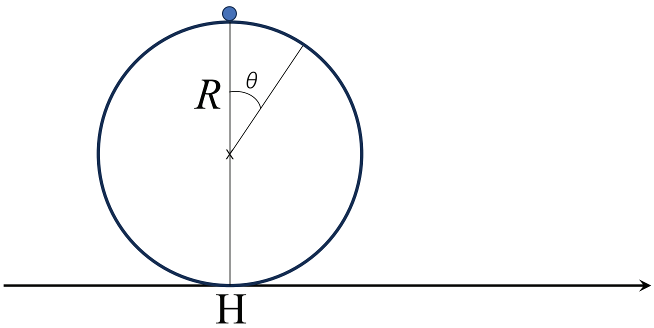
7 図のように半径 R の表面が滑らかな球が水平な床に固定されている。時刻 $t=0$ で球の頂点から質量 m の質点を十分小さな速度 δv で滑らせ始めた。以下の問に答えよ。



問 1. 質点の頂点からの角度を θ とする．質点が球の表面を滑り落ちている間の運動方程式を θ を用いて記し、θ が十分小さい間のその運動方程式の解を求めよ。

以下の問いでは θ は十分小さいとは限らない。また、初速度 δv は十分小さく 0 とみなせるとする。

問 2. 質点が球の表面を滑り落ちている間の質点の速度の大きさをエネルギー保存則より求めよ。

問 3. θ が θ_{c} になったところで、質点は球の表面から離れ始めた。θ_{c} を求めよ。

問 4. 質点はその後、床に落ちた。球の中心から床に下ろした垂線の足を H とする。質点が床に落ちた位置の H からの距離 ℓ を求めよ。

$\boxed{8}$ 真空の誘電率を ε_0 として以下の問いに答えよ。

問 1. 半径 a および b $(a < b)$ の同心球面の導体からなる球形のコンデンサーを考える。

(1) 内球に q_a、外球に q_b の電荷を与えたときの電場を求めよ。また、無限遠を基準点としたときの静電ポテンシャルを求めよ。

(2) このコンデンサーの電気容量を求めよ。

問 2. 質量 m、電荷 q の荷電粒子が一様な磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ の中へ、$t = 0$ に初速度 $(0, v_0, 0)$ で入射した。その後の荷電粒子の速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を求めよ。

問 3. 電気容量 C のコンデンサーと抵抗 R、起電力 V の電源、スイッチを直列につないだ。$t = 0$ にスイッチを入れた後の電流 $I(t)$ を求め、そのグラフを示せ。ただし、スイッチを入れる前にコンデンサーは放電されていたとする。

$\boxed{9}$ パウリ行列は

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z), \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}、\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と 2×2 行列で定義される．以下の問に答えよ．

I. パウリ行列を用いて、スピン角運動量ベクトルを表す演算子は $\boldsymbol{S} = \dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ で定義される．

1. $S^2 = {S_x}^2 + {S_y}^2 + {S_z}^2$ を 2×2 行列で表せ．
2. 交換積 $[S_z, S_x]$、$[S^2, S_x]$ を 2×2 行列の計算から求めよ．
3. S_z の固有値および固有ベクトル（固有状態のベクトル表示）を全て求めよ．
4. S_x の固有値および固有ベクトルを全て求めよ．
5. ここまでの結果を用いて、S^2、S_z および S_x について、不確定性原理に関しての議論をせよ．

II. スピン磁気モーメントを表す演算子を $\boldsymbol{M} = -\mu_B \boldsymbol{\sigma}$ とする．ここで μ_{B} はボーア磁子と呼ばれる定数である．このとき、磁場 $\boldsymbol{H} = (H_x, H_y, H_z)$ 中のスピンのハミルトニアンは $\mathcal{H} = -\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{H}$ で表される．
これ以降、磁場の強さが $H(> 0)$ で x 軸と角度 ϕ をなす向きを向いている場合 $\boldsymbol{H} = (H\cos\phi, H\sin\phi, 0)$ を考える．

6. ハミルトニアンを行列で表せ．
7. エネルギー準位をすべて求めよ．
8. 基底状態のベクトル表示を示せ．
9. 基底状態について、スピン角運動量ベクトルの期待値 $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ を求めよ．
10. 磁場の強さと向きによって基底状態がどのように決まるかについて議論せよ．

$\boxed{10}$ 体積が $V = L^3$ の立方体容器の中に、相互作用しない質量 m の気体分子が N 個含まれている。この系は温度 T の熱浴に接しているとして、以下の問いに答えよ。プランク定数を $h(= 2\pi\hbar)$、ボルツマン定数を k_B とし、逆温度を $\beta = 1/k_BT$ とする。解答では、T と β は混在していてもよいものとする。

問 1. まず、気体分子の数が $N = 1$ の場合を考える。気体分子の運動量を $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ とする。量子力学によると、運動量の取りうる値は離散的となり、各成分が正の整数のベクトル $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ を用いて

$$\boldsymbol{p} = \frac{\pi\hbar}{L}\boldsymbol{n} = \frac{\pi\hbar}{L}(n_x, n_y, n_x)$$

