1　以下の問に答えよ．

(1) 相異なる素数 p, q に対し，

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

が成り立つことを示せ．フェルマーの小定理は既知としてよい．

(2) G, G' を群とし，写像 $f : G \to G'$ を群準同型とする．また，e, e' をそれぞれ G, G' の単位元とする．

(a) $f(e) = e'$ を示せ．

(b) 任意の $g \in G$ に対し，$f(g)^{-1} = f(g^{-1})$ であることを示せ．

(c) $\mathrm{Im}\, f$ は G' の部分群であることを示せ．

(d) $\mathrm{Ker}\, f$ は G の部分群であることを示せ．

2　空間内の曲面がパラメータ (u, v) を用いて

$$x = \frac{1}{2}\cos u \cos v,$$
$$y = \frac{1}{2}\cos u \sin v,$$
$$z = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 t}\ dt$$

$(0 < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < 2\pi)$ と表わされているとき，次の問に答えよ．

(1) パラメータ (u, v) で表わされる点での単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 第一基本形式を求めよ．

(3) 第二基本形式を求めよ．

(4) パラメータ (u, v) で表わされる点でのガウス曲率を求めよ．

3　以下の問に答えよ．

(1) α を複素数とし，n を自然数とする．ある $\varepsilon > 0$ に対して $f(z)$ は $0 < |z-\alpha| < \varepsilon$ で正則で，$z = \alpha$ が $f(z)$ の n 位の極であるとき，

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to \alpha} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-\alpha)^n f(z)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 以下の複素線積分の値を求めよ．ただし，単純閉曲線の向きは正の向きとする．

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{\cos \pi z} dz$　　(b) $\displaystyle\int_{|z|=2} (z+\overline{z}) dz$　　(c) $\displaystyle\int_{|z-\pi|=1} \frac{\sin z}{(z-\pi)^{100}} dz$

4　次の初期値・境界値問題 $(*)$ を考える．

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) & (0 < x < \pi,\ t > 0) \quad \text{(a)} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & (t > 0) \quad \text{(b)} \\ u(x,0) = \pi x - x^2 & (0 \le x \le \pi) \quad \text{(c)} \end{cases}$$

(1) a, b, c, λ $(a^2 + b^2 \neq 0,\ \lambda > 0)$ を実数の定数とし，

$$u(x,t) = e^{ct}(a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x))$$

とおくとき，$u(x,t)$ が (a), (b) を同時に満たすような組 (a,b,c,λ) をすべて求めよ．

(2) 初期値・境界値問題 $(*)$ の解を求めよ．

(3) (2) で求めた解を $u(x,t)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ を求めよ．

5　$X = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ とし，関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$d(x, y) := \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \qquad (x, y \in X)$$

(1) d は X 上の距離関数であることを示せ．

(2) 点 $x \in X$ の ε 近傍 $N_\varepsilon(x) := \{y \in X \,|\, d(y, x) < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ は X 内のある区間と一致する．その区間を求めよ．

(3) 各 n に対して，$A_n := \{x \in X \,|\, x > 1/n\}$ は距離空間 (X, d) の開集合であることを示せ．

(4) 距離空間 (X, d) はコンパクトでないことを示せ．

6　λ, μ を正の定数とし，X, Y を独立で，確率分布が次で与えられる確率変数とする：事象 $X = r$, $Y = r$ の確率を，それぞれ $P(X = r)$, $P(Y = r)$ と表すと，

$$P(X = r) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!}, \qquad P(Y = r) = e^{-\mu} \frac{\mu^r}{r!} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots).$$

(1) X の積率母関数 $M(t) = E[e^{tX}]$ を求めよ．ただし，$E[Z]$ は確率変数 Z の平均（期待値）を表す．

(2) X の平均を求めよ．

(3) r を 0 以上の整数とするとき，$P(X + Y = r)$ を求めよ．

(4) $k \leqq r$ をみたす 0 以上の整数 k に対して，条件付確率 $P(X = k \mid X + Y = r)$ を求めよ．