

# フリーズの数学

総合的な探求の時間 (兵庫県立長田高等学校)

Kyo Nishiyama 西山 享 (青山学院大学)

AGU (Aoyama Gakuin Univeristy)

2021/03/05, Friday

# コンウェイとコクセターのフリーズ I

フリーズって何だろう？ あまり聞き慣れない言葉かもしれないが、フリーズ (frieze) というのは、建築用語である。

古典建築 (ギリシャ・ローマ) で柱や壁の上部の繰り返し装飾, 転じて帯状の繰り返しのある装飾一般



パルナッソス宮殿



パンテオン

# 数学に現れるフリーズ

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
...  1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1 2  ...
      1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
...  1 2 2 1 3 1 2 2 1 3 1 2 2 1 3  ...
      1 3 1 2 2 1 3 1 2 2 1 3 1 2 2  ...
        1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
          0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
    1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
...  1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2  ...
      2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
        1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
          0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

# ユニモジューラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない。

- 1 第1行目には0を並べる
- 2 第2行目には半分ずらせて1を並べる
- 3 第3行目には種数列 (数字の列), たとえば  $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$  を周期的に並べる。
- 4 第4行目からさきはユニモジューラー規則で計算 (!!)
- 5 そうすると不思議なことに1の行と0の行が現れる

ユニモジューラー規則とは?

$$\begin{array}{cc} & b \\ a & d \\ & c \end{array} \implies ad - bc = 1, \quad \text{つまり } c = \frac{ad - 1}{b}$$

このように上の2行にある3つの数字から4番目の数字が決まる。

# ユニモジューラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない。

- 1 第1行目には0を並べる
- 2 第2行目には半分ずらせて1を並べる
- 3 第3行目には種数列 (数字の列), たとえば  $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$  を周期的に並べる。
- 4 第4行目からさきはユニモジューラー規則で計算 (!! ) する
- 5 そうすると不思議なことに1の行と0の行が現れる

ユニモジューラー規則とは?

$$\begin{array}{cc} & b \\ a & d \\ & c \end{array} \implies ad - bc = 1, \quad \text{つまり } c = \frac{ad - 1}{b}$$

このように上の2行にある3つの数字から4番目の数字が決まる。

# ユニモジュラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない。

- 1 第1行目には0を並べる
- 2 第2行目には半分ずらして1を並べる
- 3 第3行目には種数列 (数字の列), たとえば [1, 2, 2, 3, 1, 2, 4] を周期的に並べる.
- 4 第4行目からさきはユニモジュラー規則で計算 (!!)
- 5 そうすると不思議なことに1の行と0の行が現れる

ユニモジュラー規則とは?

$$\begin{array}{cc} & b \\ a & d \\ & c \end{array} \implies ad - bc = 1, \quad \text{つまり } c = \frac{ad - 1}{b}$$

このように上の2行にある3つの数字から4番目の数字が決まる。

# ユニモジューラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない。

- 1 第1行目には0を並べる
- 2 第2行目には半分ずらして1を並べる
- 3 第3行目には種数列 (数字の列), たとえば [1, 2, 2, 3, 1, 2, 4] を周期的に並べる.
- 4 第4行目からさきはユニモジューラー規則で計算 (!! ) する
- 5 そうすると不思議なことに1の行と0の行が現れる

ユニモジューラー規則とは?

$$\begin{array}{cc} & b \\ a & d \\ & c \end{array} \implies ad - bc = 1, \quad \text{つまり } c = \frac{ad - 1}{b}$$

このように上の2行にある3つの数字から4番目の数字が決まる。

# ユニモジュラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない。

- 1 第1行目には0を並べる
- 2 第2行目には半分ずらして1を並べる
- 3 第3行目には種数列 (数字の列), たとえば [1, 2, 2, 3, 1, 2, 4] を周期的に並べる.
- 4 第4行目からさきはユニモジュラー規則で計算 (!! ) する
- 5 そうすると不思議なことに1の行と0の行が現れる

ユニモジュラー規則とは?

$$\begin{array}{cc} & b \\ a & d \\ & c \end{array} \implies ad - bc = 1, \quad \text{つまり } c = \frac{ad - 1}{b}$$

このように上の2行にある3つの数字から4番目の数字が決まる。



# ユニモジューラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない。

- 1 第1行目には0を並べる
- 2 第2行目には半分ずらして1を並べる
- 3 第3行目には種数列 (数字の列), たとえば [1, 2, 2, 3, 1, 2, 4] を周期的に並べる.
- 4 第4行目からさきはユニモジューラー規則で計算 (!! ) する
- 5 そうすると不思議なことに1の行と0の行が現れる

ユニモジューラー規則とは?

$$\begin{array}{cc} & b \\ a & d \\ & c \end{array} \implies ad - bc = 1, \quad \text{つまり } c = \frac{ad - 1}{b}$$

このように上の2行にある3つの数字から4番目の数字が決まる。

# ユニモジューラー規則とフリーズパターン

フリーズは単に周期的に数字を並べたものではない。

- 1 第1行目には0を並べる
- 2 第2行目には半分ずらして1を並べる
- 3 第3行目には種数列 (数字の列), たとえば [1, 2, 2, 3, 1, 2, 4] を周期的に並べる.
- 4 第4行目からさきはユニモジューラー規則で計算 (!!)
- 5 そうすると不思議なことに1の行と0の行が現れる

ユニモジューラー規則とは?

$$\begin{array}{c} b \\ a \quad d \\ c \end{array} \implies ad - bc = 1, \quad \text{つまり } c = \frac{ad - 1}{b}$$

このように上の2行にある3つの数字から4番目の数字が決まる。

# 試しにやってみよう

種数列は  $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$  でやってみる.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	2	2	3	1	2	4	1	2	2	3	1	2	4	1	2	2	3	1	2	4
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.



## 試しにやってみよう

種数列は  $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$  でやってみる.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	2	2	3	1	2	4	1	2	2	3	1	2	4	1	2	2	3	1	2	4
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

⇒

# 試しにやってみよう

種数列は  $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$  でやってみる.