のようになる。

a. この系の分配関数 $Z_1(T, V)$ を求めよ。その際、正の整数 n に対して $x = n/L$ とし、n についての和 $L^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}$ を x についての積分 $\int_0^{\infty} dx$ に置き換えてよいことを用いよ。

b. この系のエネルギーの期待値（内部エネルギー）を求めよ。

問 2. 一般の N 粒子系を考える。

a. N 個の気体分子は互いに区別できないことに留意し、系の分配関数 $Z_N(T, V)$ を求めよ。

b. この系のエネルギーの期待値（内部エネルギー）を求めよ。

c. この系の圧力 p を求めよ。

d. この系のエントロピー S を求めよ。

e. 気体分子の数密度を $\rho = N/V$ と書き、無次元量 $A \equiv \frac{mk_BT}{\rho^{2/3}\hbar^2}$ を定義する。d. で求めたエントロピーの表式によると、A が 1 より十分小さくなるような条件（低温、高密度）では、エントロピーが負の値となってしまう。これは何を意味するのか議論せよ。

11

以下の固体の比熱に関する設問 a-c について、空欄（ア）－（サ）にあてはまる式、または語句を記せ。Tは温度、k_{B}はボルツマン定数、$\hbar = h$(プランク定数)$/2\pi$、ωは振動数である。

a.　デバイ温度Θより十分高温では、1原子当たりの内部エネルギーUは、位置エネルギーとx, y, z方向の運動エネルギーにエネルギーの等分配則によりそれぞれ$\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$ずつ蓄えられていることから、モル分子数を$N$とすると1モルの物質の比熱$C_{\mathrm{mol}}$は、$C_{\mathrm{mol}} =$ （ア） と書け、この場合には物質の種類や温度に依存しない一定値となる。これは （イ） の法則である。Θは格子波の速さをv、1モルの物質の体積をVとすると、$\Theta = \frac{N\hbar v}{R}\left(\frac{6\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$ と書ける。よって、Θは硬い物質ほど高く、$\Theta = 2230\ \mathrm{K}$のダイヤモンドの室温(298 K)における$C_{\mathrm{mol}}$は、 （ア） の約1/4である。

b.　低温では格子の微小振動を、互いに独立な調和振動子の集団として扱うことができ、エネルギー準位は量子化される。最も低い準位のエネルギー$(1/2)\hbar\omega$は （ウ） 振動のエネルギーであり、それより高いエネルギー側に、$\hbar\omega$の間隔で準位が存在する。ωの小さいエネルギー領域でのフォノンは （エ） モードで音速をv_{s}、波数kをとすると、$\omega =$ （オ） と書ける。一般的に3次元の固体において、低エネルギー領域でフォノンの状態密度$D(\omega)$はω^2に比例して増える。つまり$T \sim 0\ \mathrm{K}$の極低温から温度を上げていく場合には、一定の温度上昇幅当たりの新たに励起されるフォノンの数が温度上昇とともに増し、比熱が （カ） なる。

全ての （エ） モードに対して$D(\omega)$がω^2に比例して変化し、縦波、横波が同じv_{s}を持ち、上限の周波数までの$D(\omega)$の総数が全自由度$3N$に一致とすると仮定したデバイ模型の比熱C_{lat}は以下のように表される。

$$C_{\mathrm{lat}} = 9Nk_{\mathrm{B}}\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \int_0^{\Theta/T} \frac{x^4 e^x dx}{(e^x - 1)^2} \quad \left(x = \frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$$

$T \ll \Theta$の極低温領域において、積分項は$\frac{4}{15}\pi^4$に近似できるので、この領域での比熱はTの （キ） 乗に比例することがわかる。

c.　物質の極低温における比熱では、フォノンの寄与が小さくなることから電子の寄与も無視できなくなる。有限温度下で電子状態の占有確率$f(E)$を与える （ク） －ディラックの分布関数は、Eをエネルギー、E_{F}を （ク） エネルギーとして、$f(E) = 1/\left(e^{(E-E_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T} - 1\right)$と表される。$T = 0\ \mathrm{K}$において、$E < E_{\mathrm{F}}$では$f(E) =$ （ケ） 、$E > E_{\mathrm{F}}$では$f(E) =$ （コ） であり、温度$T(> 0\ \mathrm{K})$によってE_{F}近傍の$\pm k_{\mathrm{B}}T$のエネルギーの電子のみの$f(E)$が変化しエネルギーを変えるとすると、これに対応する電子の比熱C_{el}はTの （サ） 乗に比例する。

$\boxed{12}$

質量 m_{e}、運動量の大きさ p の陽電子 e^+ が質量 m_{e} の静止した電子 e^- と衝突し、質量 $m_{\mu^\pm}$ の $\mu^+\mu^-$ 対が作られた $(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$。以下の問に答えよ。
必要ならば、$m_{\mu^+} = m_{\mu^-} = m_\mu > m_{\mathrm{e}}$ を用いて良い。

問 1. 陽電子の全エネルギー E を p と m_{e} 等を用いて表せ。

問 2. 重心系での電子・陽電子のエネルギー E' と運動量の大きさ p' は以下で与えられることを示せ。

$$E' = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{e}}c^2(E + m_{\mathrm{e}}c^2)}{2}} \quad , \quad c\,p' = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{e}}c^2(E - m_{\mathrm{e}}c^2)}{2}} \tag{1}$$

問 3. この反応が起こるためには、重心系で $E' > m_\mu c^2$ が必要であることを説明せよ。

問 4. この反応が起こるために必要な最小の p を求めよ。