle TFL$）で決まること，
- その 3 角形は直角以外の 2 角の大きさ $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$ で決まることを発見し，
- 内部の五角形の辺の長さを a, b で表した．

他の 3 辺の長さを c, d, e と記すと実はこの 5 つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & \\
 & a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & \\
 & & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \quad 1 + b = de, \quad 1 + c = ea, \quad 1 + d = ab, \quad 1 + e = bc$$

が成り立っている．

五芒星とフリーズ

結果だけ記すと，ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形（図では $\triangle TFL$）で決まること，
- その 3 角形は直角以外の 2 角の大きさ $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$ で決まることを発見し，
- 内部の五角形の辺の長さを a, b で表した．

他の 3 辺の長さを c, d, e と記すと実はこの 5 つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & \\
& a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & \\
& & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & \\
& & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \quad 1 + b = de, \quad 1 + c = ea, \quad 1 + d = ab, \quad 1 + e = bc$$

が成り立っている．

五芒星とフリーズ

結果だけ記すと，ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形（図では $\triangle TFL$）で決まること，
- その 3 角形は直角以外の 2 角の大きさ $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$ で決まることを発見し，
- 内部の五角形の辺の長さを a, b で表した．

他の 3 辺の長さを c, d, e と記すと実はこの 5 つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & & \\
& a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & \\
& & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & & d & & e & & a & & b & & c & \\
& & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \ \ 1 + b = de, \ \ 1 + c = ea, \ \ 1 + d = ab, \ \ 1 + e = bc$$

が成り立っている．

奇蹟の関係式

ガウスは次の定理をもとに球面五芒星を奇蹟の五芒星 (pentagaramma mirificum) と呼んだ.

定理 (Gauss)

上の設定のもとに

- $3+a+b+c+d+e = abcde = \sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e)}$
- S を内部の球面五角形の面積とすると

$$(1+\sqrt{-a})(1+\sqrt{-b})(1+\sqrt{-c})(1+\sqrt{-d})(1+\sqrt{-e}) = -abcde \cdot (\cos S + \sqrt{-1}\,\sin S)$$

が成り立つ.

奇蹟の関係式

ガウスは次の定理をもとに球面五芒星を奇蹟の五芒星 (pentagaramma mirificum) と呼んだ.

定理 (Gauss)

上の設定のもとに

1. $3+a+b+c+d+e = abcde = \sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e)}$
2. S を内部の球面五角形の面積とすると

$$(1+\sqrt{-a})(1+\sqrt{-b})(1+\sqrt{-c})(1+\sqrt{-d})(1+\sqrt{-e}) = -abcde \cdot (\cos S + \sqrt{-1}\ \sin S)$$

が成り立つ.

奇蹟の関係式

ガウスは次の定理をもとに球面五芒星を奇蹟の五芒星 (pentagaramma mirificum) と呼んだ.

定理 (Gauss)

上の設定のもとに

1. $3+a+b+c+d+e = abcde = \sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e)}$
2. S を内部の球面五角形の面積とすると

$$(1+\sqrt{-a})(1+\sqrt{-b})(1+\sqrt{-c})(1+\sqrt{-d})(1+\sqrt{-e}) = -abcde \cdot (\cos S + \sqrt{-1}\ \sin S)$$

が成り立つ.

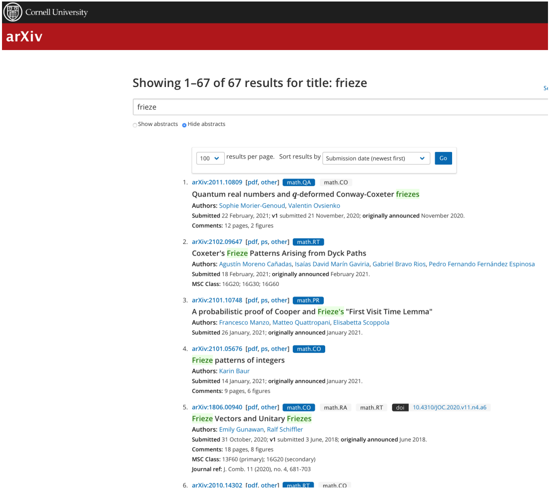
$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
& & x_0 & & \frac{x_1+1}{x_0} & & \frac{x_0+1}{x_1} & & x_1 & & \frac{x_0+x_1+1}{x_0x_1} & & x_0 & & \frac{x_1+1}{x_0} & & \frac{x_0+1}{x_1} & & x \\
& & & x_1 & & \frac{x_0+x_1+1}{x_0x_1} & & x_0 & & \frac{x_1+1}{x_0} & & \frac{x_0+1}{x_1} & & x_1 & & \frac{x_0+x_1+1}{x_0x_1} & & x_0 & \\
& & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
& & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}
$$