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4
 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

```

⇒

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4
 1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2 1 7 3
 1 7 3 1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2
 2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

# 自由にフリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある.

- 種数列から始める (すでにやった)
- 対角線から始める. 上の例では  $[0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 0]$
- ジグザグ対角線から始める. (やってみよう. おもしろい. )
- 変数!! から始める

いつもうまく行くとは限らないが, 対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く.

1 の稲妻配置:

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

# 自由にフリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある.

- 種数列から始める (すでにやった)
- 対角線から始める. 上の例では  $[0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 0]$
- ジグザグ対角線から始める. (やってみよう. おもしろい. )
- 変数!! から始める

いつもうまく行くとは限らないが, 対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く.

1 の稲妻配置:

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

# 自由にフリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある.

- 種数列から始める (すでにやった)
- 対角線から始める. 上の例では  $[0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 0]$
- ジグザグ対角線から始める. (やってみよう. おもしろい. )
- 変数!! から始める

いつもうまく行くとは限らないが, 対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く.

1 の稲妻配置:

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```



# 自由にフリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある.

- 種数列から始める (すでにやった)
- 対角線から始める. 上の例では  $[0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 0]$
- ジグザグ対角線から始める. (やってみよう. おもしろい. )
- 変数!! から始める

いつもうまく行くとはい限らないが, 対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く.

1 の稲妻配置:

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

# 自由にフリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある.

- 種数列から始める (すでにやった)
- 対角線から始める. 上の例では  $[0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 0]$
- ジグザグ対角線から始める. (やってみよう. おもしろい. )
- 変数!! から始める

いつもうまく行くとはい限らないが, 対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く.

1 の稲妻配置:

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

# 自由にフリーズ!

フリーズの作り方はいくつかある.

- 種数列から始める (すでにやった)
- 対角線から始める. 上の例では  $[0, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 0]$
- ジグザグ対角線から始める. (やってみよう. おもしろい. )
- 変数!! から始める

いつもうまく行くとはい限らないが, 対角線に 1 を並べておけばいつもうまく行く.

## 1 の稲妻配置:

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2 1 5 2
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```



# 人生、いつもうまく行くとは限らない！

出鱈目な種数列を使うとももちろん(?) フリーズ模様にはならない。

出鱈目な種数列:  $[2, 3, 3, 1, 4, 5]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	1	4	5	2	3	3	1	4					
5	8	2	3	19	9	5	8	2	3						
13	5	5	14	34	22	13	5	5	14						
8	12	23	25	83	57	8	12	23							
19	55	41	61	215	35	19	55	41							
87	98	100	158	132	83	87	98	100							
155	239	259	97	313	380	155	239								
378	619	159	230	1433	677	378	619								
979	380	377	1053	2553	1651	979									
601	901	1726	1876	6226	4276	601									
1425	4125	3075	4575	16125	2625	1425									

## 人生、いつもうまく行くとは限らない II

規則的な種数列でもダメ.

出鱈目な (!! ) 規則的種数列:  $[1, 2, 3, 4, 5]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
1	5	11	19	4	1	5	11	19	4	1	5	11	19	4	1	5
2	18	52	15	3	2	18	52	15	3	2	18	52	15	3	2	18
7	85	41	11	5	7	85	41	11	5	7	85	41	11	5	7	85
33	67	30	18	17	33	67	30	18	17	33	67	30	18	17	33	67
26	49	49	61	80	26	49	49	61	80	26	49	49	61	80	26	49
19	80	166	287	63	19	80	166	287	63	19	80	166	287	63	19	80
31	271	781	226	46	31	271	781	226	46	31	271	781	226	46	31	271
105	1275	615	165	75	105	1275	615	165	75	105	1275	615	165	75	105	1275

対角線に並べる数列も出鱈目だとダメだ. もっともこの場合には周期的にはなるが, フリーズに現れる数が自然数ではない!!

## 人生、いつもうまく行くとは限らない III

自然数が現れるのが当たり前だと思っていたが、実はそうではなかった!!

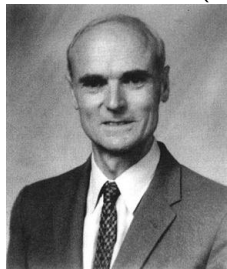
出鱈目な対角線:  $[0, 1, 2, 2, 4, 3, 1, 0]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	$3/2$	3	$5/4$	$5/3$	3	$31/24$	2				
2	$7/2$	$11/4$	$13/12$	4	$23/8$	$19/12$	2				
4	$23/8$	$19/12$	2	$7/2$	$11/4$	$13/12$					
	3	$31/24$	2	$3/2$	3	$5/4$	$5/3$				
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			0	0	0	0	0	0	0	0	0

# コンウェイとコクセター・写真と生年月日

フリーズに天才的な理解をもたらしたのがコクセターで、その証明にはコンウェイの天才が必要だった。

H.S.M. Coxeter (1907–2003)



John Conway (1937–2020)



[論文] :

コクセター [4] H. S. M. Coxeter, **Frieze patterns**, Acta Arith. **18** (1971), 297–310.

コンウェイ・コクセター [2], [3] J. H. Conway and H. S. M. Coxeter, **Triangulated polygons and frieze patterns**, Math. Gaz. **57** (1973), 87–94; 175–183.



# コンウェイ・コクセターの定理

## 定理 (Conway-Coxeter)

フリーズ・パターンが出来上がるための必要十分条件は  
種数列が多角形の三角形分割に付随した奇蹄列であることである。

$$\text{種数列} = \text{奇蹄列}$$

不思議なことに奇蹄列から始めると垂直方向にも周期的になる。では、

奇蹄列 = quiddity とは？

その前に... 三角形分割について説明しよう

# コンウェイ・コクセターの定理

## 定理 (Conway-Coxeter)

フリーズ・パターンが出来上がるための必要十分条件は  
種数列が多角形の三角形分割に付随した奇蹄列であることである。

$$\text{種数列} = \text{奇蹄列}$$

不思議なことに奇蹄列から始めると垂直方向にも周期的になる。では、

$$\text{奇蹄列} = \text{quiddity とは?}$$

その前に... 三角形分割について説明しよう

# コンウェイ・コクセターの定理

## 定理 (Conway-Coxeter)

フリーズ・パターンが出来上がるための必要十分条件は  
種数列が多角形の三角形分割に付随した奇蹄列であることである。

$$\text{種数列} = \text{奇蹄列}$$

不思議なことに奇蹄列から始めると垂直方向にも周期的になる。では、

$$\text{奇蹄列} = \text{quiddity とは?}$$

その前に... 三角形分割について説明しよう

# コンウェイ・コクセターの定理

## 定理 (Conway-Coxeter)

フリーズ・パターンが出来上がるための必要十分条件は  
種数列が多角形の三角形分割に付随した奇蹄列であることである。

$$\text{種数列} = \text{奇蹄列}$$

不思議なことに奇蹄列から始めると垂直方向にも周期的になる。では、

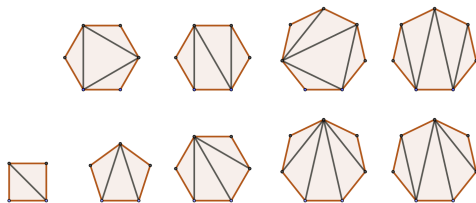
$$\text{奇蹄列} = \text{quiddity とは?}$$

その前に... 三角形分割について説明しよう

# 三角形分割

凸多角形の頂点同士を結んで、多角形を三角形に分割することを**三角形分割**という。例を見てみる。

Figure: 多角形の三角形分割



多角形の頂点ごとに、いくつかの三角形が集まっているかを数えて、それを並べたものを**奇跡列**と呼ぶ。

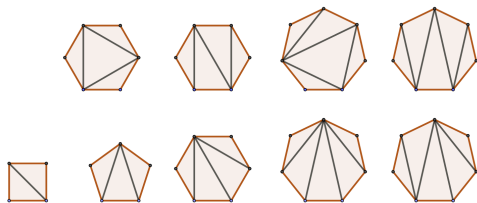
上の図の三角形分割に対する奇跡列: 上段左から

$[1, 3, 1, 3, 1, 3]$ ,  $[1, 3, 2, 1, 3, 2]$ ,  $[1, 2, 3, 1, 3, 1, 4]$ ,  $[1, 3, 3, 1, 2, 3, 2]$

# 三角形分割

凸多角形の頂点同士を結んで、多角形を三角形に分割することを**三角形分割**という。例を見てみる。

Figure: 多角形の三角形分割



多角形の頂点ごとに、いくつかの三角形が集まっているかを数えて、それを並べたものを**奇跡列**と呼ぶ。

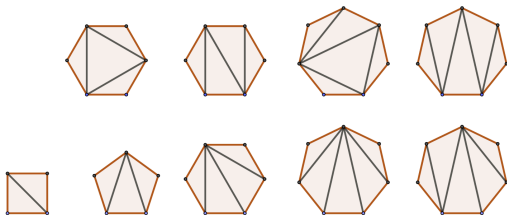
上の図の三角形分割に対する奇跡列: 上段左から

$[1, 3, 1, 3, 1, 3]$ ,  $[1, 3, 2, 1, 3, 2]$ ,  $[1, 2, 3, 1, 3, 1, 4]$ ,  $[1, 3, 3, 1, 2, 3, 2]$

凸  $n$  角形の三角形分割の性質

- 奇跡列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は  $n - 2$  個
- 奇跡列の総和は  $3(n - 2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数  $C_{n-2}$

Figure: 多角形の三角形分割



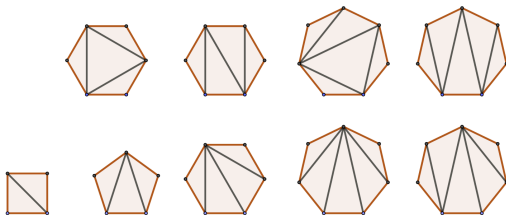
奇跡列: 上段左から

 $[1, 3, 1, 3, 1, 3], [1, 3, 2, 1, 3, 2], [1, 2, 3, 1, 3, 1, 4], [1, 3, 3, 1, 2, 3, 2]$

凸  $n$  角形の三角形分割の性質

- 奇跡列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は  $n - 2$  個
- 奇跡列の総和は  $3(n - 2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数  $C_{n-2}$

Figure: 多角形の三角形分割



奇跡列: 上段左から

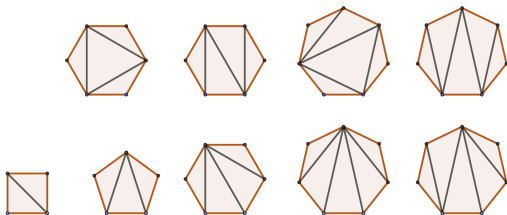
 $[1, 3, 1, 3, 1, 3], [1, 3, 2, 1, 3, 2], [1, 2, 3, 1, 3, 1, 4], [1, 3, 3, 1, 2, 3, 2]$



凸  $n$  角形の三角形分割の性質

- 奇跡列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は  $n - 2$  個
- 奇跡列の総和は  $3(n - 2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数  $C_{n-2}$

Figure: 多角形の三角形分割



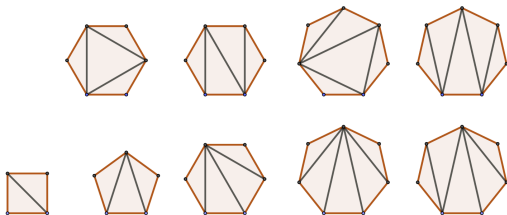
奇跡列: 上段左から

 $[1, 3, 1, 3, 1, 3], [1, 3, 2, 1, 3, 2], [1, 2, 3, 1, 3, 1, 4], [1, 3, 3, 1, 2, 3, 2]$

凸  $n$  角形の三角形分割の性質

- 奇跡列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は  $n - 2$  個
- 奇跡列の総和は  $3(n - 2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数  $C_{n-2}$

Figure: 多角形の三角形分割



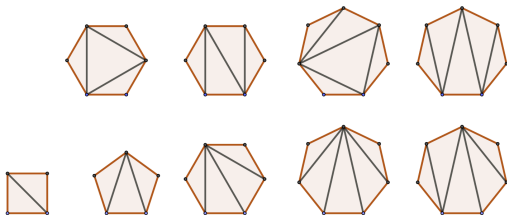
奇跡列: 上段左から

 $[1, 3, 1, 3, 1, 3], [1, 3, 2, 1, 3, 2], [1, 2, 3, 1, 3, 1, 4], [1, 3, 3, 1, 2, 3, 2]$

凸  $n$  角形の三角形分割の性質

- 奇跡列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は  $n - 2$  個
- 奇跡列の総和は  $3(n - 2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数  $C_{n-2}$

Figure: 多角形の三角形分割



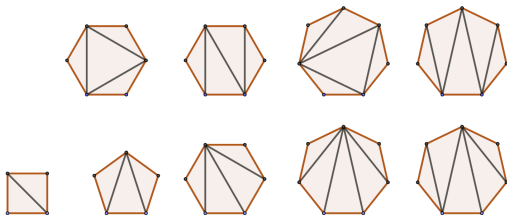
奇跡列: 上段左から

 $[1, 3, 1, 3, 1, 3], [1, 3, 2, 1, 3, 2], [1, 2, 3, 1, 3, 1, 4], [1, 3, 3, 1, 2, 3, 2]$

凸  $n$  角形の三角形分割の性質

- 奇跡列によって三角形分割はただ一つに決まる
- 三角形の個数は  $n - 2$  個
- 奇跡列の総和は  $3(n - 2)$
- 三角形分割の仕方の総数はカタラン数  $C_{n-2}$

Figure: 多角形の三角形分割



奇跡列: 上段左から

 $[1, 3, 1, 3, 1, 3], [1, 3, 2, 1, 3, 2], [1, 2, 3, 1, 3, 1, 4], [1, 3, 3, 1, 2, 3, 2]$

# カタラン数



Eugène Catalan (1814–1894)

$$\text{カタラン数 } C_n = \frac{1}{n+1} 2^n C_n = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}:$$

$$C_0 = C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132, \quad \dots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

■ トーナメントの組合せの総数

# カタラン数



Eugène Catalan (1814–1894)

$$\text{カタラン数 } C_n = \frac{1}{n+1} 2^n C_n = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}:$$

$$C_0 = C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132, \quad \dots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

■ トーナメントの組合せの総数

■  $n$  組の括弧の入れ子の仕方の総数

たとえば、 $n=3$  のときは、次の 5 通りある

$$((\)), ((\)), (())0, 0(), 000$$

# カタラン数



Eugène Catalan (1814–1894)

$$\text{カタラン数 } C_n = \frac{1}{n+1} 2^n C_n = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} :$$

$$C_0 = C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132, \quad \dots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

## 1 トーナメントの組合せの総数

## 2 $n$ 組の括弧の入れ子の仕方の総数

たとえば,  $n = 3$  のときは, 次の 5 通りある

$$\left( ( ( ) ) \right), \quad ( ( ) ) , \quad ( ( ) ) ( ) , \quad ( ) ( ( ) ) , \quad ( ) ( ) ( )$$

## 3 一辺が $n$ の正方形格子上の左下隅から右上隅の頂点に向かう経路で対角線より上の点 (対角線を含む) を通るものの総数

## 4 円周上の $2n$ 個の点を $n$ 本のたがいに交わらない弦で結ぶ方法の総数

## 5 源氏香の総数 (次ページの図参照)

# カタラン数



Eugène Catalan (1814–1894)

$$\text{カタラン数 } C_n = \frac{1}{n+1} 2^n C_n = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}:$$

$$C_0 = C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132, \quad \dots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

1 トーナメントの組合せの総数

2  $n$  組の括弧の入れ子の仕方の総数

たとえば,  $n = 3$  のときは, 次の 5 通りある

$$\left( ( ( ) ) \right), \quad ( ( ) ) , \quad ( ( ) ) ( ) , \quad ( ( ) ) ( ) , \quad ( ( ) ) ( ) ( )$$

3 一辺が  $n$  の正方形格子上の左下隅から右上隅の頂点に向かう経路で対角線より上の点 (対角線を含む) を通るものの総数

4 円周上の  $2n$  個の点を  $n$  本のたがいに交わらない弦で結ぶ方法の総数

5 源氏香の総数 (次ページの図参照)





# カタラン数

Eugène Catalan (1814–1894)

$$\text{カタラン数 } C_n = \frac{1}{n+1} 2^n C_n = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}:$$

$$C_0 = C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132, \quad \dots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

1 トーナメントの組合せの総数

2  $n$  組の括弧の入れ子の仕方の総数

たとえば,  $n = 3$  のときは, 次の 5 通りある

$$\left( ( ( ) ) \right), \quad ( ( ) ) , \quad ( ( ) ) ( ) , \quad ( ( ) ) ( ) , \quad ( ( ) ) ( ) ( )$$

3 一辺が  $n$  の正方形格子上の左下隅から右上隅の頂点に向かう経路で対角線より上の点 (対角線を含む) を通るものの総数

4 円周上の  $2n$  個の点を  $n$  本のたがいに交わらない弦で結ぶ方法の総数

5 源氏香の総数 (次ページの図参照)



# カタラン数

Eugène Catalan (1814–1894)

$$\text{カタラン数 } C_n = \frac{1}{n+1} 2^n C_n = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}:$$

$$C_0 = C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132, \quad \dots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

1 トーナメントの組合せの総数

2  $n$  組の括弧の入れ子の仕方の総数

たとえば,  $n = 3$  のときは, 次の 5 通りある

$$\left( ( ( ) ) \right), \quad ( ( ) ( ) ), \quad ( ( ) ) ( ), \quad ( ( ) ) ( ), \quad ( ( ) ) ( )$$

3 一辺が  $n$  の正方形格子上の左下隅から右上隅の頂点に向かう経路で対角線より上の点 (対角線を含む) を通るものの総数

4 円周上の  $2n$  個の点を  $n$  本のたがいに交わらない弦で結ぶ方法の総数

5 源氏香の総数 (次ページの図参照)

# カタラン数



Eugène Catalan (1814–1894)

$$\text{カタラン数 } C_n = \frac{1}{n+1} 2^n C_n = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}:$$

$$C_0 = C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132, \quad \dots$$

カタラン数はさまざまな組合せ論的解釈がある (Stanley の本 [8] には 214 通りの解釈が述べられている)

1 トーナメントの組合せの総数

2  $n$  組の括弧の入れ子の仕方の総数

たとえば,  $n = 3$  のときは, 次の 5 通りある

$$\left( ( ( ) ) \right), \quad ( ( ) ( ) ), \quad ( ( ) ) ( ), \quad ( ( ) ) ( ), \quad ( ( ) ) ( )$$

3 一辺が  $n$  の正方形格子上の左下隅から右上隅の頂点に向かう経路で対角線より上の点 (対角線を含む) を通るものの総数

4 円周上の  $2n$  個の点を  $n$  本のたがいに交わらない弦で結ぶ方法の総数

5 源氏香の総数 (次ページの図参照)

源氏香の総数（下図参照）（実は少し違う．源氏香の数は 52 で，源氏物語は 54 帖．さらにカタラン数は  $C_5 = 42$  である．何がどう異なっているのかは宿題とする．）

源氏香



かづらう かげまき にぶつみや よこふえ うねがえ かがひび たまかづら えあわむ すま もみじのが ほほきど  
蜻蛉 総角 匂宮 横笛 梅枝 篝火 玉鬘 絵合 須磨 紅葉賀 帚木



てならい さわらび こうけい すずむし ふしのうらば のわき ほつね まつかぜ あかし ほなのえん うつせみ  
手習 早蕨 紅梅 鈴虫 藤裏葉 野分 初音 松風 明石 花宴 空蟬

源氏香  
の見方



五の香  
四の香  
三の香  
二の香  
一の香

上方でつながっている一と四、三と五の香が同香（絵合）



やぐらぎ たけがわ やぐらぎ わがな あがき こがらふ つぎくも あらづかし あらい せうがら  
宿木 竹河 夕霧 若菜上 行幸 胡蝶 薄雲 滯標 葵 夕顔



あずまや はしひめ あひり わがな ふしほかま ほたる あさがお よもぎら さかき わかむらさき  
東屋 橋姫 御法 若菜下 藤袴 螢 朝顔 蓬生 賢木 若紫



うきふね しいがもと まほろし かしわざぎ まさほしら とこなつ あとめ せきや はなぢるさと すえつねはな  
浮舟 椎本 幻 柏木 真木柱 常夏 少女 関屋 花散里 未摘花

デジタル大辞泉より

# コンウェイ・コクセターのフリーズの性質

面白い性質がいくつもある!!! 発見してみよう。(すぐにわかるものから、なかなかわからないものまで.)

7角形:  $[1, 2, 2, 3, 1, 2, 4]$

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4
1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2 1 7 3
1 7 3 1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2 1 7 3 1 3 5 2
2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1 2 4 1 2 2 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

挑戦：見つけてみよう!!

- 特徴 1: フリーズの幅が  $m$  ( $0, 1$  の行は除く) なら種数列の周期は  $m + 3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性:  $0$  を頂点とする一辺の幅が  $m + 4$  の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素 (平行四辺形の辺で結ばれている 2 数)
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ (あとで詳しく説明する.)
- 特徴 5: 差分方程式:  $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!!  $\rightsquigarrow$  フリーズ多様体

- 特徴 1: **フリーズの幅**が  $m$  ( $0, 1$  の行は除く) なら**種数列の周期**は  $m + 3$
- 特徴 2: **滑り鏡映**に関する対称性:  $0$  を頂点とする一辺の幅が  $m + 4$  の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が**互いに素** (平行四辺形の辺で結ばれている 2 数)
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線は**ファレイ数列**の特徴を持つ (あとで詳しく説明する.)
- 特徴 5: 差分方程式:  $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!!  $\rightsquigarrow$  フリーズ多様体

- 特徴 1: フリーズの幅が  $m$  ( $0, 1$  の行は除く) なら種数列の周期は  $m + 3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性:  $0$  を頂点とする一辺の幅が  $m + 4$  の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素 (平行四辺形の辺で結ばれている 2 数)
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ (あとで詳しく説明する.)
- 特徴 5: 差分方程式:  $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!!  $\rightsquigarrow$  フリーズ多様体



- 特徴 1: フリーズの幅が  $m$  ( $0, 1$  の行は除く) なら種数列の周期は  $m + 3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性:  $0$  を頂点とする一辺の幅が  $m + 4$  の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素 (平行四辺形の辺で結ばれている 2 数)
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ (あとで詳しく説明する.)
- 特徴 5: 差分方程式:  $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!!  $\rightsquigarrow$  フリーズ多様体

- 特徴 1: フリーズの幅が  $m$  ( $0, 1$  の行は除く) なら種数列の周期は  $m + 3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性:  $0$  を頂点とする一辺の幅が  $m + 4$  の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素 (平行四辺形の辺で結ばれている 2 数)
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ (あとで詳しく説明する.)
- 特徴 5: 差分方程式:  $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!!  $\rightsquigarrow$  フリーズ多様体

- 特徴 1: フリーズの幅が  $m$  ( $0, 1$  の行は除く) なら種数列の周期は  $m + 3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性:  $0$  を頂点とする一辺の幅が  $m + 4$  の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素 (平行四辺形の辺で結ばれている 2 数)
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ (あとで詳しく説明する.)
- 特徴 5: 差分方程式:  $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!!  $\rightsquigarrow$  フリーズ多様体

- 特徴 1: フリーズの幅が  $m$  ( $0, 1$  の行は除く) なら種数列の周期は  $m + 3$
- 特徴 2: 滑り鏡映に関する対称性:  $0$  を頂点とする一辺の幅が  $m + 4$  の三角形が繰り返される
- 特徴 3: ユニモジュラー規則が適用される 4 組の数字が互いに素 (平行四辺形の辺で結ばれている 2 数)
- 特徴 4: 隣り合った二つの対角線はファレイ数列の特徴を持つ (あとで詳しく説明する.)
- 特徴 5: 差分方程式:  $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$
- 特徴 6: 3 次の行列式の値がゼロ
- 特徴 7: フリーズ方程式!!  $\rightsquigarrow$  フリーズ多様体

# 連分数とフリーズ I

種数列は奇蹄列（三角形分割）だった

