

2023 年度
青山学院大学
大学院理工学研究科理工学専攻

博士前期課程(9月)入学試験

各コース共通問題 「数学」 問題冊子

受験番号：	氏名：
-------	-----

[注意事項]

1. 問題冊子は表紙を除いて2ページあり、問題は全部で6題ある。6題中3題を選択して解答せよ。
2. 解答冊子は表紙と3枚の解答用紙でできている。問題冊子表紙、解答冊子表紙およびすべての解答用紙に受験番号・氏名を忘れずに記入すること。
3. 問題1題ごとに解答用紙1枚を使い、必ず解答用紙左上の枠内に問題番号を記入すること。問題番号の記入がない場合、また2つ以上の番号の記入があった場合には、解答は無効とする。
4. 解答欄が足りない場合には、当該解答用紙の裏面も解答欄として使用してよい。その場合、「裏面に続く」と表面の最後に明記すること。
5. 解答冊子、問題冊子とも必ず提出すること。

1

次の連立1次方程式を解け.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 5 \\ 7 & 8 & 5 & 9 \\ 5 & 2 & 11 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

2

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問に答えよ.

- (1) A の固有値を求めよ.
- (2) A が対角化可能かどうか判定せよ. 対角化可能ならば, $P^{-1}AP$ が対角行列であるような正則行列 P を求めよ.
- (3) $A^6 + E_3$ の行列式を求めよ. ただし, E_3 は3次単位行列とする.

3

実2変数関数

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 8xy$$

について, 極大・極小を論ぜよ.

4 平面上の閉領域 $D = \{(x, y) \mid xy \geq 1, y \leq x\}$ と, $a > 1$ に対して $D_a = \{(x, y) \mid xy \geq 1, y \leq x \leq a\}$ を考える.

- (1) 閉領域 D_a を図示せよ.
- (2) 重積分 $\iint_{D_a} \frac{dxdy}{x(1+xy)}$ を a を用いて表せ.
- (3) 広義積分 $\iint_D \frac{dxdy}{x(1+xy)}$ を求めよ.

5 以下の問に答えよ.

- (1) 次の関数の $x = 0$ におけるテイラー展開を3次の項まで求めよ（結果のみでよい）. ただし, 例えば

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + R_4$$

のように, 剰余項は R_4 と記すこと.

(i) $\frac{1}{1-x}$ (ii) $\sqrt[3]{1+x}$ (iii) $\log(1+x)$ (iv) $\log(1+\sin x)$

- (2) 次の関数の極限值を計算せよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \sqrt[3]{1+x}} + \frac{3}{\log(1+\sin x)} \right)$$

6 微分方程式

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + xy = \frac{3\pi}{2} \sin 2x \quad (x \neq 0) \quad (*)$$

について以下の問に答えよ.

- (1) $z = xy$ とするとき, $z = z(x)$ が満たす微分方程式を求めよ.
- (2) (*) の一般解を求めよ.
- (3) $y(\pi) = 0, \frac{dy}{dx}(\pi) = 0$ を満たす(*)の解を求めよ.