7

質量 m の2つのおもり1，2がばね定数 k のばねでつながれている。鉛直上方を z 軸の正の向きとし重力加速度を g，バネの自然長を ℓ_0 とする。最初，おもり1を手で持ち $z=0$ の高さで静止させたところ，おもり2はおもり1の鉛直下方で静止した。おもり1，2の z 座標をそれぞれ $z_1(t), z_2(t)$ とする。

問1. $t=0$ でおもり1を持っていた手を静かに離した。おもり1，2の $z_1(t), z_2(t)$ で表した運動方程式を記し、手を離した直後のおもり1，2の加速度を求めよ。

問2. おもり1，2の重心座標 $x(t)$ と相対座標 $y(t)$ の運動方程式を記し，それを解き $t \geq 0$ での $z_1(t), z_2(t)$, を求めよ。さらにそれを用いて t が十分小さい間の $z_1(t), z_2(t)$ の $t=0$ からの変位が t の何次から始まるか調べ、問1の結果と合わせその振る舞いの理由を述べよ。

問3. 次にばねを変え，ばねの伸びに比例した復元力に加えて相対座標の速度に比例する抵抗力 $-2m\gamma\dot{y}(t)$ が働くばねに置き換えた。最初，おもり1を手で持ちおもり2が静止した後，$t=0$ でおもり1を持っていた手を静かに離した。$z_1(0)=0$ とする。おもりを離した後の $z_1(t), z_2(t)$ を求めよ。さらに十分時間がたった後の $z_1(t), z_2(t)$ の振る舞いを論ぜよ。

8

電磁場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ は以下のマックスウェルの方程式によって規定される。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (i)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad (ii)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (iii)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (iv)$$

ただし、真空の誘電率を ε_0、真空の透磁率を μ_0、電荷密度を ρ、電流密度を $\boldsymbol{i}$ とする。

問 1. (i) 式を積分形式で表せ。また、この積分型の式を用いて、半径 a の無限に長い円柱の内部に電荷が一様な密度 ρ で分布しているときの、円柱内外の電場の大きさを求めよ。

問 2. (iii) 式を積分形式で表せ。また、この積分型の式を用いて、半径 a の無限に長い円柱状の領域の内部に、向きが円柱の軸方向で大きさ $B(t)$ の一様な磁場が時間とともに増加するときに、円柱内外にできる電場の大きさ $E(r,t)$ とその向きを求めよ。ただし、r は中心軸からの距離とする。

問 3. 電磁波に関する以下の問いに答えよ。

(1) 電荷や電流が存在しない自由空間におけるマックスウェルの方程式より、電場の波動方程式を導け。ただし、以下の公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ を用いてよい。

(2) 電磁波の電場が x 軸方向に振動し、その大きさが $E_x(z,t) = E_0 \sin(kz + \omega t)$ で表されるとする。この電磁波の磁場の振動方向とその大きさを示せ。また、これらの式がマックスウェルの方程式を満たすために必要な $k, \omega, \varepsilon_0, \mu_0$ の間での条件を導け。

9

円周 L のリング上を 1 次元運動する質量 m の粒子を考える。リング上のある点を座標原点にとり、リングに沿った道のりを座標 x とする。このとき、運動量演算子の固有状態を表す波動関数は、波数 k を用いて $\varphi_k(x) = N\exp(\mathrm{i}kx)$ と表される。ここで N は規格化定数である。

以下の問に答えよ。必ず計算過程を簡略に示すこと。

(1) シュレディンガー方程式と境界条件を示せ。

(2) 演算子の交換関係から、$\varphi(x)$ がシュレディンガー方程式の解である理由を説明せよ。

(3) この系の定常状態において運動量と全エネルギーを観測した場合に、どの様な結果が得られるか。その結果は、不確定性原理の視点からどのように理解できるか。

(4) 波数 k の満たすべき条件を示せ。記述に必要な量は自分で定義して良い。

(5) 規格化定数 N を求めよ。

この系における定常状態のうち、波数 k_1 および k_2（ただし $k_1 \neq k_2$) で表される状態を取り上げ、それぞれの波動関数を $\varphi_{k_1}(x)$、$\varphi_{k_2}(x)$ とする。ただし、φ_{k_1} および φ_{k_2} は規格化済みとする。

このとき、以下の様にこれら 2 つの状態の重ね合わせ状態を考える。この重ね合わせ状態の (時間に依存する) 波動関数を $\psi(x,t)$ としたときに、時刻 $t=0$ において $\psi(x,0) = N'\left(2\varphi_{k_1}(x) + \varphi_{k_2}(x)\right)$ で表されるものとする。

(6) 規格化定数 N' を求めよ。

(7) 時刻 $t=0$ において、運動量を観測した場合、どのような結果が得られるか。

(8) 時刻 $t(>0)$ における波動関数 $\psi(x,t)$ を示せ。ただし $\psi(x,t)$ は規格化されているものとする。

(9) 時刻 $t(>0)$ における運動量の期待値を求めよ。

10

N 個のスピン $\{S_i\} = (S_1 S_2, \cdots S_N)$ からなる系を考える。各スピン変数は $S_i = -1, 1$ のように二通りの値をとる。系は温度 T の熱浴に接しているとして、以下の問いに答えよ。ボルツマン定数を k_B とし、逆温度を $\beta = 1/k_B T$ とする。解答では、T と β は混在していてもよいものとする。