~~~~> 対角線は奇蹄列で表せる!

# 連分数

次のような分数を連分数と呼ぶ。たとえば高木貞治の教科書 [9] 参照。

$$\begin{aligned}
 [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} \\
 &= a_0 + \frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \dots + \frac{1}{|a_n|}
 \end{aligned}$$

無限個続く極限まで許すと楽しい連分数がたくさん知られている

その例 (Wikipedia より)

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \dots}}}}}} = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{5 + \frac{3^2}{7 + \frac{4^2}{9 + \dots}}}}} = 3 + \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \frac{9^2}{6 + \dots}}}}}$$

$$\pi = 2 + \frac{2}{1 + \frac{1}{1/2 + \frac{1}{1/3 + \frac{1}{1/4 + \dots}}}}} = 2 + \frac{2}{1 + \frac{1 \cdot 2}{1 + \frac{2 \cdot 3}{1 + \frac{3 \cdot 4}{1 + \dots}}}}$$

$$\pi = 3 + \frac{1^3}{6 + \frac{1^3 + 2^3}{6 + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{6 + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3}{6 + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3}{6 + \dots}}}}}$$

# 連分因子

オイラーは連分因子 (continuant) を考えた。  
ここでは少しだけ形を変えたものを紹介する。

$$a_1 - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} - \dots - \frac{1}{a_n} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{a_{n-1} - \frac{1}{a_n}}}}$$

$$= \frac{K_n(a_1, a_2, \dots, a_n)}{K_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n)}$$

たとえば

$$a_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{K_1(a_1)}{K_0(\emptyset)}$$

$$a_1 - \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 - 1}{a_1} = \frac{K_2(a_1, a_2)}{K_1(a_1)}$$

$$a_1 - \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} = \frac{a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3}{a_2 a_3 - 1} = \frac{K_3(a_1, a_2, a_3)}{K_2(a_2, a_3)}$$

