

2024 年度  
青山学院大学  
大学院理工学研究科理工学専攻

# 博士前期課程(9月)入学試験

## 各コース共通問題 「数学」 問題冊子

受験番号：	氏名：
-------	-----

### [注意事項]

- 問題冊子は表紙を除いて2ページあり、問題は全部で6題ある。6題中3題を選択して解答せよ。
- 解答冊子は表紙と3枚の解答用紙でできている。問題冊子表紙、解答冊子表紙およびすべての解答用紙に受験番号・氏名を忘れずに記入すること。
- 問題1題ごとに解答用紙1枚を使い、必ず解答用紙左上の枠内に問題番号を記入すること。問題番号の記入がない場合、また2つ以上の番号の記入があった場合には、解答は無効とする。
- 解答欄が足りない場合には、当該解答用紙の裏面も解答欄として使用してよい。その場合、「裏面に続く」と表面の最後に明記すること。
- 解答冊子、問題冊子とも必ず提出すること。

**1**

$a$  を定数とする. 連立1次方程式

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & -3x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +(a-1)x_2 & -x_3 & +(a+4)x_4 & = & -a-2 \\ 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +(a-6)x_4 & = & 4 \end{cases}$$

を解け.

**2**

行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  に対し, 以下の間に答えよ.

- (1)  $A$  の固有値をすべて求めよ.
- (2) 正の整数  $n$  に対し,  $A^n$  を求めよ.
- (3)  $A - mE$  が正則行列となる整数  $m$  をすべて求めよ. ただし,  $E$  は単位行列とする.

**3**

実2変数関数

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$$

について, 以下の間に答えよ.

- (1)  $f$  の停留点（臨界点ともいう）をすべて求めよ.
- (2)  $f$  について, 極大・極小を論ぜよ.

**4** 以下の積分値を求めよ.

$$(1) \iint_D e^x dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid y \geq 0, y \leq x + 1, y \leq -x + 1\}$$

$$(2) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$$

$$(3) \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left( \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^2 \sin(xy) dx \right) dy$$

**5** 以下の問に答えよ.

(1) 部分分数分解を利用して, 関数

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 + 3x - 2}$$

の  $n$  階導関数  $f^{(n)}(x)$  を求めよ.

(2) 関数

$$g(x) = \frac{2x - 1}{(x + 2)(1 + x^2)}$$

の  $x = 0$  におけるテイラー展開（マクローリン展開ともいう）を  $x^3$  の項まで求めよ. 剰余項の具体的な形は求めなくてよい.

**6**  $m$  を整数とし,  $f(z)$  を  $\mathbb{R}$  上で定義された連続関数とする.  $x$  を独立変数,  $y$  を従属変数とする微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = x^{m-1} f\left(\frac{y}{x^m}\right) \quad (x \neq 0)$$

について, 以下の問に答えよ.

(1)  $m = 1$  とする.  $z = \frac{y}{x}$  とおくとき,  $z = z(x)$  が満たす微分方程式を  $x$  と  $z$  を用いて表せ.

(2)  $z = \frac{y}{x^m}$  とおくとき,  $z = z(x)$  が満たす微分方程式を  $x$  と  $z$  を用いて表せ.

(3) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = x \left(1 + \frac{y}{x^2}\right) \quad (x \neq 0)$$

の一般解を求めよ.