問 1. まず、系のハミルトニアンが以下のように与えられる場合を考える。ここで $h(>0)$ は定数である。

$$\mathcal{H} = -h \sum_{i=1}^{N} S_i$$

a. この系の分配関数を求めよ。

b. この系のヘルムホルツ自由エネルギーを求めよ。

c. この系のエントロピーを求めよ。

d. 高温 $(T \to \infty)$ 極限と低温 $(T \to 0)$ 極限でエントロピーは一定値に近づく。それぞれの極限値を求めよ。

e. 上で求めたエントロピーの極限値について、エントロピーについてのボルツマンの公式と関連づけて考察せよ。

問 2. 次に、系のハミルトニアンが以下のように与えられる場合を考える。ここで $J(>0)$ は定数であり、スピンの数 N は偶数であるとする。

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^{N/2} S_{2i-1} S_{2i}$$

a. まず、$N = 2$ の場合を考える。この系のミクロな状態を書き出し、分配関数 Z_2 を求めよ。

b. 一般の N の場合、この系の分配関数 Z_N を求めよ。

c. 高温 $(T \to \infty)$ 極限と低温 $(T \to 0)$ 極限でエントロピーは一定値に近づく。それぞれの極限値を求めよ。

11

1. 以下の a-c に解答せよ。

a. 超伝導を示さない金属の0 Kから室温の温度範囲の電気抵抗率の温度依存性について理由を含めて 100~200 字で簡潔に説明せよ。解答には図を用いてもよい。

b. 図 1 は様々な単体金属の298 Kにおける熱伝導率κと導電率σの関係を表したもので、Tは絶対温度、Lはローレンツ数と呼ばれる定数である。κとσの比例関係は Wiedemann－Franz 則と呼ばれる。この関係より金属において熱が何によって運ばれるか述べよ。また、前問と関連させて金属の0 Kから室温の間の熱伝導度κの温度依存性について 100 字程度で簡潔に説明せよ。解答には図を用いてもよい。

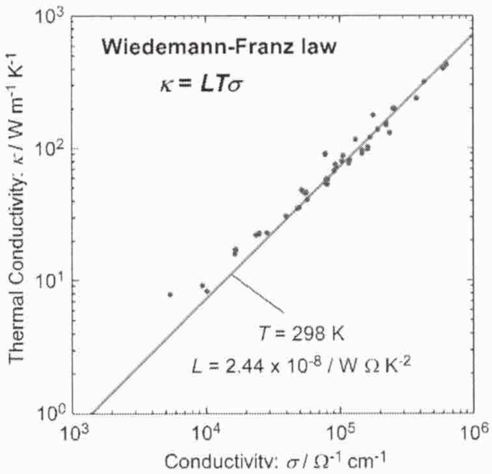

図 1　単体金属の298 Kにおける熱伝導率κと導電率σの関係

c. 絶縁体の結晶では主にフォノンが熱伝導を担う。フォノン－フォノンの相互作用や励起されるフォノン数の温度変化、結晶の完全性などを考慮し、絶縁体結晶の0 Kから室温の間の熱伝導率κの温度依存性について横軸に温度T、縦軸に熱伝導率κをとったグラフに概形を描け。

2. 以下の a, b から 1 問を選択し解答せよ。

a. 磁場の強度を調べるために、Hall素子が用いられることが多い。Hall素子を用いた磁場計測の原理について図を示して説明せよ。

b. p－n 接合を利用した太陽電池について、動作原理を説明し、変換効率を高めるための方法を論ぜよ。

12

放射性元素の原子核は別の元素へと一定の確率で崩壊し、その過程において放射線を放出する。時刻 t での未崩壊の原子数を $N(t)$ とし、単位時間当たりにこの原子が崩壊する確率を λ とする。

問 1. $t=0$ での未崩壊の原子数を N_0 とした時、$N(t)$ が N_0 の半分になるまでの時間を半減期とよぶ。半減期を T として T と λ との間に成り立つ関係を導け。

放射性元素の例として、^{22}Na を考える。

$$^{22}_{11}\mathrm{Na} \longrightarrow ^{22}_{10}\mathrm{Ne}^* + \boxed{}$$

問 2. $\boxed{}$ を埋める事で、^{22}Na の核反応式を完成させよ。

問 3. この崩壊の名称を述べよ。

問 4. ^{22}Na のスペクトルをシンチレーション検出器などで測定すると ^{22}Ne* が基底状態へ移る際の 1.275 MeV のガンマ線以外に 511 keV のガンマ線も観測される。この 511 keV のガンマ線がなぜ観測されるのか説明せよ。

13

問 1. 物理学や数理科学の分野の興味のある研究テーマをとりあげ、その背景や解決されるべき課題の具体例、及び解決方法と期待される成果について、簡潔且つ具体的に記述せよ。

問 2. パンデミックによってもたらされている様々な問題の解決に、物理学や数理科学、あるいはそれらに基づく科学や技術が果たし得る役割について、簡潔且つ具体的に論ぜよ。