と計算できるから (実際にやってみて下さい, おもしろいよ)



$$K_1 = a_1, \quad K_2 = a_1 a_2 - 1$$

$$K_3 = a_3 K_2 - K_1 = a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3$$

$$K_4 = a_4 K_3 - K_2 = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 - a_1 a_4 - a_3 a_4 + 1$$

$$K_5 = a_5 K_4 - K_3 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$$

$$- a_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 a_5 - a_1 a_4 a_5 - a_3 a_4 a_5 + a_1 + a_3 + a_5$$

$K_5$  はそうとう複雑だが、パターンはあるようだ。  
よく式を見て欲しい。おわかりになっただろうか？

$$K_3 = 123 - \cancel{12\cancel{3}} - \cancel{1\cancel{2}3}$$

$$K_4 = 1234 - \cancel{12\cancel{3}4} - \cancel{12\cancel{3}4} - \cancel{1\cancel{2}34} + \cancel{1\cancel{2}34}$$

$$K_5 = 12345 - \cancel{1234\cancel{5}} - \cancel{1234\cancel{5}} - \cancel{12\cancel{3}45} - \cancel{12\cancel{3}45} - \cancel{1\cancel{2}345} \\ + \cancel{1\cancel{2}345} + \cancel{1\cancel{2}345} + \cancel{1\cancel{2}345}$$

そう、 $K_n$  は  $a_1 a_2 \cdots a_n$  から連続する  $a_i a_{i+1}$  を可能な限り取り除くこと  
によって得られる。そのときに取り除くペアの個数によって符号をつける  
ことを忘れないようにする。

# 連分因子とフリーズ I

種数列  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  によって構成されたフリーズの第 1 対角線を次のように書いておく.

$$f_{-1} = 0, f_0 = 1, f_1 = a_1, f_2, f_3, \dots$$

## 定理 (Coxeter)

種数列を  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  とするとき, オイラーの連分因子  $K_s(a_1, a_2, \dots, a_s)$  を用いてフリーズの対角線が与えられる.

$$f_s = K_s(a_1, a_2, \dots, a_s)$$

ただし  $s$  は周期  $n$  で考え,  $a_{n+1} = a_1$  などと解釈する.

もちろん第 2 対角線  $g_1 = a_2, g_2, g_3, \dots$  は

$$g_s = K_s(a_2, a_3, \dots, a_s)$$

なので,

## 連分因子とフリーズ II

$$\frac{f_s}{g_{s-1}} = \frac{K_s(a_1, a_2, \dots, a_s)}{K_{s-1}(a_2, a_3, \dots, a_s)} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{a_{s-1} - \frac{1}{a_s}}}}$$

である!! 確認してみよう.

六角形: [2, 2, 1, 4, 1, 2]

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 2 2 1 4 1 2 2 2 1 4 1 2 2 2 1 4
   3 1 3 3 1 3 3 1 3 3 1 3 3 1 3 3
    1 2 2 2 1 4 1 2 2 2 1 4 1 2 2 2
     1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

## 連分因子とフリーズ III



Leonhard Euler (1707–1783)

# ファレイの迷宮へようこそ

ファレイ生年月日: John Farey Sr. (1766 – 1826)

建築家ファレイの考えた数列を紹介する. 1 次から 11 次までのファレイ数列:

$$\mathfrak{F}_1 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\mathfrak{F}_2 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\mathfrak{F}_3 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\mathfrak{F}_4 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\mathfrak{F}_5 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\mathfrak{F}_6 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\mathfrak{F}_7 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{3}{2}, \frac{5}{7}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\mathfrak{F}_8 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{3}{2}, \frac{5}{8}, \frac{4}{3}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\mathfrak{F}_9 = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{1}{5}, \frac{3}{9}, \frac{2}{4}, \frac{4}{9}, \frac{3}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{3}, \frac{6}{9}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\mathfrak{F}_{10} = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{2}{10}, \frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{3}{4}, \frac{5}{10}, \frac{4}{3}, \frac{6}{10}, \frac{5}{7}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{1}{1} \right)$$

$$\mathfrak{F}_{11} = \left( \frac{0}{1}, \frac{1}{11}, \frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{2}{11}, \frac{1}{7}, \frac{3}{11}, \frac{2}{6}, \frac{4}{11}, \frac{3}{5}, \frac{5}{11}, \frac{4}{4}, \frac{6}{11}, \frac{5}{7}, \frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11}, \frac{1}{1} \right)$$

え？ なんの不思議もないつまらない数列だって？ いやいや、そうじゃないんですよ。

# ファレイ数列

## 定義

分母が  $N$  以下の有理数 (分数) で  $0$  以上  $1$  以下のものをすべて小さい順に並べた数列を  $N$  次のファレイ数列と呼び  $\mathfrak{F}_N$  で表す.

ただし  $0 = \frac{0}{1}$ ,  $1 = \frac{1}{1}$  と記す. また分数は既約なものを取る.

有理数  $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}$  を<sup>1</sup> 既約分数で表して

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, v_2 = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{と書いたとき} \quad d(v_1, v_2) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

を  $v_1$  と  $v_2$  のファレイ距離と呼ぶ.

以下, 紛れがない場合にはファレイ距離を単に距離と呼ぶ

また,  $v = \frac{a}{b}$  と書いたとき我々は常に  $b \geq 0$  と考えることにしよう.

# ファレイ数列

## 定義

分母が  $N$  以下の有理数 (分数) で  $0$  以上  $1$  以下のものをすべて小さい順に並べた数列を  $N$  次のファレイ数列と呼び  $\mathfrak{F}_N$  で表す.

ただし  $0 = \frac{0}{1}$ ,  $1 = \frac{1}{1}$  と記す. また分数は既約なものを取る.

有理数  $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}$  を<sup>1</sup> 既約分数で表して

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, v_2 = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{と書いたとき} \quad d(v_1, v_2) = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

を  $v_1$  と  $v_2$  のファレイ距離と呼ぶ.

以下, 紛れがない場合にはファレイ距離を単に距離と呼ぶ

また,  $v = \frac{a}{b}$  と書いたとき我々は常に  $b \geq 0$  と考えることにしよう.

<sup>1</sup>  $\mathbb{Q}$  は有理数全体を表す記号である. つまるところ  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$



# ファレイグラフ

数直線上に2つの有理数  $u, v$  をとる

- $(u, v)$  が**辺**のときに  $u$  と  $v$  を実軸上に直径を持つ**半円**で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る. 中心は  $u, v$  の中点  $(u + v)/2$  である.
- $xy$  平面において  $x$  軸を実軸とみなすのならば, 半円 (辺) は  $y \geq 0$  の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが, **二つの辺は決して交わることがない.**

さて, このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものを**ファレイグラフ**と呼ぶ. ファレイグラフの例を  $N = 1, 2, 3, \dots, 10$  まで挙げておこう.

# ファレイグラフ

数直線上に2つの有理数  $u, v$  をとる

- $(u, v)$  が**辺**のときに  $u$  と  $v$  を実軸上に直径を持つ**半円**で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る. 中心は  $u, v$  の中点  $(u + v)/2$  である.
- $xy$  平面において  $x$  軸を実軸とみなすのならば, 半円 (辺) は  $y \geq 0$  の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが, **二つの辺は決して交わることがない.**

さて, このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものを**ファレイグラフ**と呼ぶ. ファレイグラフの例を  $N = 1, 2, 3, \dots, 10$  まで挙げておこう.

# ファレイグラフ

数直線上に2つの有理数  $u, v$  をとる

- $(u, v)$  が**辺**のときに  $u$  と  $v$  を実軸上に直径を持つ**半円**で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る. 中心は  $u, v$  の中点  $(u + v)/2$  である.
- $xy$  平面において  $x$  軸を実軸とみなすのならば, 半円 (辺) は  $y \geq 0$  の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが, **二つの辺は決して交わることがない.**

さて, このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものを**ファレイグラフ**と呼ぶ. ファレイグラフの例を  $N = 1, 2, 3, \dots, 10$  まで挙げておこう.

# ファレイグラフ

数直線上に2つの有理数  $u, v$  をとる

- $(u, v)$  が**辺**のときに  $u$  と  $v$  を実軸上に直径を持つ**半円**で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る. 中心は  $u, v$  の中点  $(u + v)/2$  である.
- $xy$  平面において  $x$  軸を実軸とみなすのならば, 半円 (辺) は  $y \geq 0$  の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが, **二つの辺は決して交わることがない.**

さて, このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものを**ファレイグラフ**と呼ぶ. ファレイグラフの例を  $N = 1, 2, 3, \dots, 10$  まで挙げておこう.

# ファレイグラフ

数直線上に2つの有理数  $u, v$  をとる

- $(u, v)$  が**辺**のときに  $u$  と  $v$  を実軸上に直径を持つ**半円**で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る. 中心は  $u, v$  の中点  $(u + v)/2$  である.
- $xy$  平面において  $x$  軸を実軸とみなすのならば, 半円 (辺) は  $y \geq 0$  の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが, **二つの辺は決して交わることがない.**

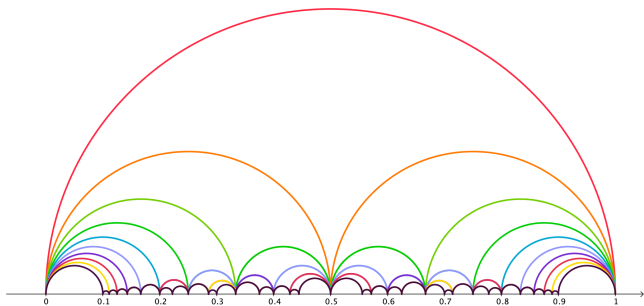
さて, このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものを**ファレイグラフ**と呼ぶ. ファレイグラフの例を  $N = 1, 2, 3, \dots, 10$  まで挙げておこう.

# ファレイグラフ

数直線上に2つの有理数  $u, v$  をとる

- $(u, v)$  が**辺**のときに  $u$  と  $v$  を実軸上に直径を持つ**半円**で結ぶ.
- 半円は実軸より上の半平面上に取る. 中心は  $u, v$  の中点  $(u + v)/2$  である.
- $xy$  平面において  $x$  軸を実軸とみなすのならば, 半円 (辺) は  $y \geq 0$  の上半平面上に描くことになる.
- 辺 (半円) 同士が交わってしまいそうに思うが, **二つの辺は決して交わることがない.**

さて, このようにして定まる辺をファレイ数列に描き加えたものを**ファレイグラフ**と呼ぶ. ファレイグラフの例を  $N = 1, 2, 3, \dots, 10$  まで挙げておこう.