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

まだまだフリーズの物語は続く I

フリーズ方程式・フリーズ多様体や団代数 (クラスター代数) との関係などフリーズは現代数学の最前線で活発に研究が続けられている．その一端をのぞくために，フリーズ (frieze) をタイトルに含む最近の論文を検索してみた．

まだまだフリーズの物語は続く II



Cornell University

arXiv

Showing 1–67 of 67 results for title: frieze

frieze

Show abstracts Hide abstracts

100 results per page. Sort results by Submission date (newest first) Go

1. arXiv:2011.10809 [pdf, other] math.QA math.CO
Quantum real numbers and q-deformed Conway-Coxeter friezes
Authors: Sophie Morier-Genoud, Valentin Ovsienko
Submitted 22 February, 2021; v1 submitted 21 November, 2020; originally announced November 2020.
Comments: 12 pages, 2 figures

2. arXiv:2102.09647 [pdf, ps, other] math.RT
Coxeter's Frieze Patterns Arising from Dyck Paths
Authors: Agustín Moreno Cañadas, Isaías David Marín Gaviria, Gabriel Bravo Rios, Pedro Fernando Fernández Espinosa
Submitted 18 February, 2021; originally announced February 2021.
MSC Class: 16G20; 16G30; 16G60

3. arXiv:2101.10748 [pdf, ps, other] math.PR
A probabilistic proof of Cooper and Frieze's "First Visit Time Lemma"
Authors: Francesco Manzo, Matteo Quattropani, Elisabetta Scoppola
Submitted 26 January, 2021; originally announced January 2021.

4. arXiv:2101.05676 [pdf, ps, other] math.CO
Frieze patterns of integers
Authors: Karin Baur
Submitted 14 January, 2021; originally announced January 2021.
Comments: 9 pages, 6 figures

5. arXiv:1806.00940 [pdf, other] math.CO math.RA math.RT doi 10.4310/JOC.2020.v11.n4.a6
Frieze Vectors and Unitary Friezes
Authors: Emily Gunawan, Ralf Schiffler
Submitted 31 October, 2020; v1 submitted 3 June, 2018; originally announced June 2018.
Comments: 18 pages, 8 figures
MSC Class: 13F60 (primary); 16G20 (secondary)
Journal ref: J. Comb. 11 (2020), no. 4, 681-703

6. arXiv:2010.14302 [pdf, other] math.RT math.CO

参考文献 I

この講義録では主に次の論文を参考にした: [6], [7], [1].
日本語の成書は見当たらないが，ネット上の解説記事がある．参考になるだろう．

- 中島啓「クラスター代数とルート系」
  https://member.ipmu.jp/hiraku.nakajima/Talks/12_Hakken/hakken.pdf
- 黒木玄「フリーズパターン –数の繰り返し模様の不思議」2013 年 7 月 7 日
  http://www.math.tohoku.ac.jp/ kuroki/LaTeX/20120810FriezePattern.pdf

Charles H. Conley and Valentin Ovsienko, *Lagrangian configurations and symplectic cross-ratios*, Math. Ann. **375** (2019), no. 3-4, 1105–1145. MR 4023372

J. H. Conway and H. S. M. Coxeter, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz. **57** (1973), no. 400, 87–94. MR 461269

参考文献 II

- ———, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz. **57** (1973), no. 401, 175–183. MR 461270
- H. S. M. Coxeter, *Frieze patterns*, Acta Arith. **18** (1971), 297–310. MR 286771
- Carl Friedrich Gauß, *Werke. Ergänzungsreihe. Band III*, Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1975, Briefwechsel: C. F. Gauss–C. L. Gerling. [Correspondence: C. F. Gauss–C. L. Gerling], Edited by Clemens Schaefer, Reprint of the 1927 original. MR 552665
- Claire-Soizic Henry, *Coxeter friezes and triangulations of polygons*, Amer. Math. Monthly **120** (2013), no. 6, 553–558. MR 3063120
- Sophie Morier-Genoud, *Coxeter's frieze patterns at the crossroads of algebra, geometry and combinatorics*, Bull. Lond. Math. Soc. **47** (2015), no. 6, 895–938. MR 3431573

参考文献 III

- Richard P. Stanley, *Catalan numbers*, Cambridge University Press, New York, 2015. MR 3467982
- 高木貞治, 初等整数論講義 *(第 2 版)*, 共立出版, 1971.

これでオシマイ!!

お疲れさまでした