以下，ファレイ数列とファレイグラフを区別しないでどちらも  $\mathfrak{F}_N$  で表すことにする。

# ファレイ数列 (ファレイグラフ) $\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った2つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- $N$  を増やしたとき,  $\mathfrak{F}_N$  の隣接する2点  $v_1, v_2$  の間に付け加わる分数  $v_3$  は

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

の形をしている。また, この3点はファレイ三角形をなす。

- ファレイ多角形  $\mathfrak{F}_N$  はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ



# ファレイ数列 (ファレイグラフ) $\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った2つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- $N$  を増やしたとき,  $\mathfrak{F}_N$  の隣接する2点  $v_1, v_2$  の間に付け加わる分数  $v_3$  は

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

の形をしている。また, この3点はファレイ三角形をなす。

- ファレイ多角形  $\mathfrak{F}_N$  はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ

# ファレイ数列（ファレイグラフ） $\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った2つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- $N$ を増やしたとき、 $\mathfrak{F}_N$ の隣接する2点 $v_1, v_2$ の間に付け加わる分数 $v_3$ は

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

の形をしている。また、この3点はファレイ三角形をなす。

- ファレイ多角形 $\mathfrak{F}_N$ はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ

# ファレイ数列 (ファレイグラフ) $\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った2つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- $N$  を増やしたとき,  $\mathfrak{F}_N$  の隣接する2点  $v_1, v_2$  の間に付け加わる分数  $v_3$  は

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

の形をしている。また, この3点はファレイ三角形をなす。

- ファレイ多角形  $\mathfrak{F}_N$  はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ

# ファレイ数列（ファレイグラフ） $\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った2つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- $N$ を増やしたとき、 $\mathfrak{F}_N$ の隣接する2点 $v_1, v_2$ の間に付け加わる分数 $v_3$ は

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

の形をしている。また、この3点はファレイ三角形をなす。

- ファレイ多角形 $\mathfrak{F}_N$ はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ

# ファレイ数列 (ファレイグラフ) $\mathfrak{F}_N$ の性質

- ファレイ数列の中で大小関係で隣り合った2つの点は辺で結ばれている
- 全体が大きな多角形になっている
- $N$  を増やしたとき,  $\mathfrak{F}_N$  の隣接する2点  $v_1, v_2$  の間に付け加わる分数  $v_3$  は

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1}, \quad v_3 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \quad v_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

の形をしている。また, この3点はファレイ三角形をなす。

- ファレイ多角形  $\mathfrak{F}_N$  はファレイ三角形によって三角形分割されている

イヤハヤ

# フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる

フリーズの第1対角線を  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , 第2対角線を  $g_1, g_2, g_3, \dots$  と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる。ナント!!!

これはファレイ三角形の並びと同じである。

## 定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第1対角線と第2対角線を上のよう  
書いておき,  $v_s = g_{s-1}/f_s$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  とおく。

- 奇蹄列が1で終わっているときは  $\{v_0 = 0, v_2, \dots, v_{n-2} = 1\}$  は区間  $[0, 1]$  に含まれる。
- これと  $\infty = \frac{1}{0}$  を合わせるとファレイ  $n$  角形になり, そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する。

例で確かめてみよう。

# フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる

フリーズの第1対角線を  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , 第2対角線を  $g_1, g_2, g_3, \dots$  と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる。 **ナント!!!**

これはファレイ三角形の並びと同じである。

## 定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第1対角線と第2対角線を上のよう  
書いておき,  $v_s = g_{s-1}/f_s$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  とおく。

- 奇蹄列が1で終わっているときは  $\{v_0 = 0, v_2, \dots, v_{n-2} = 1\}$  は区間  $[0, 1]$  に含まれる。
- これと  $\infty = \frac{1}{0}$  を合わせるとファレイ  $n$  角形になり, そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する。

例で確かめてみよう。

# フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる

フリーズの第1対角線を  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , 第2対角線を  $g_1, g_2, g_3, \dots$  と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる。 **ナント!!!**

これはファレイ三角形の並びと同じである。

## 定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第1対角線と第2対角線を上のよう  
書いておき,  $v_s = g_{s-1}/f_s$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  とおく。

- 奇蹄列が1で終わっているときは  $\{v_0 = 0, v_2, \dots, v_{n-2} = 1\}$  は区間  $[0, 1]$  に含まれる。
- これと  $\infty = \frac{1}{0}$  を合わせるとファレイ  $n$  角形になり, そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する。

例で確かめてみよう。



# フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる

フリーズの第1対角線を  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , 第2対角線を  $g_1, g_2, g_3, \dots$  と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる。 **ナント!!!**

これはファレイ三角形の並びと同じである。

## 定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第1対角線と第2対角線を上のよう  
書いておき,  $v_s = g_{s-1}/f_s$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  とおく。

奇蹄列が1で、 $v_s = 0$  (すなわち  $v_{s+1} = 0$ ) のときは  $v_{s+1} = 0$  (すなわち  $v_{s+2} = 1$ ) は区間  $[0, 1]$  に含まれる。

これと  $v_s = \frac{1}{2}$  を合わせるとファレイ三角形になり、そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する。

例で確かめてみよう。

# フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる

フリーズの第1対角線を  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , 第2対角線を  $g_1, g_2, g_3, \dots$  と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる。 **ナント!!!**

これはファレイ三角形の並びと同じである。

## 定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第1対角線と第2対角線を上のよう  
書いておき,  $v_s = g_{s-1}/f_s$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  とおく。

- 1 奇蹄列が1で終わっているときは  $\{v_0 = 0, v_2, \dots, v_{n-2} = 1\}$  は区間  $[0, 1]$  に含まれる。
- 2 これと  $\infty = \frac{1}{0}$  を合わせるとファレイ  $n$  角形になり, そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する。

例で確かめてみよう。

# フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる

フリーズの第1対角線を  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , 第2対角線を  $g_1, g_2, g_3, \dots$  と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる。 **ナント!!!**

これはファレイ三角形の並びと同じである。

## 定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第1対角線と第2対角線を上のよう  
書いておき,  $v_s = g_{s-1}/f_s$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  とおく。

- 1 奇蹄列が1で終わっているときは  $\{v_0 = 0, v_2, \dots, v_{n-2} = 1\}$  は区間  $[0, 1]$  に含まれる。
- 2 これと  $\infty = \frac{1}{0}$  を合わせるとファレイ  $n$  角形になり, そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する。

例で確かめてみよう。

# フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる

フリーズの第1対角線を  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , 第2対角線を  $g_1, g_2, g_3, \dots$  と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる。 **ナント!!!**

これはファレイ三角形の並びと同じである。

## 定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第1対角線と第2対角線を上のよう  
書いておき,  $v_s = g_{s-1}/f_s$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  とおく。

- 1 奇蹄列が1で終わっているときは  $\{v_0 = 0, v_2, \dots, v_{n-2} = 1\}$  は区間  $[0, 1]$  に含まれる。
- 2 これと  $\infty = \frac{1}{0}$  を合わせるとファレイ  $n$  角形になり, そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する。

例で確かめてみよう。

# フリーズとファレイ多角形

フリーズとファレイ多角形は切っても切れない関係になっいる

フリーズの第1対角線を  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , 第2対角線を  $g_1, g_2, g_3, \dots$  と書いておくと

$$\frac{g_{s-1}}{f_s}, \quad \frac{g_s}{f_{s+1}} = \frac{g_{s-1} + g_{s+1}}{f_s + f_{s+2}}, \quad \frac{g_{s+1}}{f_{s+2}}$$

と並んでいる。 **ナント!!!**

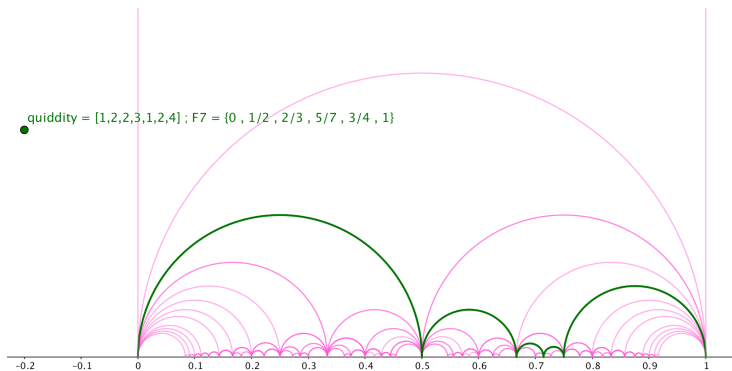
これはファレイ三角形の並びと同じである。

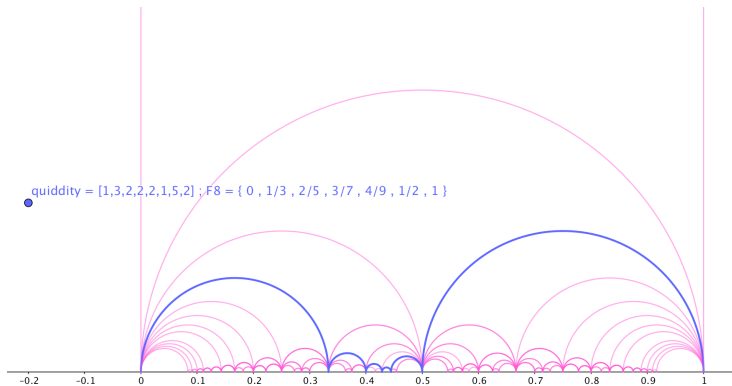
## 定理 (Coxeter)

奇蹄列を種数列とするフリーズの第1対角線と第2対角線を上のよう  
書いておき,  $v_s = g_{s-1}/f_s$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  とおく。

- 1 奇蹄列が1で終わっているときは  $\{v_0 = 0, v_2, \dots, v_{n-2} = 1\}$  は区間  $[0, 1]$  に含まれる。
- 2 これと  $\infty = \frac{1}{0}$  を合わせるとファレイ  $n$  角形になり, そのファレイ三角形分割の奇蹄列は種数列と一致する。

例で確かめてみよう。





# ファレイ多角形からフリーズへ

ファレイ多角形を用いてフリーズの各成分を与えることもできる

- フリーズの第  $i$  行目, 第  $j$  番目の対角線にある数字を  $c_{i,j}$  と書く
- ファレイ多角形の頂点を  $v_s = g_{s-1}/f_s$  とする
- ファレイ距離  $d(a/b, c/d) = |ad - bc|$  を用いると  $c_{i,j}$  は

$$c_{i,j} = d(v_{j-2}, v_{i+j-1}) = |g_{i+j-2}f_{j-2} - g_{j-3}f_{i+j-1}|$$

ホントにそうになっているだろうか??? 8角形:  $[1, 2, 3, 2, 2, 1, 4, 3]$

|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |     |    |    |     |    |
|---|---|---|---|---|----|---|---|----|----|----|----|----|-----|----|----|-----|----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0  | 0   | 0  |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1  | 1  | 1   | 1  |
|   | 1 | 2 | 3 | 2 | 2  | 1 | 4 | 3  | 1  | 2  | 3  | 2  | 2   | 1  | 4  | 3   |    |
|   |   | 1 | 5 | 5 | 3  | 1 | 3 | 11 | 2  | 1  | 5  | 5  | 3   | 1  | 3  | 11  | 2  |
|   |   |   | 2 | 8 | 7  | 1 | 2 | 8  | 7  | 1  | 2  | 8  | 7   | 1  | 2  | 8   | 7  |
|   |   |   |   | 3 | 11 | 2 | 1 | 5  | 5  | 3  | 1  | 3  | 11  | 2  | 1  | 5   | 5  |
|   |   |   |   |   | 4  | 3 | 1 | 2  | 3  | 2  | 2  | 1  | 4   | 3  | 1  | 2   | 3  |
|   |   |   |   |   |    | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1  | 1  | 1   | 1  |
|   |   |   |   |   |    |   | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0  | 0   | 0  |
|   |   |   |   |   |    |   |   | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1  | -1 | -1 | -1  | -1 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    | -1 | -2 | -3 | -2 | -2  | -1 | -4 | -3  |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    | -1 | -5 | -5 | -3  | -1 | -3 | -11 | -2 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    | -2 | -8 | -7  | -1 | -2 | -8  | -7 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    | -3 | -11 | -2 | -1 | -5  | -3 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    | -4  | -3 | -1 | -2  | -1 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |     | -1 | -1 | -1  | -1 |





# ファレイ多角形からフリーズへ

ファレイ多角形を用いてフリーズの各成分を与えることもできる

- フリーズの第  $i$  行目, 第  $j$  番目の対角線にある数字を  $c_{i,j}$  と書く
- ファレイ多角形の頂点を  $v_s = g_{s-1}/f_s$  とする
- ファレイ距離  $d(a/b, c/d) = |ad - bc|$  を用いると  $c_{i,j}$  は

$$c_{i,j} = d(v_{j-2}, v_{i+j-1}) = |g_{i+j-2}f_{j-2} - g_{j-3}f_{i+j-1}|$$

ホントにそうになっているだろうか??? 8角形: [1,2,3,2,2,1,4,3]

|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |     |    |    |     |    |    |    |    |     |    |    |     |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|----|---|---|----|----|----|----|----|-----|----|----|-----|----|----|----|----|-----|----|----|-----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0  | 0   | 0  | 0  | 0  |    |     |    |    |     |    |    |    |    |    |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1  | 1  | 1   | 1  | 1  | 1  |    |     |    |    |     |    |    |    |    |    |
|   | 1 | 2 | 3 | 2 | 2  | 1 | 4 | 3  | 1  | 2  | 3  | 2  | 2   | 1  | 4  | 3   |    |    |    |    |     |    |    |     |    |    |    |    |    |
|   |   | 1 | 5 | 5 | 3  | 1 | 3 | 11 | 2  | 1  | 5  | 5  | 3   | 1  | 3  | 11  | 2  |    |    |    |     |    |    |     |    |    |    |    |    |
|   |   |   | 2 | 8 | 7  | 1 | 2 | 8  | 7  | 1  | 2  | 8  | 7   | 1  | 2  | 8   | 7  | 1  |    |    |     |    |    |     |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   | 3 | 11 | 2 | 1 | 5  | 5  | 3  | 1  | 3  | 11  | 2  | 1  | 5   | 5  | 3  | 1  |    |     |    |    |     |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   | 4  | 3 | 1 | 2  | 3  | 2  | 2  | 1  | 4   | 3  | 1  | 2   | 3  | 2  | 2  | 1  |     |    |    |     |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1  | 1  | 1   | 1  | 1  | 1  | 1  |     |    |    |     |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0  | 0   | 0  | 0  | 0  | 0  |     |    |    |     |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1  | -1 | -1 | -1  | -1 | -1 | -1 | -1 |     |    |    |     |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    | -1 | -2 | -3 | -2 | -2  | -1 | -4 | -3  | -1 | -2 | -3 | -2 | -2  | -1 | -4 | -3  |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    | -1 | -5 | -5 | -3  | -1 | -3 | -11 | -2 | -1 | -5 | -5 | -3  | -1 | -3 | -11 | -2 |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    | -2 | -8 | -7  | -1 | -2 | -8  | -7 | -1 | -2 | -8 | -7  | -1 | -2 | -8  | -7 | -1 |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    | -3 | -11 | -2 | -1 | -5  | -5 | -3 | -1 | -3 | -11 | -2 | -1 | -5  | -5 | -3 | -1 |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    | -4  | -3 | -1 | -2  | -2 | -1 | -4 | -3 | -1  | -2 | -2 | -1  | -4 | -3 | -1 | -2 | -1 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |     | -1 | -1 | -1  | -1 | -1 | -1 | -1 | -1  | -1 | -1 | -1  | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

# ファレイ多角形からフリーズへ

ファレイ多角形を用いてフリーズの各成分を与えることもできる

- フリーズの第  $i$  行目, 第  $j$  番目の対角線にある数字を  $c_{i,j}$  と書く
- ファレイ多角形の頂点を  $v_s = g_{s-1}/f_s$  とする
- ファレイ距離  $d(a/b, c/d) = |ad - bc|$  を用いると  $c_{i,j}$  は

$$c_{i,j} = d(v_{j-2}, v_{i+j-1}) = |g_{i+j-2}f_{j-2} - g_{j-3}f_{i+j-1}|$$

ホントにそうになっているだろうか??? 8角形:  $[1, 2, 3, 2, 2, 1, 4, 3]$

|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 0  | 0  |    |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  |    |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |
|   | 1 | 2 | 3 | 2 | 2  | 1 | 4 | 3  | 1  | 2  | 3  | 2  | 2  | 1  | 4  | 3   |     |    |    |    |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |
|   |   | 1 | 5 | 5 | 3  | 1 | 3 | 11 | 2  | 1  | 5  | 5  | 3  | 1  | 3  | 11  | 2   |    |    |    |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |
|   |   |   | 2 | 8 | 7  | 1 | 2 | 8  | 7  | 1  | 2  | 8  | 7  | 1  | 2  | 8   | 7   | 1  |    |    |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   | 3 | 11 | 2 | 1 | 5  | 5  | 3  | 1  | 3  | 11 | 2  | 1  | 5   | 5   | 3  | 1  |    |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   | 4  | 3 | 1 | 2  | 3  | 2  | 2  | 1  | 4  | 3  | 1  | 2   | 3   | 2  | 2  | 1  |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1   | 1  | 1  | 1  |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0   | 0  | 0  | 0  |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1  | -1  | -1 | -1 | -1 |    |    |    |     |     |    |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    | -1 | -2 | -3 | -2 | -2 | -1 | -4 | -3  | -1  | -2 | -3 | -2 | -2 | -1 | -4 | -3  |     |    |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    | -1 | -5 | -5 | -3 | -1 | -3  | -11 | -2 | -1 | -5 | -5 | -3 | -1 | -3  | -11 | -2 |    |    |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    | -2 | -8 | -7 | -1  | -2  | -8 | -7 | -1 | -2 | -8 | -7 | -1  | -2  | -8 | -7 | -1 |    |    |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    | -3 | -11 | -2  | -1 | -5 | -5 | -3 | -1 | -3 | -11 | -2  | -1 | -5 | -5 | -3 | -1 |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |     | -4  | -3 | -1 | -2 | -2 | -1 | -4 | -3  | -1  | -2 | -2 | -1 | -4 | -3 | -1 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |    | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1  | -1  | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |

# ファレイ多角形からフリーズへ

ファレイ多角形を用いてフリーズの各成分を与えることもできる

- フリーズの第  $i$  行目, 第  $j$  番目の対角線にある数字を  $c_{i,j}$  と書く
- ファレイ多角形の頂点を  $v_s = g_{s-1}/f_s$  とする
- ファレイ距離  $d(a/b, c/d) = |ad - bc|$  を用いると  $c_{i,j}$  は

$$c_{i,j} = d(v_{j-2}, v_{i+j-1}) = |g_{i+j-2}f_{j-2} - g_{j-3}f_{i+j-1}|$$

ホントにそうになっているだろうか??? 8角形: [1,2,3,2,2,1,4,3]

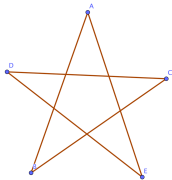
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |     |    |    |     |    |
|---|---|---|---|---|----|---|---|----|----|----|----|----|-----|----|----|-----|----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0  | 0   | 0  |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1  | 1  | 1   | 1  |
|   | 1 | 2 | 3 | 2 | 2  | 1 | 4 | 3  | 1  | 2  | 3  | 2  | 2   | 1  | 4  | 3   |    |
|   |   | 1 | 5 | 5 | 3  | 1 | 3 | 11 | 2  | 1  | 5  | 5  | 3   | 1  | 3  | 11  | 2  |
|   |   |   | 2 | 8 | 7  | 1 | 2 | 8  | 7  | 1  | 2  | 8  | 7   | 1  | 2  | 8   | 7  |
|   |   |   |   | 3 | 11 | 2 | 1 | 5  | 5  | 3  | 1  | 3  | 11  | 2  | 1  | 5   | 5  |
|   |   |   |   |   | 4  | 3 | 1 | 2  | 3  | 2  | 2  | 1  | 4   | 3  | 1  | 2   | 3  |
|   |   |   |   |   |    | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1   | 1  | 1  | 1   | 1  |
|   |   |   |   |   |    |   | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0   | 0  | 0  | 0   | 0  |
|   |   |   |   |   |    |   |   | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1  | -1 | -1 | -1  | -1 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    | -1 | -2 | -3 | -2 | -2  | -1 | -4 | -3  |    |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    | -1 | -5 | -5 | -3  | -1 | -3 | -11 | -2 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    | -2 | -8 | -7  | -1 | -2 | -8  | -7 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    | -3 | -11 | -2 | -1 | -5  | -3 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    | -4  | -3 | -1 | -2  | -1 |
|   |   |   |   |   |    |   |   |    |    |    |    |    |     | -1 | -1 | -1  | -1 |

# ガウスの奇蹟の五芒星 I

最後にコクセターがフリーズを研究するきっかけとなったガウスの五芒星の話をして [5, p.484].

# 球面五芒星

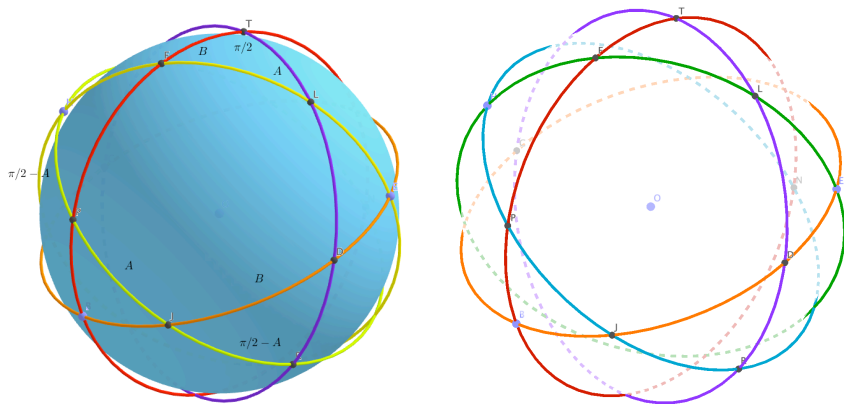
ガウスは単位球面上の五芒星（ペンタグラム）で星の各尖点が直角のものを研究していた。五芒星の中には五角形が現れる。



平面五芒星：

もちろん平面上では五つの星の尖点がすべて直角であることなどあり得ないが単位球面ではそれが可能である。

## 単位球面上の五芒星:



ちなみに単位球面の2点を結ぶ線分はその2点を結ぶ最短距離の曲線で、**大円**の一部である。(大円とは球の中心を通る平面と球面の共通部分になっているような円を指す.)

球面幾何学は大変おもしろいのでぜひ研究してみたいが、今はその暇はない。



# 五芒星とフリーズ

結果だけ記すと、ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形（図では  $\triangle TFL$ ）で決まること、
- その3角形は直角以外の2角の大きさ  $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$  で決まることを発見し、
- 内部の五角形の辺の長さを  $c, d, e$  と決めた。

他の3辺の長さを  $c, d, e$  と記すと実はこの5つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

```

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 a b c d e a b c d e a b c d e
   d e a b c d e a b c d e a b c
     1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

```

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \quad 1 + b = de, \quad 1 + c = ea, \quad 1 + d = ab, \quad 1 + e = bc$$

が成り立っている。

# 五芒星とフリーズ

結果だけ記すと、ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形 (図では  $\triangle TFL$ ) で決まること,
- その3角形は直角以外の2角の大きさ  $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$  で決まることを発見し,
- 内部の五角形の辺の長さを  $a, b$  で表した.

他の3辺の長さを  $c, d, e$  と記すと実はこの5つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

```

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 a b c d e a b c d e a b c d e
 d e a b c d e a b c d e a b c
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

```

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \quad 1 + b = de, \quad 1 + c = ea, \quad 1 + d = ab, \quad 1 + e = bc$$

が成り立っている。

# 五芒星とフリーズ

結果だけ記すと、ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形（図では  $\triangle TFL$ ）で決まること、
- その3角形は直角以外の2角の大きさ  $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$  で決まることを発見し、
- 内部の五角形の辺の長さを  $a, b$  で表した。

他の3辺の長さを  $c, d, e$  と記すと実はこの5つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

```

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 a b c d e a b c d e a b c d e
  d e a b c d e a b c d e a b c
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

```

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \quad 1 + b = de, \quad 1 + c = ea, \quad 1 + d = ab, \quad 1 + e = bc$$

が成り立っている。

# 五芒星とフリーズ

結果だけ記すと、ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形（図では  $\triangle TFL$ ）で決まること、
- その3角形は直角以外の2角の大きさ  $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$  で決まることを発見し、
- 内部の五角形の辺の長さを  $a, b$  で表した。

他の3辺の長さを  $c, d, e$  と記すと実はこの5つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

```

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 a b c d e a b c d e a b c d e
 d e a b c d e a b c d e a b c
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

```

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \quad 1 + b = de, \quad 1 + c = ea, \quad 1 + d = ab, \quad 1 + e = bc$$

が成り立っている。

# 五芒星とフリーズ

結果だけ記すと、ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形（図では  $\triangle TFL$ ）で決まること、
- その3角形は直角以外の2角の大きさ  $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$  で決まることを発見し、
- 内部の五角形の辺の長さを  $a, b$  で表した。

他の3辺の長さを  $c, d, e$  と記すと実はこの5つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

```

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
 a b c d e a b c d e a b c d e
 d e a b c d e a b c d e a b c
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

```

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \quad 1 + b = de, \quad 1 + c = ea, \quad 1 + d = ab, \quad 1 + e = bc$$

が成り立っている。

# 五芒星とフリーズ

結果だけ記すと、ガウスは

- 単位球面上の五芒星が一つの直角三角形 (図では  $\triangle TFL$ ) で決まること,
- その3角形は直角以外の2角の大きさ  $a = \tan^2 A, b = \tan^2 B$  で決まることを発見し,
- 内部の五角形の辺の長さを  $a, b$  で表した.

他の3辺の長さを  $c, d, e$  と記すと実はこの5つの数字はフリーズパターンを生成するのである!!

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 a & b & c & d & e & a & b & c & d & e & a & b & c & d & e \\
 d & e & a & b & c & d & e & a & b & c & d & e & a & b & c \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{array}$$

ここでユニモジュラー規則より

$$1 + a = cd, \quad 1 + b = de, \quad 1 + c = ea, \quad 1 + d = ab, \quad 1 + e = bc$$

が成り立っている.

# 奇蹟の関係式

ガウスは次の定理をもとに球面五芒星を**奇蹟の五芒星** (pentagramma mirificum) と呼んだ.

## 定理 (Gauss)

上の設定のもとに

$$\cos 3 + \cos a + \cos b + \cos c + \cos d + \cos e - abcde = \sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e)}$$

が  $S$  を内部の球面五角形の面積とすると

$$\cos 3 + (1 + \sqrt{-a})(1 + \sqrt{-b})(1 + \sqrt{-c})(1 + \sqrt{-d})(1 + \sqrt{-e}) = -abcde - (\cos 5 + \sqrt{-1} \sin 5)$$

が成り立つ.

# 奇蹟の関係式

ガウスは次の定理をもとに球面五芒星を**奇蹟の五芒星** (pentagramma mirificum) と呼んだ。

## 定理 (Gauss)

上の設定のもとに

$$1 \quad 3 + a + b + c + d + e = abcde = \sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e)}$$

2  $S$  を内部の球面五角形の面積とすると

$$(1 + \sqrt{-a})(1 + \sqrt{-b})(1 + \sqrt{-c})(1 + \sqrt{-d})(1 + \sqrt{-e}) = -abcde \cdot (\cos S + \sqrt{-1} \sin S)$$

が成り立つ。



# 奇蹟の関係式

ガウスは次の定理をもとに球面五芒星を**奇蹟の五芒星** (pentagramma mirificum) と呼んだ。

## 定理 (Gauss)

上の設定のもとに

$$1 \quad 3 + a + b + c + d + e = abcde = \sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e)}$$

2  $S$  を内部の球面五角形の面積とすると

$$(1 + \sqrt{-a})(1 + \sqrt{-b})(1 + \sqrt{-c})(1 + \sqrt{-d})(1 + \sqrt{-e}) = -abcde \cdot (\cos S + \sqrt{-1} \sin S)$$

が成り立つ。

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
 1 & 1 & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
 & x_0 & \frac{x_1+1}{x_0} & & \frac{x_0+1}{x_1} & x_1 & \frac{x_0+x_1+1}{x_0x_1} & & x_0 & \frac{x_1+1}{x_0} & & \frac{x_0+1}{x_1} & x_1 \\
 & & x_1 & \frac{x_0+x_1+1}{x_0x_1} & & x_0 & \frac{x_1+1}{x_0} & & x_1 & \frac{x_0+x_1+1}{x_0x_1} & & x_0 & x_1 \\
 & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0
 \end{array}$$



Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

# まだまだフリーズの物語は続く！

フリーズ方程式・フリーズ多様体や団代数 (クラスター代数) との関係などフリーズは現代数学の最前線で活発に研究が続けられている. その一端をのぞくために, フリーズ (frieze) をタイトルに含む最近の論文を検索してみた.

# まだまだフリーズの物語は続く II



ホームへ オプション Free Tools Help Contact Us Terms of Use Blog

Aoyama Gakuin University



Matches: 89 Show all results Select Page: Previous: 1 2 3 4 5 Next

Batch Download: **Reviews (HTML)** Retrieve Marked | Retrieve First 50 | Mark All

Publications results for "Tilde-(frieze)"

Sort by:  **Newest**

**MR4198508** **Prelim** Fomin, Sergey; Seibabrata, Linus; Heroniani friezes. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2021, no. 1, 651–697. 13F60 (05E10 13A50 51K05) [More Links](#)

[Review PDF](#) [Clipboard](#) [Journal](#) [Article](#)

**MR4164185** **Pending** Gunawan, Emily; Schiffer, Ralf **Frieze** vectors and unitary friezes. *J. Comb. 11* (2020), no. 4, 681–703. 13F60 (16G20) [More Links](#)

[Review PDF](#) [Clipboard](#) [Journal](#) [Article](#)

**MR4118859** **Pending** Garcia Elsenar, A.; Serhiyenko, K. Mutation of type  $D$  friezes. *J. Combin. Theory Ser. A* 176 (2020), 105282, 33 pp. 13F60 (05E10 16G20) [More Links](#)

[Review PDF](#) [Clipboard](#) [Journal](#) [Article](#)

**MR4098309** **Reviewed** Banaiian, Esther; Kelley, Elizabeth Snake graphs and frieze patterns from orbifolds. *Sém. Lothar. Combin.* 82B (2020), Art. 88, 12 pp. 13F60 (05E40) [More Links](#)

[Review PDF](#) [Clipboard](#) [Journal](#) [Article](#) [1 Citation](#)

**MR4098295** **Reviewed** Gunawan, Emily; Schiffer, Ralf Unitary friezes and frieze vectors. *Sém. Lothar. Combin.* 82B (2020), Art. 74, 12 pp. 13F60 (16G20) [More Links](#)

[Review PDF](#) [Clipboard](#) [Journal](#) [Article](#)

**MR4080582** **Pending** Lee, Kyungyong; Li, Ji; Mills, Matthew; Schiffer, Ralf; Socoleanu, Alexandra **Frieze** varieties: a characterization of the finite-tame-wild trichotomy for acyclic quivers. *Adv. Math.* 367 (2020), 107130, 33 pp. 16G60 (13F60 14M99 16G20 16G70) [More Links](#)

[Review PDF](#) [Clipboard](#) [Journal](#) [Article](#) [1 Citation](#)

**MR4080476** **Reviewed** Cuntz, Michael; Holm, Thorsten; Jørgensen, Peter **Frieze** patterns with chaffacks. *Forum Math. Sigma* 8 (2020), Paper No. e17, 36 pp. (Reviewer: John Machacek) 13F60 (05E14 51M20) [More Links](#)

[Review PDF](#) [Clipboard](#) [Journal](#) [Article](#)

**MR4072960** **Reviewed** Andriantsch, Lukas A note on friezes of type  $A_n$ . *Discrete Math.* 343 (2020), no. 7, 111880, 11 pp. 05E10 (05E14) [More Links](#)

[Review PDF](#) [Clipboard](#) [Journal](#) [Article](#)

**MR4067101** **Reviewed** Propp, James The combinatorics of frieze patterns and Markoff numbers. *Integers* 20 (2020), Paper No. A12, 38 pp. (Reviewer: David M. Bressoud) 05A15 (05B45 11R06) [More Links](#)

[Review PDF](#) [Clipboard](#) [Journal](#) [Article](#)

**MR4050563** **Reviewed** Holm, Thorsten; Jørgensen, Peter A  $p$ -angulated generalisation of Conway and Coxeter's theorem on frieze patterns. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2020, no. 1, 71–90. (Reviewer: Siamak Yasseri) 05E10 (13F60) [More Links](#)

[Review PDF](#) [Clipboard](#) [Journal](#) [Article](#) [4 Citations](#)

**MR4077434** **Pending** Kogiso, Takeyoshi; Wakui, Michihisa A bridge between Conway-Coxeter friezes and rational tangles through the Kauffman bracket polynomials. *J. Knot Theory Ramifications* 28 (2019), no. 14, 1950083, 40 pp. 57K14 (11A55 11B57 13F60) [More Links](#)

[Review PDF](#) [Clipboard](#) [Journal](#) [Article](#) [1 Citation](#)

**MR4049793** **Reviewed** Weber, Moritz; Zhao, Mang Factorization of frieze

Google Scholar **allintitle: frieze**

記事 約 484 件 (0.84 頁)

期間指定なし  
2021 年以降  
2020 年以降  
2017 年以降  
期間を指定...

関連性で並び替え  
日付順に並び替え

すべての言語  
英語と日本語のページを換算

特許を含める  
 引用部分を含める

アウトを作成

**Parthenon and parthenoi: a mythological interpretation of the Parthenon frieze**  
JB Connelly - *American Journal of Archaeology*, 1998 - JSTOR  
Since the late 18th century, the Parthenon frieze has generally been viewed as a representation of the 10th-century Athenian citizenry participating in their annual (or quadrennial) Panathenaic procession. Viewed without a mythological reference, the frieze ...  
☆ 引 用 元 136 関 連 記 事 全 2 ページ ン Web of Science: 44 BioRxiv に 取 り 込 ん だ

**A computational model for periodic pattern perception based on frieze and wallpaper groups**  
Y.Liu, R.T.Collins, Y.Tan - *IEEE Transactions on pattern analysis* ... 2004 - ieeeexplore.ieee.org  
We present a computational model for periodic pattern perception based on the mathematical theory of crystallographic groups. In each  $n$ -dimensional Euclidean space, a finite number of symmetry groups can characterize the structures of an infinite variety of ...  
☆ 引 用 元 307 関 連 記 事 全 10 ページ ン Web of Science: 138 BioRxiv に 取 り 込 ん だ

**The viewing and obscuring of the Parthenon frieze**  
R Osborne - *The Journal of Hellenic Studies*, 1987 - JSTOR  
FOR all its notoriety, Classical archaeologists find the Parthenon frieze a difficult to come to terms: its position on the building is seen as perverse, its sub impenetrable, and its 'style' anomalous. This paper sets out to show that these  $d$  inter-related. The difficulties which even ...  
☆ 引 用 元 95 関 連 記 事 全 4 ページ ン Web of Science: 29 BioRxiv に 取 り 込 ん だ

**Gait sequence analysis using frieze patterns**  
Y.Liu, R.Collins, Y.Tan - *European Conference on Computer Vision*, 2002 - Springer  
We analyze walking people using a gait sequence representation that bypasses the need for frame-to-frame tracking of body parts. The gait representation maps a video sequence of silhouettes into a pair of two-dimensional spatio-temporal patterns that are near-periodic ...  
☆ 引 用 元 252 関 連 記 事 全 17 ページ ン Web of Science: 72 BioRxiv に 取 り 込 ん だ

**Triangulated polygons and frieze patterns**  
JH Conway, HSM Coxeter - *The Mathematical Gazette*, 1973 - JSTOR  
1. Introduction By a triangulated  $n$ -gon we mean a partition of a polygon (not necessarily regular) into  $n-2$  triangles by means of  $n-3$  diagonals. Let  $a_i$  denote the number of triangles at  $F_i$ . Clearly  $a_1 + \dots + a_n = 3(n-2)$ ,  $1 \leq i \leq n-2$ , and  $F_1$  and  $F_{n-2}$  at least two of the  $a_i$  are equal to 1 ...  
☆ 引 用 元 209 関 連 記 事 全 8 ページ ン BioRxiv に 取 り 込 ん だ

**The south frieze of the Nike temple and the Marathon painting in the Painted Stoa**  
EB Harrison - *American Journal of Archaeology*, 1972 - JSTOR  
It is a very old custom in ancient representations of battles to distinguish the leaders from the  $m$ elée by showing them in the breast field and with the clearest outline. So the Pharaoh appears in New Kingdom paintings and reliefs and so Alexander appears in the Alexander ...  
☆ 引 用 元 100 関 連 記 事 Web of Science: 32 BioRxiv に 取 り 込 ん だ

**Shape variation-based frieze pattern for robust gait recognition**  
S.Lee, Y.Liu, R.Collins - 2007 IEEE Conference on Computer ... 2007 - ieeeexplore.ieee.org  
Gait is an attractive biometric for vision-based human identification. Previous work on existing public data sets has shown that shape cues yield improved recognition rates compared to pure motion cues. However, shape cues are fragile to gross appearance ...  
☆ 引 用 元 133 関 連 記 事 全 19 ページ ン BioRxiv に 取 り 込 ん だ

**Coxeter's frieze patterns at the crossroads of algebra, geometry and combinatorics**  
S Morier-Genoud - *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2015 - academic.oup.com  
**Frieze** patterns of numbers, introduced in the early 1970s by Coxeter, are currently attracting much interest due to connections with the recent theory of cluster algebras. The present survey aims to review the original work of Coxeter and the new developments around the ...



Showing 1–67 of 67 results for title: frieze

5

frieze

[Show abstracts](#) [Hide abstracts](#)100 results per page. Sort results by  

- [arXiv:2011.10809](#) [pdf, other] [math.CO](#) [math.CO](#)

**Quantum real numbers and  $q$ -deformed Conway-Coxeter friezes**

Authors: Sophie Morier-Genoud, Valentin Ovsienko  
 Submitted 22 February, 2021; v1 submitted 21 November, 2020; originally announced November 2020.  
 Comments: 12 pages, 2 figures
- [arXiv:2102.09647](#) [pdf, ps, other] [math.ST](#)

**Coxeter's Frieze Patterns Arising from Dyck Paths**

Authors: Agustín Moreno Caldas, Isaks David Martin Gaviña, Gabriel Bravo Rios, Pedro Fernando Fernández Espinosa  
 Submitted 18 February, 2021; originally announced February 2021.  
 MSC Class: 16G30; 16G35; 16G50
- [arXiv:2101.10748](#) [pdf, ps, other] [math.PR](#)

**A probabilistic proof of Cooper and Frieze's "First Visit Time Lemma"**

Authors: Francesco Manzo, Matteo Quattropani, Elisabetta Scoppola  
 Submitted 26 January, 2021; originally announced January 2021.
- [arXiv:2101.05676](#) [pdf, ps, other] [math.CO](#)

**Frieze patterns of integers**

Authors: Karin Baur  
 Submitted 14 January, 2021; originally announced January 2021.  
 Comments: 9 pages, 6 figures
- [arXiv:1806.00940](#) [pdf, other] [math.CO](#) [math.BA](#) [math.RT](#) [doi: 10.4310/JOC.2020.v11.n4.a6](#)

**Frieze Vectors and Unitary Friezes**

Authors: Emily Ganawain, Raif Schiffler  
 Submitted 31 October, 2020; v1 submitted 3 June, 2018; originally announced June 2018.  
 Comments: 18 pages, 8 figures  
 MSC Class: 13P60 (primary); 16G20 (secondary)  
 Journal ref. J. Comb. 11 (2020), no. 4, 681–703
- [arXiv:2010.14302](#) [pdf, other] [math.ST](#) [math.CO](#)

# 参考文献 I

この講義録では主に次の論文を参考にした: [6], [7], [1].

日本語の成書は見当たらないが、ネット上の解説記事がある。参考になるだろう。

- 中島啓「クラスター代数とルート系」

[https://member.ipmu.jp/hiraku.nakajima/Talks/12\\_Hakken/hakken.pdf](https://member.ipmu.jp/hiraku.nakajima/Talks/12_Hakken/hakken.pdf)

- 黒木玄「フリーズパターン – 数の繰り返し模様の不思議」2013年7月7日

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20120810FriezePattern.pdf>








Charles H. Conley and Valentin Ovsienko, *Lagrangian configurations and symplectic cross-ratios*, Math. Ann. **375** (2019), no. 3-4, 1105–1145. MR 4023372




J. H. Conway and H. S. M. Coxeter, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz. **57** (1973), no. 400, 87–94. MR 461269

## 参考文献 II

-  \_\_\_\_\_, *Triangulated polygons and frieze patterns*, Math. Gaz. **57** (1973), no. 401, 175–183. MR 461270
-  H. S. M. Coxeter, *Frieze patterns*, Acta Arith. **18** (1971), 297–310. MR 286771
-  Carl Friedrich Gauß, *Werke. Ergänzungsreihe. Band III*, Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1975, Briefwechsel: C. F. Gauss–C. L. Gerling. [Correspondence: C. F. Gauss–C. L. Gerling], Edited by Clemens Schaefer, Reprint of the 1927 original. MR 552665
-  Claire-Soizic Henry, *Coxeter friezes and triangulations of polygons*, Amer. Math. Monthly **120** (2013), no. 6, 553–558. MR 3063120
-  Sophie Morier-Genoud, *Coxeter's frieze patterns at the crossroads of algebra, geometry and combinatorics*, Bull. Lond. Math. Soc. **47** (2015), no. 6, 895–938. MR 3431573

## 参考文献 III

-  Richard P. Stanley, *Catalan numbers*, Cambridge University Press, New York, 2015. MR 3467982
-  高木貞治, 初等整数論講義 (第 2 版), 共立出版, 1971.



これでオシマイ!!  
お疲れさまでした

